This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06908788 4

(Binet)
ORB

- 2 - 21

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ASTRONOMIE PHYSIQUE.

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ASTRONOMIE PHYSIQUE,

PAR J.-B. BIOT,

Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes; membre libre de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres; professeur de Physique mathématique au Collége de France, et d'Astronomie à la Faculté des Sciences de Paris; membre des Sociétés royales de Londres et d'Édimbourg; de l'Académie impériale de Saint-Pétersbourg; des Académies royales de Stockholm, Upsal, Turin, Munich, Lucques, Berlin, Naples, Messine, Catane et Palerme; membre honoraire de l'Université de Wilna; de l'Institution royale de Londres; de la Société philosophique de Cambridge; astronomique de Londres; des Antiquaires d'Écosse; littéraire et philosophique de Saint-Andrews; de Manchester; de la Société pour l'avancement des Sciences naturelles de Marbourg; de Halle; de la Société helvétique des Sciences naturelles; de la Société de Médecine d'Aberdeen; de la Société italienne des Sciences résidante à Modène; de l'Académie américaine des Sciences et Arts de Boston; de la Société littéraire et historique de Québec; des Académies de Nancy, d'Arras, et de la Société philomatique de Paris.

Cinctum istum principia parva sunt,
sed ex quibus magnificentissima, augentur.
Cic., de Fin., lib. V.

Troisième Édition, corrigée et augmentée.

3

TOME TROISIÈME.

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

ASTOR LIBRARY NEW-YORK

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, ETC.
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.
1845.

L/S

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne portera pas, comme ci-dessous, la signature du libraire-éditeur, sera contrefait. Les mesures nécessaires sont prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

AVERTISSEMENT

RELATIF AU PRÉSENT VOLUME.

L'amélioration la plus essentielle que renferme ce troisième volume comparativement à l'édition précédente, consiste dans l'exposé complet des méthodes théoriques et pratiques employées pour déterminer la figure de la terre, et pour résoudre les problèmes géodésiques en général. Les grandes opérations de ce genre qui ont été effectuées depuis la fin du dernier siècle, en France et dans toutes les autres régions du monde civilisé, ont fourni aux géomètres des sujets de travaux théoriques dans lesquels ils ont déployé toutes les ressources de la plus profonde analyse; et les observateurs ont profité de ces recherches, pour donner à leurs méthodes pratiques une rigueur qui les rapprochât autant que possible de ces savantes abstractions. Mais cette concordance ayant été établie successivement, à mesure que des instruments plus perfectionnés permettaient de rendre les observations plus précises, il est arrivé que, dans les Traités spéciaux publiés sur ce sujet, du moins en France, l'union de la pratique avec la théorie n'a pas pu être réalisée aussi continûment, surtout aussi simplement que l'on pourrait le désirer; et l'exactitude des résultats obtenus, quoique réelle et

irréprochable, n'a pas toujours été établie sur des considérations assez légitimes, ou assez évidentes, pour paraître à l'abri de toute objection. J'ai pensé qu'il serait utile de présenter aujourd'hui l'ensemble des procédés pratiques sous un point de vue qui en rendît l'exposition plus généralement conforme aux indications théoriques. Je crois avoir réussi à le faire sans les compliquer, même sans y rien changer essentiellement, par le seul emploi de considérations très-simples, fondées sur les principes d'osculation des surfaces continues, par des sphères de rayons variables; de sorte que les calculs, bien que rigoureusement conformes aux plus hautes spéculations de l'analyse, s'effectuent cependant comme sur une sphère unique, ou sur des sphères à peine différentes entre elles, comme on le faisait auparavant sans s'en rendre aussi exactement compte. Par ce moyen, beaucoup de difficultés de détail ont disparu, et les applications numériques, dirigées sur des principes plus certains, n'exposeront plus ceux qui voudront les effectuer à des erreurs que des personnes, même très-habiles, n'ont pas toujours évitées. J'espère aussi avoir consi-

qu'aux nombres; et en particulier j'ai inséré, comme exemple, tous les détails du calcul de l'arc méridien qui traverse la triangulation d'Espagne, dont M. Largeteau a bien voulu rassembler, pour ce but, l'exposition complète dans une Note rédigée par lui. Après tous ces efforts, j'ai lieu d'espérer que ce résumé des méthodes géodésiques, renfermé dans 360 pages, pourra être utile aux astronomes praticiens qui auraient occasion d'effectuer ou de calculer de grandes triangulations, en les exemptant de chercher les détails de ces méthodes dans les volumineux traités où elles ont été jusqu'ici disséminées avec moins de connexion entre elles, et avec beaucoup plus de difficulté pour être comprises ou employées exactement.

Quant au reste du volume, les matériaux renfermés dans la précédente édition m'ont paru nécessiter plutôt des rectifications de détail que d'ensemble. Je n'ai pas cru devoir changer la rédaction du chapitre où j'avais exposé l'emploi des cercles répétiteurs, quoique ce genre d'instruments ait été considérablement perfectionné dans sa construction et dans son usage depuis cette publication. Mais, outre l'identité qui subsiste toujours dans les procédés qui servent à l'établissement, à la rectification et à l'emploi de ces instruments, il en existe encore beaucoup qui sont construits comme autrefois, et qui ont servi à des opérations importantes pour l'intelligence desquelles leur connaissance est nécessaire. Je me suis donc borné à compléter cet ancien exposé par l'insertion du travail que j'ai fait en 1825 pour la révision de la latitude de Formentera, avec un nouveau cercle répétiteur de M. Gambey,

auquel j'ai appliqué un procédé d'observation tel, qu'étant pour le moins aussi facile, ou même plus facile que celui dont on se servait jusqu'alors, il atténue les erreurs variables de ces instruments au point de donner à leurs résultats un degré de concordance qui n'est pas inférieur à celui que l'on obtient dans les observatoires fixes avec les instruments des plus grandes dimensions. Cette méthode, justifiée par le raisonnement comme par l'expérience, a déjà reçu l'approbation d'astronomes praticiens les plus distingués; et, en m'autorisant de leur opinion, je crois pouvoir dire qu'il se rait à désirer qu'on n'employât plus autrement le cercle répétiteur pour de semblables observations.

La fatigue que m'a causée la portion de ce volume qui a exigé spécialement une rédaction toute nouvelle, m'aurait mis hors d'état de le publier actuellement, si je n'avais reçu pour le reste de l'impression, les secours obligeants et éclairés d'un jeune et habile géomètre, M. Delaunay, que ses travaux propres et ses fonctions d'enseignement ont depuis longtemps familiarisé avec les études astronomiques. Après lui avoir remis cette dernière partie de mon manuscrit, je m'en suis entiè-

TABLE DES CHAPITRES

contenus dans ce troisième volume,

ET INDICATION DES PRINCIPAUX OBJETS QUI Y SONT TRAITÉS.

CHAPITRE XVI.

Pages.

De la sphère céleste et de ses cercles principaux..... 1

Caractère idéal de cette conception, et ses usages pour spécifier les positions relatives apparentes des astres. Dénominations spéciales attachées à ses principales sections circulaires. Définition de la *déclinaison*, de l'*ascension droite* et des *arcs de distance* des étoiles entre elles. Formation des catalogues d'étoiles. Ce qu'on entend par l'*intervalle équatorial des fils* d'un instrument de passages. Manière de le déterminer par observation. Application à la machine parallatique. Altérations opérées par la réfraction atmosphérique dans la circularité des disques apparents des astres. 1- 20

Note sur les grandeurs des demi-diamètres apparents des astres, évalués suivant des directions quelconques relativement au plan de l'horizon. Les disques circulaires sont transformés par la réfraction atmosphérique en disques elliptiques dont le grand axe est horizontal, le petit vertical, et les proportions variables avec l'élévation apparente de l'astre sur l'horizon..... 20- 30

CHAPITRE XVII.

Des pôles et de l'équateur de la terre..... 31

Définition générale des méridiens et des parallèles terrestres. Aspects divers de la sphère terrestre sur les horizons des différents lieux. Analogies de conception établies entre les cercles célestes et terrestres. Latitudes et longitudes géographiques. Les observations de tous les siècles s'accordent à montrer que la hauteur apparente des pôles célestes sur l'horizon de chaque lieu est sensiblement constante, et que l'axe de rotation diurne de la terre perce toujours sa surface dans les mêmes points physiques..... 31- 38

CHAPITRE XVIII.

Détermination exacte de la figure de la terre. Mesure exacte de ses dimensions et de sa grandeur..... 39

Section I, page 39. — Mensuration immédiate d'une portion locale

Pa

de la surface terrestre corrigée de ses inégalités accidentelles. La forme générale du sphéroïde terrestre, ainsi considérée, diffère très-peu d'une sphère exacte et s'assimile sur de petites étendues avec les sphères qui lui sont localement osculatrices. On peut, en chaque lieu, concevoir une infinité de sphères douées de la propriété d'osculation en différents sens. Leurs centres sont tous placés sur la normale locale, dans un espace très-petit comparativement à la longueur de leurs rayons. Avantages propres attachés à celle de ces sphères qui est décrite avec le plus grand rayon osculateur local. Tracé direct d'une petite portion d'arc méridien, considéré comme commun au sphéroïde et à la sphère osculatrice dans ce sens, en supposant l'opération effectuée sur un terrain découvert, dont la surface est partout presque horizontale. Procédés de tracé et de mensuration pour un tel cas. Réduction de l'arc méridien ainsi obtenu, à la longueur qu'il aurait entre les mêmes normales extrêmes, s'il eût été mesuré sur une sphère de niveau avec le prolongement des mers environnantes. Détails d'une opération pareille effectuée en 1768 sur le bord de la mer Atlantique, dans les États de Pensylvanie et de Maryland. Résultats immédiats qui s'en déduisent. Longueur en toises du rayon de la sphère localement osculatrice et par suite du rayon de la terre considérée approximativement comme une sphère exacte. 39

Discussion des diverses particularités de l'opération, et appréciation de la précision des procédés employés pour l'effectuer. Séries trigonométriques nécessaires pour ce genre de calculs. Conditions de leur bon usage..... 60

Emploi de ces formules pour projeter sur un même méridien les arcs terrestres mesurés dans des directions obliques entre les mêmes parallèles extrêmes. Évaluation de l'arc compris sur ce méridien, entre le parallèle et l'arc perpendiculaire menés d'une station située hors de son plan. Formule générale qui ex-

Pages.

chaque station entre les plans verticaux qui les contiennent. Formules pour cette réduction appelée la *réduction à l'horizon*. Exemption de ce calcul par l'emploi du théodolite; avantages et inconvénients de cet instrument..... 91-99

Transport des angles ainsi mesurés autour des normales, aux triangles formés sur les sphères osculatrices successives. Restrictions nécessaires pour légitimer ce transport..... 99-106

Relations trigonométriques existantes entre les côtés et les angles de chaque triangle ainsi formé. Formules pour résoudre numériquement un tel triangle, avec toute l'approximation appréciable dans les mesures géodésiques : 1° par des développements logarithmiques n'exigeant qu'un seul terme correctif; 2° par l'emploi de l'excès sphérique qui ramène le problème à la trigonométrie rectiligne. Identité du degré d'approximation donné par ces deux méthodes..... 106-122

NOTE sur la réduction à l'horizon des angles observés dans des plans obliques..... 123-126

SECTION III.—Mensuration par une triangulation continue. Réseaux de triangles sphériques établis consécutivement sur la surface terrestre, dans le sens d'un même méridien. Calcul de l'arc méridien qui les traverse..... 127

Conditions géométriques de connexion existantes entre les triangles partiels qui composent un pareil réseau. Elles sont rigoureuses sur une sphère exacte, ou sur une portion sphéroïdale assez restreinte pour pouvoir être embrassée par une même sphère osculatrice. Mais lorsqu'on passe d'une sphère osculatrice à une autre, il y a entre les triangles consécutifs une discontiguïté inévitable, dont on rend seulement les effets insensibles dans les opérations géodésiques, en faisant tous les triangles individuellement très-petits comparativement à la face du sphéroïde total. 127-132

Mensuration directe d'un ou plusieurs côtés des triangles pour servir de *bases* à l'évaluation de la longueur de tous les autres. Réduction de ces bases au niveau moyen de la surface régulière formée par le prolongement des mers environnantes..... 132-135

Calcul successif des côtés de tous les triangles principaux, en les dérivant tous d'une même base mesurée directement, ou de plusieurs bases qui se vérifient les unes par les autres en les considérant comme placées sur autant de sphères osculatrices consécutives de rayons donnés. Évaluations des portions d'arcs d'un même méridien interceptées entre ces triangles. Détermination astronomique de la direction azimutale du premier côté de la chaîne ainsi que de la distance du pôle au zénith à la première station. Déduction de tous les azimuts des côtés suivants et des distances du pôle au zénith à tous leurs sommets 135-140

Pages.

Opérations spéciales à effectuer à la dernière station de la chaîne entière. Détermination astronomique de l'azimut du dernier côté sur son méridien propre, et de la distance du pôle au zénith à la dernière station. Comparaison du dernier azimut observé avec sa valeur déduite. Formule rigoureuse pour effectuer cette comparaison, et résultats qu'elle a présentés sur les opérations géodésiques effectuées jusqu'ici 140-154

Détermination du point du méridien général qui se trouve sur le parallèle de la dernière station. Formules pour calculer directement l'arc de méridien compris entre ce parallèle et le dernier point d'intersection de la chaîne des triangles avec la ligne méridienne générale. Évaluation de la longueur totale de l'arc méridien compris entre les parallèles des stations extrêmes, et détermination des azimuts de tous les côtés de la chaîne des triangles observés. Réunion de toutes ces méthodes en formules générales. 155-167

Application des mêmes procédés à la mesure des arcs de parallèles. 167-169

Manière directe de trouver la longueur totale d'un arc de méridien ou de parallèle sans calculer les portions successives de ces arcs interceptées entre les triangles principaux 169-175

Confirmation de l'exactitude de ces méthodes par l'application numérique 175-178

Section IV. — Preuves de la non-sphéricité de la terre. Sa forme s'assimile à celle d'un ellipsoïde de révolution légèrement renflé à l'équateur et aplati aux pôles de rotation 178

Tableau des arcs partiellement mesurés sur le méridien de Paris entre les parallèles de Greenwich et de Formentera dans une amplitude astronomique totale de 12°48′46″,83. Manifestation d'un accroissement continu de la longueur des degrés en procédant de l'équateur vers les pôles. Méthode mathématique pour ramener tous ces résultats à une valeur moyenne propre à un parallèle intermédiaire en compensant leurs irrégularités accidentelles ou

Pages.

assignée. Expression de la longueur du degré partiel du méridien propre à une latitude quelconque en fonction de ces éléments... 182-198

Formules analytiques pour déterminer l'excentricité de l'ellipsoïde et de la grandeur de ses axes, en combinant les mesures de deux degrés du méridien mesurés à des latitudes distantes..... 198-203

Application numérique de ces formules à la combinaison du degré moyen de France et d'Espagne avec le degré du Pérou. Valeurs qui en résultent pour l'excentricité, l'aplatissement et les longueurs des axes, ainsi que des degrés tant à l'équateur qu'au pôle exprimés en toises. Vérification de ces résultats par leur emploi pour reproduire les degrés mesurés, dans l'Inde, en Angleterre et en Laponie. Les différences entre les longueurs calculées et observées tombent dans les limites d'erreur que les opérations pratiques comportent..... 203-214

Autre application des mêmes formules en combinant directement le degré moyen de France et d'Espagne avec le degré de Laponie. Les éléments obtenus ainsi pour l'ellipsoïde ne diffèrent des précédents que par des quantités dont on ne peut répondre dans les observations pratiques, de sorte que leurs moyennes représentent le sphéroïde terrestre dans ce qu'il a de régulier..... 214-217

Emploi de ces éléments généraux pour manifester dans la forme générale du sphéroïde terrestre des inégalités locales indubitables. Premier exemple : application à l'arc du méridien de France et d'Espagne qui répond à la latitude d'Évaux. Deuxième exemple encore plus frappant : application à l'arc du méridien compris entre les stations d'Andrate et de Mondovi dans le voisinage de Turin. Ces inégalités se produisent surtout en Europe vers le 45e degré parallèle, sur lequel les longueurs du pendule s'écartent aussi le plus de la constance qu'elles devraient avoir sur un ellipsoïde de révolution régulièrement constitué..... 217-220

Éléments généraux de l'ellipsoïde terrestre, déduits d'une moyenne entre les résultats obtenus par la combinaison des degrés du Pérou, de France et de Laponie..... 221-222

Note sur la développée de l'ellipse et sur ses rayons osculateurs. On y démontre cette proposition importante, employée plus haut dans les raisonnements. En vertu du peu d'aplatissement de l'ellipsoïde, l'angle compris entre les normales menées aux extrémités d'un arc méridien de peu d'étendue, est sensiblement égal à l'angle compris entre les sécantes menées des mêmes points au centre de la sphère qui est osculatrice dans le sens du méridien au milieu de l'arc..... 223-233

Section V. — Des corrections nécessitées dans le calcul des opérations géodésiques par la faible ellipticité du sphéroïde terrestre. 234

Dans l'évaluation des longueurs des arcs géodésiques soit de méri-

Pa

dien, soit de parallèle, ces corrections se réduisent à employer pour rayon sphérique local, celui de la sphère qui est osculatrice dans le sens perpendiculaire au méridien dans le lieu où chaque triangle est établi. Les distances du pôle au zénith, transportées par le calcul d'un point à un autre d'une même sphère osculatrice, se ramènent en ce dernier point à la normale vraie de l'ellipsoïde, au moyen d'une petite correction analytique dont on donne l'expression générale. Les azimuts dérivés par le calcul sur chaque sphère osculatrice transversale, dans l'étendue restreinte que l'on donne aux triangles géodésiques, peuvent être appliqués à l'ellipsoïde sans avoir besoin d'aucune réduction appréciable. Résumé des formules ainsi modifiées, dans leur application aux arcs de méridiens et de parallèles..... 234-

Application numérique de ces formules à la mesure de l'arc compris sur le 45e parallèle entre Bordeaux et Fiume en Istrie, sur une amplitude géodésique totale de 15° 32′ 26″,760. Appréciation des incertitudes inévitablement introduites dans les résultats de ces opérations. Évaluation de l'amplitude astronomique obtenue en temps par les observations de signaux de feu instantané. 254-

Combinaison des mesures d'arcs méridiens avec les arcs de parallèles, pour déterminer les éléments de l'ellipsoïde localement osculateur en un point donné du sphéroïde terrestre. Application de cette méthode à la recherche de cet ellipsoïde pour le point moyen de l'arc méridien de France et d'Espagne, où la distance du pôle au zénith est 43° 51′ 54″. L'aplatissement de cet ellipsoïde est beaucoup plus fort que celui de l'ellipsoïde général..... 262-

Des lignes de plus courte distance appelées *lignes géodésiques*. Leurs caractères et leur tracé sur un sphéroïde quelconque..... 269-

Recherche de cette ligne sur l'ellipsoïde terrestre pour le cas particulier où son premier élément doit être perpendiculaire à un méridien connu. On l'appelle alors la *perpendiculaire à la méridienne* qui passe par son origine. Combinaison de ces lignes avec les

Pages.

sphères osculatrices à l'ellipsoïde terrestre, et la surface de ce sphéroïde, à mesure qu'on s'éloigne du point d'osculation. Il n'en peut résulter aucune erreur appréciable dans les résultats des calculs géodésiques, lorsqu'on restreint l'emploi local de ces sphères autant qu'on le fait habituellement. 287-289

NOTE II. Sur la rectification générale de l'ellipse ; séries qui expriment analytiquement la longueur d'un arc méridien comptée depuis le pôle jusqu'à une distance polaire quelconque, et la portion de cet arc comprise entre deux distances polaires assignées, lorsque les éléments de l'ellipsoïde sont connus. 290-292

SECTION VI. — Sur les grands nivellements géodésiques.. 293

Détermination directe de la hauteur absolue d'une station au-dessus de la mer la plus proche, au moyen d'un nivellement matériellement effectué. Détermination successive des différences de niveau de cette station aux suivantes, et de celles-ci entre elles, par le procédé des distances zénithales réciproques, sur un ellipsoïde de révolution dont les éléments sont donnés conventionnellement. 293-294

Application théorique et numérique des formules de réfraction exposées dans le tome Ier, pour calculer les différences de niveau par les observations de distances zénithales réciproques simultanées ou non simultanées. Expressions générales de ces différences. Les restrictions nécessairement imposées aux amplitudes des arcs qui séparent les stations géodésiques, permettent toujours d'effectuer les calculs en prenant pour rayon sphérique le rayon osculateur moyen et constant qui est représenté par le demi-grand axe de l'ellipsoïde sur lequel le nivellement est opéré. . . . 294-320

Examen du cas particulier où l'on détermine la hauteur absolue d'une station, d'après la dépression observée de l'horizon de la mer. Incertitude inévitable de ce mode d'évaluation. 320

Discussion de quelques points de théorie relatifs aux calculs des réfractions atmosphériques. 320-324

Justification des éléments atmosphériques sur lesquels repose le calcul des différences de niveau dans les cas proposés ci-dessus comme exemples. Observations qu'il serait utile de faire pour compléter la connaissance théorique de l'atmosphère terrestre. . 324-333

SECTION VII.— Application des éléments de l'ellipsoïde terrestre à la détermination du mètre théorique, considéré comme la dix-millionième partie du quart du méridien. 334

Considérations qui ont présidé à la détermination du mètre légal. Évaluation du mètre théorique d'après les éléments de l'ellipsoïde terrestre, obtenus en combinant l'arc moyen de France et d'Espagne, d'abord avec celui du Pérou, puis avec celui de Laponie. Ces deux résultats, à peine différents entre eux, donnent le mètre

Pa

théorique moindre que le mètre légal de $\frac{44}{1000}$ de ligne. Autre détermination où l'arc de France et d'Espagne acquiert une influence presque exclusive par son application locale autour du 45e parallèle. Elle conduit à un résultat de même sens et un peu plus fort, mais il est plus affecté par les irrégularités locales de l'arc. La conséquence générale de cette discussion est qu'on ne peut pas aujourd'hui répondre de $\frac{1}{100}$ de ligne sur l'évaluation du mètre théorique, considéré comme la dix-millionième partie du quart du méridien. 334-

Note sur le calcul de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Montjouy et de Formentera; par M. Largeteau. . . . . .

Transport de ce calcul sur un méridien qui traverse l'ensemble de la triangulation. Évaluation successive des portions de l'arc méridien, interceptées entre les triangles, au moyen de deux combinaisons géométriques auxiliaires dont les résultats concordent. Retour au méridien de Formentera, et tableaux numériques rassemblant tous les résultats obtenus. 344-

Addition. Sur quelques précautions qu'il faut prendre pour effectuer avec sûreté et simplicité les calculs numériques dans les applications de géodésie et d'astronomie, où ils se répètent, sous des formes analogues, pour une longue suite d'opérations. . . . 351-

CHAPITRE XIX.

Manière de fixer les positions relatives des différents points de la surface terrestre. . . . . .

Représentation graphique par des cartes bornées à des étendues restreintes, au moyen de coordonnées rectangles prises sur la méridienne et la perpendiculaire. Avantages et inconvénients de ce choix des coordonnées. Fixation plus étendue des positions relatives des lieux au moyen de coordonnées angulaires fournies par les observations astronomiques. Emploi des *latitudes* et *lon-*

Pages.

temps au moyen d'un grand nombre de chronomètres, constamment comparés entre eux et au ciel. Calcul des arcs de plus courte distance entre deux points de la surface terrestre dont on connaît les latitudes et les longitudes. Représentations graphiques de la surface terrestre sur des globes ou sur des plans. Indication des principes et des modes de projection sur lesquels sont construites les cartes géographiques les plus usitées..... 359-379

CHAPITRE XX.

Examen des conséquences physiques qui résultent de l'universalité du mouvement diurne. Il ne s'ensuit pas nécessairement que ce mouvement doive être en réalité attribué aux astres plutôt qu'à la terre; et toutes les analogies rendent la dernière supposition infiniment la plus vraisemblable..... 380-386

CHAPITRE XXI.

Conséquences physiques de l'aplatissement de la terre. Sa connexité avec l'inégalité de longueur du pendule à secondes sur différents parallèles..... 387

L'inégalité des longueurs du pendule et l'aplatissement de la surface terrestre sont liés à la constitution intérieure du sphéroïde et à son mouvement de rotation propre, comme ayant leur cause commune dans la pesanteur qui sollicite toutes les parties de la masse terrestre, considérée tant dans son état de solidité actuel que dans un état antérieur de fluidité. Mais la relation de quantité entre les deux phénomènes n'est pas déterminable numériquement, parce que l'aplatissement actuel est propre à la seule configuration externe du sphéroïde, tandis que les longueurs du pendule sont déterminées par les attractions des parties de sa masse, situées tant à sa surface que dans son intérieur..... 387-395

CHAPITRE XXII.

Des parallaxes..... 396

On appelle généralement *parallaxes* les réductions qu'il faut faire subir aux éléments astronomiques observés à la surface de la terre, pour les avoir tels qu'ils seraient étant observés de son centre. On distingue ainsi les *parallaxes de hauteur*, d'*ascension droite*, de *déclinaison*. Formules générales qui donnent leurs valeurs dans la supposition de la terre sphérique. Corrections que ces valeurs exigent pour être appliquées à un ellipsoïde de révolution. 396-421

CHAPITRE XXIII.

Description et usages du cercle répétiteur..... 422

Exposition détaillée de cet instrument. Principe de la répétition.

Pages.

Distinction des genres d'erreurs qu'il peut détruire et de celles qu'il laisse subsister. Détail des rectifications qu'il exige, et manière de les effectuer. 422-435

Application à la mesure des distances zénithales absolues des astres prises hors du méridien pour connaître leur angle horaire actuel. Usage de ce procédé pour déterminer l'heure par les observations des étoiles ou du soleil dans un lieu dont la latitude géographique est connue. 436-442

Application à la mesure des distances zénithales des astres près du méridien pour déterminer les latitudes géographiques. 442-451

Emploi du cercle répétiteur pour mesurer les angles de position compris entre des objets fixes, comme les signaux des triangles géodésiques. 451-456

Extension de ce procédé pour mesurer les distances angulaires des astres entre eux ou à des objets fixes. Détermination des azimuts par ce genre d'observation. 456-462

Examen de quelques causes d'erreur accidentelles ou constantes dont les cercles répétiteurs peuvent être affectés et que la répétition ne détruit point. 463-468

Détails sur les niveaux adaptés aux cercles répétiteurs. 468-481

Note Ire. Exemple d'un calcul du temps sidéral actuel, d'après une hauteur absolue d'étoile observée hors du méridien avec le cercle répétiteur, dans un lieu dont on connaît la latitude géographique. 482-484

Note II. Exemple du calcul de la latitude géographique d'un lieu d'après une série de distances zénithales de l'étoile polaire, observée près du méridien avec le cercle répétiteur. 484-487

Addition. Mémoire sur la latitude de l'extrémité australe de l'arc de France et d'Espagne, mesurée de nouveau avec le cercle répétiteur en 1825. 488

Nécessité de cette révision occasionnée par la découverte des erreurs constantes que comportent les cercles répétiteurs, et par suite

Pages.

résultats un degré de précision égal à celui que l'on obtient avec les plus grands instruments fixes. Preuves de ce fait tirées de la concordance des séries d'une même étoile ainsi observées à différents jours; les écarts de 1″ autour de leur moyenne y deviennent des accidents très-rares. Évaluation de l'erreur constante de l'instrument dans les nouvelles observations faites à Formentera, et appréciation de la petite erreur de l'ancienne latitude déterminée par des observations faites seulement au nord du zénith. Discussion de ce genre d'erreur, de son sens et de son amplitude dans divers cercles répétiteurs employés par des astronomes très-habiles. Elle paraît s'atténuer considérablement par le nouveau mode d'observation; elle paraît aussi s'anéantir par compensation, même dans les séries faites d'un seul côté du zénith, lorsque l'étoile est observée alternativement par vision directe et par réflexion sur un horizon de mercure. Le nouveau procédé est également applicable à ce genre d'observation, et y conserve ses mêmes avantages. Tableaux numériques comprenant les résultats détaillés de quatre-vingt-six séries effectuées tant au nord qu'au sud du zénith, et tant de nuit que de jour par ce procédé.. 488

Note sur l'application de la formule donnée page 447 pour réduire u méridien les distances zénithales observées à peu de distance de ce plan..... 523-524

Table générale de réduction au méridien pour les observations faites au cercle répétiteur..... 525

FIN DE LA TABLE DU TROISIÈME VOLUME.

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ASTRONOMIE PHYSIQUE.

CHAPITRE XVI.

De la sphère céleste et de ses cercles principaux.

1. Les questions concernant les positions optiques des corps célestes, que nous avons traitées dans les chapitres précédents, se sont trouvées dépendre de la résolution des triangles sphériques. Il en sera ainsi de toutes celles que nous devrons résoudre pour déterminer les mouvements apparents, soit propres, soit relatifs, de ces corps, considérés indépendamment de leur éloignement absolu; car alors elles auront toujours pour objet les positions ou les grandeurs des angles compris entre les rayons visuels menés de notre œil aux différents points du ciel où ils semblent projetés. Si, autour de chaque observateur considéré comme centre des mouvements célestes, on conçoit une sphère d'un rayon quelconque, dont la surface coupera perpendiculairement tous les rayons visuels menés aux différents astres, ou aux divers points d'un même astre, les points d'intersection de ces rayons, étant unis par des arcs de grands cercles, détermineront sur la sphère des triangles sphériques. Les parties constituantes de ces triangles étant calculées et liées les unes aux autres par les rapports connus qui constituent la trigonométrie sphérique, donneront les rapports de position optique qui existent entre les points comparés.

2. Peu importe à quelle distance les rayons visuels sont coupés par cette sphère; les mêmes rapports de position et de grandeur subsistent entre eux. On peut donc, sans difficulté, la sup-

poser décrite d'un rayon immense, qui s'étendra au delà de tous les astres, et les attacher, par la pensée, sur la direction de leurs rayons lumineux, à la surface concave de cette même sphère, au centre de laquelle nous nous trouvons; cette construction forme ce que les astronomes appellent la *sphère céleste*.

Chaque observateur étant placé au centre de sa sphère, il y a autant de ces centres et de ces sphères qu'il y a de points sur la surface terrestre; et les situations apparentes des astres, c'est-à-dire les points de la sphère céleste auxquels on les rapporte, doivent être différents pour chaque observateur. Cela se vérifie, en effet, pour la plupart des astres doués de mouvements propres. Mais, pour les étoiles fixes dont nous devons d'abord nous occuper spécialement, comme tous les rayons visuels qui leur sont menés au même instant, de tous les points de la terre, peuvent être censés parallèles, il s'ensuit que chaque observateur les projette sur sa propre sphère, en des points exactement correspondants. Ou, ce qui revient au même, si l'on donne à cette sphère un rayon si grand que le diamètre de la terre, par rapport à ce rayon, puisse être considéré comme insensible, et la terre considérée comme un point, il n'y aura plus qu'une seule sphère céleste pour tous les observateurs; et les rayons visuels menés de leurs yeux à une même étoile infiniment éloignée devront être considérés comme aboutissant aux mêmes points de sa surface. Mais si ces rayons visuels, étant dirigés à un astre plus rapproché, font entre eux un angle sensible, ils aboutiront sur la sphère commune, à des points différents.

3. Au reste, n'oublions pas que cette forme sphérique que

dans les apparences phénoménales, celles qu'on y peut rapporter comme universelles, et celles dont l'énoncé doit être modifié ou restreint, en raison des circonstances de localité propres au point de la surface terrestre où se fait l'observation.

4. Ainsi, on placera, sur un diamètre de cette sphère, l'axe du mouvement diurne du ciel, et ses deux pôles de rotation. On tracera idéalement sur sa surface *des grands cercles* dont le plan passera par cet axe, et qui seront les *plans horaires des astres*. On y décrira, autour des pôles, *des petits cercles* ayant chacun un arc constant de distance polaire, et dont le plan sera normal à l'axe de rotation. Ce seront les *parallèles célestes* que les étoiles décrivent. La terre n'étant qu'un point placé au centre de la sphère infinie, ces diverses constructions seront vues sous un aspect identique par tous les observateurs répartis sur sa surface. Seulement, à cause de sa convexité, elles se présenteront, au même instant physique, dans des situations diverses relativement aux coordonnées verticales et horizontales de chaque lieu. En effet, ces coordonnées, quoique partant de points physiques distincts, s'assimileront, dans leurs intersections sur la sphère infinie, à autant de rayons partis du centre; mais elles s'y distingueront les unes des autres par leurs directions diverses, lesquelles dépendent, pour chaque point de la surface terrestre, de la direction absolue du plan tangent local qui les contient ou qui leur est perpendiculaire. Par exemple, deux lieux dont les verticales propres seraient coïncidentes en direction, ou seulement parallèles entre elles, auront aussi leurs plans horizontaux parallèles entre eux; de sorte que ces plans couperont la sphère céleste suivant un même grand cercle, comme s'ils se confondaient en un plan unique, mené par son centre, suivant cette commune direction. Alors ces deux lieux verront simultanément les mêmes étoiles paraître ou disparaître dans leurs horizons propres. Si les verticales sont seulement parallèles à un même plan central contenant l'axe de rotation de la sphère céleste, tous les lieux de la surface terrestre qui satisferont à cette condition auront leurs méridiens propres parallèles à ce plan, et chaque étoile les traversera tous au même instant physique, quoiqu'elle puisse être alors visible pour un de ces lieux et invisible pour un autre, à cause de

l'opacité de la masse terrestre, selon que le passage s'opérera au-dessus ou au-dessous de leur horizon propre. Tous les lieux dont les normales ont cette corrélation sont dits être sous le *même méridien céleste;* les plans horaires dans lesquels chaque étoile s'y trouve à un même instant physique sont parallèles entre eux.

5. Généralement, tous les plans menés par l'œil de l'observateur terrestre seront des plans diamétraux de la sphère universelle; tous les angles visuels qu'on y observera auront donc leur mesure sur les arcs de grands cercles résultant de l'intersection de cette sphère par les plans qui les contiennent, et leur grandeur sera exprimée par la portion d'arc interceptée entre les rayons visuels qui les limitent. On conçoit ainsi tous les cercles de la sphère céleste divisés en degrés, minutes et secondes, et l'on exprime les mesures des angles visuels au moyen de ces divisions. Par exemple, lorsque deux étoiles, comprises dans un même plan horaire, traversent simultanément le méridien terrestre d'un certain lieu, si les rayons visuels menés à l'une et à l'autre comprennent entre eux un angle de dix degrés, on dira qu'elles se trouvent à dix degrés de *distance angulaire,* ou, par abréviation, à 10° *de distance* l'une de l'autre. On définit de même tous les angles visuels par les arcs de distance interceptés.

6. Les arcs que le mouvement diurne fait décrire aux étoiles sur leurs parallèles propres s'expriment aussi de la même manière, en parties de la graduation de ces cercles. Mais ces énoncés ne sont pas immédiatement comparables entre eux ni à ceux des angles

est parallèle à une des arêtes d'un même cône ainsi décrit, sont dits être *sous le même parallèle céleste.*

7. Maintenant, considérant en particulier un point donné de la terre, fixons, par des caractères géométriques relatifs à ses coordonnées locales propres, les positions apparentes des différents cercles célestes que nous venons d'imaginer.

La position de l'équateur céleste se définit par sa *trace* sur le plan de l'horizon et par sa *hauteur,* c'est-à-dire par l'angle dièdre qu'il forme avec le plan horizontal, cet angle étant mesuré du côté de ce plan où il est moindre qu'un quadrant.

Par le centre C de la sphère céleste, *fig.* 1, menez trois droites rectangulaires indéfinies CZ, CM, CH, respectivement parallèles aux trois droites OZ′, OM′, OH′ qui désignent la verticale, la méridienne et la perpendiculaire du lieu considéré. Les plans ZCM, MCH, ZCH représenteront respectivement le méridien, l'horizon et le premier vertical de ce lieu, transportés parallèlement à eux-mêmes, au centre de la sphère céleste, en conservant leurs relations de rectangularité. Dans le plan ZCM menez l'axe de rotation CP : le plan de l'équateur passe par le centre C et est perpendiculaire à cet axe ; il le sera donc aussi au plan ZCM, et contiendra la droite CH qui lui est normale ; de sorte qu'elle représentera sa trace sur le plan MCH. Maintenant, à cause de la petitesse infinie de la terre comparativement à la sphère céleste, toutes les relations angulaires qui ont lieu en C se reproduiront en O entre les droites parallèles ; conséquemment :

La trace de l'équateur céleste sur l'horizon de chaque lieu sera la droite horizontale OH′ *menée perpendiculairement à la méridienne locale ; c'est celle que nous avons nommée spécialement la perpendiculaire.*

La hauteur de l'équateur sur l'horizon local, ou l'angle Q′OM′, *est égal à la distance angulaire* P′OZ′ *du pôle au zénith.* Car l'axe polaire universel OP′ étant normal au plan de l'équateur, il est perpendiculaire à sa trace OQ′ dans le plan méridien. Or, la verticale locale OZ′, située, comme OP′, dans ce dernier plan, est perpendiculaire à la méridienne locale OM′. Ainsi la distance polaire P′OZ′ et la hauteur angulaire Q′OM′ sont toutes deux égales, comme com-

pléments d'un même angle Q'OZ'. Celui-ci s'appelle la *latitude géographique du lieu considéré*. Par une raison semblable, cette *latitude est égale à la hauteur angulaire* P'ON' du pôle, comptée du côté du zénith opposé à la trace de l'équateur. Tout évidentes que soient ces relations, comme leur emploi se représente continuellement, il était nécessaire d'en fixer les énoncés.

8. La position des divers parallèles célestes au-dessus de l'horizon de chaque lieu s'y définit d'après la distance zénithale méridienne des étoiles qui les décrivent, distance que nous avons appris à déterminer par observation. Elle peut se calculer d'après la distance polaire du parallèle, en portant cette distance de part et d'autre du pôle visible, dans le plan du méridien local.

9. Les degrés, minutes et secondes des parallèles célestes n'ayant pas des valeurs absolues comme les degrés des grands cercles, il faut, pour les rendre comparables entre eux et à ceux-ci, associer à leurs expressions un élément déterminatif, qui est la grandeur relative du rayon de ce parallèle comparé au demi-diamètre de la sphère; mais, avec cette spécification, il est facile de convertir les arcs de parallèles en arcs de grands cercles, et inversement.

En effet, pour découvrir ces rapports, transportons le centre de la sphère céleste au point O, *fig.* 2, supposé le centre local des observations. Traçons, dans le plan de la figure, le grand cercle PSQP' du méridien local, c'est-à-dire celui suivant lequel le plan de ce méridien coupe la sphère céleste. Soit QEQ' le grand cercle de l'équateur céleste ayant, comme le précédent, son centre au point O,

parallèle. Cela donne le moyen d'opérer cette conversion réciproque pour des nombres quelconques de degrés des deux cercles, lorsque le rapport de leurs rayons est connu.

Or, il l'est lorsqu'on donne l'angle au centre SOP ou d, qui marque, dans le méridien, la distance angulaire du parallèle au pôle; car SO′ étant perpendiculaire à OP, et SO étant égal à QO, comme rayons d'un même cercle, le rapport $\frac{SO'}{QO}$ ou $\frac{SO'}{SO}$ est ce qu'on appelle en trigonométrie le sinus de l'angle POS. De là résulte la règle suivante :

Pour convertir un nombre de degrés, minutes et secondes d'un parallèle en degrés, minutes et secondes de l'équateur, il faut multiplier le nombre donné par le sinus de la distance polaire du parallèle.

Réciproquement, *pour convertir des degrés, minutes et secondes de l'équateur en subdivisions analogues du parallèle, il faut les diviser par le sinus de la distance polaire où l'on veut les transporter.*

La première opération affaiblit le nombre donné, la seconde l'agrandit, puisque le sinus d'un angle est toujours une fraction de l'unité. Supposons la distance polaire du parallèle égale à 30 degrés sexagésimaux; le sinus de 30° est $\frac{1}{2}$; conséquemment 20° de ce parallèle équivaudront, *en longueur*, à 10° de l'équateur, et 10° de l'équateur à 20° du parallèle.

10. On a un exemple de ces équivalences, et un exemple pour ainsi dire physique, dans l'inégalité des temps que les différentes étoiles emploient à traverser les fils du réticule de l'instrument des passages, selon les parallèles célestes où elles sont placées. Celles qui sont près de l'équateur vont plus vite, celles qui sont près du pôle vont plus lentement, et généralement la durée de leur passage paraît presque exactement réciproque au sinus de leur distance polaire. On le voit par le tableau suivant, qui présente les intervalles de temps employés, en 1810, par diverses étoiles inégalement distantes du pôle, pour traverser deux mêmes fils verticaux d'un instrument de passage dont le fil central était dirigé dans le méridien, à l'Observatoire de Paris.

NOMS DES ASTRES.	DISTANCE au pôle boréal.	DURÉE du passage entre deux fils observée.	PRODUIT de la durée du passage par le sinus de la distance polaire.
Polaire.....	1°42′20″	581s80	17s32
La Chèvre.....	44.12.36	24,90	17,37
β de la Vierge.....	87. 9.52	17,40	17,37
Rigel.....	98.25.50	17,35	17,36
Antarès.....	115.59.50	19,35	17,39
	Résultat moyen.....		17,36

Les trois premières colonnes renferment, pour chaque étoile, les résultats de l'observation. En multipliant la durée du passage par le sinus de la distance polaire, on obtient les nombres contenus dans la dernière colonne, et leur égalité presque exacte montre bien que la proportion dont il s'agit est au moins très-approchée de la vérité. Si l'on consent à négliger les petits écarts qu'on y découvre, en les attribuant aux erreurs des observations, la moyenne de ces nombres représentera la durée du passage d'une étoile qui serait située dans le plan de l'équateur. C'est ce qu'on nomme l'*intervalle équatorial des fils*.

Pour rendre raison de ces résultats, considérons, *fig.* 3, deux fils réticulaires F*f*, F′*f*′, placés exactement dans le plan focal du

angle visuel HCH′, qui pourra être évalué par des expériences que nous avons décrites tome I, pages 679 et suivantes; et cet angle conservera une grandeur constante, tant qu'il ne s'opérera aucun changement dans la position des points H, H′ autour de l'axe, non plus que dans la distance focale CM. L'oculaire que l'on adapte au delà du plan focal HMH′ n'y produit aucune altération; il amplifie seulement, pour l'œil, l'intervalle HH′, et fait ainsi apprécier la coïncidence des foyers des pinceaux sur les fils F*f*, F′*f*′, plus exactement qu'on ne le ferait à la vue simple. Ces conditions de constance étant supposées remplies, lorsqu'on dirige la lunette sur des parties quelconques de la sphère céleste, l'intervalle fixe HH′ y soutend toujours un angle visuel constant, dont le sommet C peut être censé placé au centre de cette sphère, de sorte qu'il a pour mesure un certain arc de grand cercle. Mais, comme cet arc est toujours fort petit, lorsqu'on le transporte, par le mouvement de la lunette, sur les parallèles des différents astres, il se confond sensiblement avec un petit arc de ces parallèles, et occupe, sur leur circonférence, un nombre de degrés, ou plutôt une très-petite fraction de degré, qui est presque exactement réciproque au sinus de leur distance polaire. Or, à cause du mouvement commun de la sphère céleste, il passe au méridien, dans un temps donné, un même nombre de degrés de tous les parallèles. L'étoile doit donc employer plus de temps pour traverser le fil horizontal de la lunette, à mesure que celui-ci occupe un plus grand nombre de divisions sur la circonférence du parallèle; et les durées des passages doivent être proportionnelles à l'étendue de la graduation que le fil superposé occupe, c'est-à-dire réciproques au sinus de la distance polaire.

Ce résultat n'a lieu ainsi que d'une manière approchée, et seulement lorsque les arcs de l'équateur et des parallèles que l'on superpose sont extrêmement petits. En effet, soit E l'angle visuel ou l'arc de l'équateur que l'on veut porter successivement sur divers parallèles. Soit Π l'arc qu'il devra occuper sur chacun d'eux, cet arc étant toujours exprimé en parties de leur propre graduation. Dans la réalité, ce ne sont pas les arcs E et Π qui coïncident, ce sont leurs cordes, et l'on ne peut substituer les unes aux autres que lorsque les arcs sont fort petits, comme dans les exemples de pas-

sages que nous avons rapportés (*). Il résulte encore de cette distinction que l'étoile, qui décrit l'arc de son parallèle, ne peut pas suivre rigoureusement le fil rectiligne qui en représente la corde. Si elle coïncide avec lui au commencement et à la fin de l'intervalle qu'il soutend, elle devra s'en écarter dans les positions intermé-

---

(*) Soient R le rayon de l'équateur de la sphère céleste, r celui du parallèle. La corde que soutend l'angle E sur le cercle équatorial est $2R \sin \frac{1}{2} E$; celle que l'angle Π soutend sur le contour du parallèle est $2r \sin \frac{1}{2} \Pi$. Puisque, dans leur superposition, ces cordes doivent être égales, l'expression de cette égalité sera

$$R . \sin \tfrac{1}{2} E = r . \sin \tfrac{1}{2} \Pi.$$

Soit d la distance polaire du parallèle, on aura

$$r = R \sin d;$$

en substituant cette valeur, et divisant tout par R, il vient

$$(1) \qquad \sin \tfrac{1}{2} E = \sin d . \sin \tfrac{1}{2} \Pi;$$

c'est la formule exacte, générale et rigoureuse. Mais, lorsque les angles E et Π sont fort petits, comme dans les exemples dont nous avons fait usage, le rapport $\frac{\sin \frac{1}{2} E}{\sin \frac{1}{2} \Pi}$ est, à fort peu près, le même que celui de $\frac{E}{\Pi}$. Ainsi, en substituant ce second rapport au premier dans l'équation précédente, elle devient

$$(2) \qquad E = \Pi . \sin d;$$

c'est celle que nous avons employée, mais elle n'est applicable qu'à de très-petits angles.

En l'admettant comme suffisamment exacte, nommons T l'intervalle de

diaires et paraître décrire une courbe dont la concavité sera tournée vers le fil. Cela devient sensible pour les étoiles très-voisines du pôle. Il y a aussi à considérer que, pendant la durée d'un passage ainsi observé, l'étoile se trouve à la fois hors du méridien et hors de l'axe optique physique de l'instrument, excepté à l'instant où elle traverse le fil central du réticule; mais je néglige pour le moment ces détails, qui seront discutés à la fin du présent Traité, dans une dissertation spéciale sur l'emploi de l'instrument des passages dans ses applications les plus rigoureuses.

Les astres doués d'un mouvement propre, comme le soleil, la lune et les planètes, offrent des variations analogues dans le temps que leur disque emploie à traverser le fil méridien, selon les différents parallèles où ils se trouvent. Mais, pour ces astres, outre la cause que nous venons de remarquer et qui est la principale, il existe d'autres particularités qui modifient les durées de leurs passages. La première, c'est que l'étendue apparente de leur disque change à diverses époques, par suite des variations de leur éloignement, et avec leur hauteur sur l'horizon; la seconde, c'est que leur mouvement propre, qui se combine avec celui de la sphère céleste, a aussi alors d'inégales vitesses.

---

l'équation (1), de sorte que les relations des arcs E, *d* et H sont indépendantes de la valeur de ce rayon. Cela était facile à prévoir, puisque toutes les sphères concentriques, que l'on peut ainsi décrire autour de l'observateur, ne changent point les valeurs absolues des angles; elles ne changent que celles de leurs sinus. Mais, comme ceux-ci croissent tous en même temps dans le même rapport, proportionnellement au rayon de la sphère, les relations de grandeur qui subsistent entre eux n'en sont nullement altérées: ils sont seulement rapportés à une unité différente. Ainsi, dans les équations qui expriment ces rapports, la valeur absolue du rayon de la sphère disparaîtra toujours. Quoique cette remarque soit très-simple, il m'a paru utile de la présenter, pour faire encore mieux comprendre, par cet exemple, que ce qu'on appelle la sphère céleste n'est qu'une conception géométrique propre à fixer le raisonnement, et qu'on ne doit y attacher aucune idée de réalité physique ni de grandeur absolue. Toutes les sphères concentriques à l'observateur peuvent être, pour lui, la sphère céleste; et, s'il en choisit une d'un rayon immense, c'est parce que les astres étant si distants de lui, comparativement à leurs dimensions propres, il ne peut, à la vue seule, juger de leur éloignement relatif, ses yeux les supposent également et infiniment éloignés.

11. Les distances au zénith et les azimuts nous ont offert, pour chaque lieu de la terre, un système de coordonnées angulaires auxquelles on peut rapporter la position de tous les astres; mais ce système a l'inconvénient d'être variable d'un pays à l'autre. Car, à cause de la rondeur de la terre, les plans de l'horizon et du méridien, auxquels se rapportent les hauteurs et les azimuts, prennent, dans l'espace, toutes les directions possibles, et par conséquent les positions des astres, ainsi exprimées, n'offrent rien de comparable. L'équateur et les plans horaires célestes nous offrent un système de coordonnées analogues, mais bien préférable, puisque étant pris immédiatement dans le ciel, il fournit, à tous les astronomes situés sur la surface terrestre, un moyen uniforme et comparable d'exprimer les résultats de leurs observations.

12. Pour déterminer ainsi la situation d'un astre quelconque sur la sphère céleste, il suffit de connaître le plan horaire, ou le cercle horaire sur lequel il se trouve, et sa position sur ce cercle ou dans ce plan. Tout se réduit donc à déterminer ces deux éléments.

La position de l'astre sur son cercle horaire est déterminée lorsque l'on connaît sa distance au pôle ou sa *distance à l'équateur*, qui en est le complément et que l'on nomme la *déclinaison;* c'est pourquoi on appelle souvent les cercles horaires *cercles de déclinaison*.

La position du plan horaire sur la sphère céleste se détermine d'après l'angle qu'il fait avec un plan horaire connu. Pour cela, on en choisit un à volonté, auquel on rapporte tous les autres; ce sera, par exemple, celui qui passe par une étoile que l'on aura désignée.

déclinaison, elle se compte depuis 0° jusqu'à un angle droit; on la dit *boréale* ou *australe*, suivant que l'astre auquel elle appartient est situé au nord ou au sud de l'équateur. L'emploi des distances polaires est bien préférable dans les raisonnements et même dans les formules analytiques, à cause de la continuité de sens de leur numération ; aussi en ferai-je plus habituellement usage.

13. Lorsque ces deux coordonnées, la *déclinaison* et l'*ascension droite*, sont connues, on peut trouver, par la trigonométrie sphérique, tous les rapports de position et de distance qui existent sur la sphère céleste entre les points auxquels elles se rapportent.

Par exemple, si l'on veut trouver l'*arc de distance* de deux étoiles, c'est-à-dire l'arc de la sphère céleste qui les unit, on tirera de leurs déclinaisons leurs distances à un même pôle. On prendra ensuite la différence de leurs ascensions droites; ce sera l'angle dièdre compris entre les plans horaires où elles se trouvent. Alors les deux distances polaires et l'arc de distance formeront, sur la sphère céleste, un triangle sphérique où l'on connaîtra deux côtés et l'angle compris. On pourra donc calculer le troisième côté ou l'arc de distance des deux étoiles (*). On pourrait, de la même manière, cal-

(*) Soient P la différence des ascensions droites des deux astres, ou l'angle au pôle compris entre leurs cercles de déclinaison; Δ', Δ'' leurs distances polaires respectives, et D l'arc de grand cercle qui mesure leur distance angulaire sur la sphère céleste. Si l'on considère le triangle sphérique formé par les trois côtés Δ', Δ'' et D, on y connaîtra Δ', Δ'' et l'angle compris P. Ainsi les règles de la trigonométrie sphérique, appliquées à ce cas, donneront

$$\cos D = \sin \Delta' \sin \Delta'' \cos P + \cos \Delta' \cos \Delta''.$$

En transportant ici le mode de transformation dont nous avons fait usage, pour une relation semblable, tome II, page 396, si l'on remplace cos D, cos P, puis $\cos(\Delta'' - \Delta')$ par leurs expressions équivalentes $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}D$, $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}P$, $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(\Delta'' - \Delta')$, on obtiendra cette expression, plus commode pour le calcul numérique :

$$\sin^2\tfrac{1}{2}D = \sin^2\tfrac{1}{2}(\Delta'' - \Delta') + \sin\Delta' \sin\Delta'' \sin^2\tfrac{1}{2}P.$$

Nous aurons plus loin l'occasion de reconnaître que le pôle change de position parmi les étoiles dans la suite des siècles, ce qui fait varier inégalement leurs distances polaires et leurs ascensions droites absolues ; mais nous constaterons aussi que ce mouvement appartient en réalité à l'axe de

culer l'arc de distance, d'après les distances au zénith et les azimuts. Le raisonnement est le même, le système seul des coordonnées est changé. Je reviendrai tout à l'heure sur cette opération, qui est nécessaire dans quelques circonstances.

14. Le point de l'équateur d'où les astronomes comptent les ascensions droites dépend du mouvement du soleil, ou plutôt de la position de cet astre à une époque déterminée ; car c'est au soleil, comme au régulateur naturel des jours, des années et des siècles, que les astronomes rapportent toutes leurs observations. Mais ce choix, purement arbitraire, ne change point les positions respectives des astres dans le ciel ; il n'influe ni sur leurs déclinaisons, ni sur leurs différences d'ascension droite ; il détermine seulement leur ascension droite absolue. Il ne doit donc apporter aucun changement aux lois des mouvements des astres qui se dé-

---

rotation de la terre, et que les étoiles ne le partagent point. Leurs distances relatives D, évaluées par la formule précédente, ne peuvent donc changer que par l'effet des mouvements individuels qui seraient propres aux étoiles elles-mêmes, et qui altéreraient leurs positions relatives. Le calcul de la distance D, réitéré pour des époques très-éloignées les unes des autres, avec les valeurs de Δ', Δ'' et P qu'on y a observées, offre ainsi un moyen direct pour constater l'existence et la mesure de ces variations. Malheureusement les observations anciennes, faites avant l'invention des instruments à lunettes et des horloges à pendule, sont trop inexactes pour qu'on puisse en faire des applications si minutieuses ; on peut seulement en conclure que les mouvements propres des étoiles doivent être fort petits, puisque les configurations des groupes dans lesquels on les rassemble sous le nom de constellations présentent encore aujourd'hui les mêmes apparences que les astronomes grecs

duisent des rapports de leurs positions à différentes époques. Ainsi, jusqu'à ce que nous ayons acquis les données d'après lesquelles on a fixé cette origine, nous pouvons d'abord supposer les ascensions droites de toutes les étoiles rapportées à une d'entre elles, comme à une origine fixe et déterminée.

15. En observant avec l'instrument des passages les instants où les diverses étoiles traversent le méridien, et mesurant aussi leurs distances zénithales dans ce plan avec les cercles fixes, ou par des moyens équivalents, on détermine, comme nous venons de le dire, leurs ascensions droites et leurs déclinaisons. On peut donc dresser des registres qui font connaître la position de toutes les étoiles observées, et l'ordre dans lequel elles se succèdent dans leur passage. C'est ce que l'on nomme des *catalogues d'étoiles;* on en publie un chaque année, pour les plus apparentes, dans la *Connaissance des Temps*. Avec un pareil catalogue, rien n'est plus facile que d'apprendre à distinguer et à reconnaître toutes les constellations visibles dans le lieu où l'on se trouve: il faut pour cela suivre leur succession avec l'instrument des passages, ou même, si l'on manque de cet instrument, il suffit de se placer auprès d'une muraille dirigée à peu près dans le plan du méridien, et avoir avec soi une horloge qui suive le temps sidéral ou dont la marche soit déterminée. Dès que l'on connaîtra une seule étoile, et qu'on l'aura vu passer au méridien, on les reconnaîtra toutes d'après le catalogue qui donne leur différence d'ascension droite, et par conséquent les intervalles de temps après lesquels elles se suivent. Cette étude deviendra encore plus agréable et plus facile si l'on s'aide en même temps d'un *globe céleste*, ou d'une *carte céleste*, sur laquelle soient figurées les différentes constellations, avec les principales étoiles qui les composent; ce qui permet de les déterminer et de les déduire en quelque sorte les unes des autres par des alignements. C'est là le principal avantage de ces représentations graphiques; car il ne faut pas s'arrêter aux figures d'hommes et d'animaux, par lesquelles on désigne les différentes constellations. Ces figures n'ont aucun rapport réel avec l'arrangement des étoiles dans le ciel: elles ont été déterminées par le caprice des hommes, quelquefois par flatterie; mais cependant elles peuvent jusqu'à un certain point servir pour aider

la mémoire, en attachant aux groupes d'étoiles des noms connus. Avec ces secours, on connaîtra parfaitement, en quelques nuits, toutes les étoiles qui seront visibles à l'époque où l'on aura observé; et en répétant la même épreuve à diverses époques, lorsque l'aspect du ciel sera changé par l'effet du mouvement propre du soleil, on parviendra aisément à distinguer et à reconnaître toutes les constellations (*).

16. Les ascensions droites de toutes les étoiles étant déterminées relativement à une d'entre elles, comme nous venons de le dire, si l'on veut les rapporter au point de l'équateur que les astronomes sont convenus de choisir pour origine, il suffira de connaître la différence d'ascension droite, comprise entre ce point et une étoile quelconque, à l'époque que l'on veut considérer. Cette différence, ajoutée à l'*ascension droite relative* de toutes les autres étoiles, donnera leur ascension droite absolue. Par exemple, il suffit de savoir que, le 1er janvier 1810, ce point de l'équateur passait au méridien de Paris $1^h 56^m 29^s$ sidérales avant l'étoile α du Bélier, ramenée théoriquement, pour la même époque, au lieu moyen autour duquel elle oscille, en vertu de l'aberration et de la nutation. En d'autres termes, l'ascension droite *vraie* de α du Bélier, exprimée en temps sidéral et pour cet instant, était $1^h 56^m 29^s$ ou $29° 7' 15''$ en arc. Je dis pour cet instant, parce que la précession, la nutation et l'aberration rendent l'ascension droite variable, la première déplaçant toutes les étoiles, avec continuité et lenteur, parallèlement à un même grand cercle de la sphère céleste; les

c'est-à-dire que, dans chaque lieu, on compte 0^h, 0^m, 0^s sidérales quand il passe au méridien. On le désigne ordinairement par le signe ♈, caractère de la constellation appelée le *Bélier* ou *Aries*. Nous en verrons la raison plus tard. Je dois seulement avertir qu'*aujourd'hui* il se trouve considérablement éloigné des étoiles qui composent cette constellation, et cela se voit par les nombres mêmes que je viens de rapporter.

18. D'après ces définitions, rien de plus aisé que de trouver, à chaque instant, l'heure qu'il est, *en temps sidéral*, dans un lieu où l'on connaît la hauteur du pôle. Il suffit d'observer la distance zénithale d'une étoile connue et de calculer son angle horaire, que je suppose compté du méridien supérieur et dans le sens du mouvement diurne de 0° à 360°. En ajoutant cet angle à l'ascension droite absolue de l'étoile, et rejetant les circonférences entières s'il y en a, le reste, converti en temps, exprimera la distance du méridien au point du ciel que l'on a pris pour origine, c'est-à-dire l'*heure sidérale* (*).

On peut aussi trouver l'heure par l'observation du soleil ou d'une planète; mais il faut pour cela que les mouvements propres de ces astres soient exactement connus, afin de pouvoir réduire les distances zénithales aux mêmes termes que si l'on eût observé une étoile. Nous sommes donc forcé de renvoyer cette recherche plus

(*) Soient, *fig.* 4, M♈M' le cercle de l'équateur; MM' la projection du plan du méridien local sur le plan de ce grand cercle; OS la projection du méridien de l'étoile ou de son cercle horaire, tournant d'orient en occident, suivant le sens indiqué par la flèche extérieure. ♈S sera l'ascension droite, que nous nommerons A; MS sera l'arc de l'équateur correspondant à l'angle horaire actuel que l'on a observé, et que nous nommerons P. Ajoutant ces deux arcs, on aura $P + A = M♈$. Cette somme, convertie en temps sidéral, donnera donc la distance de ♈ au méridien, ou l'heure sidérale.

Ici il n'y a pas de circonférence entière à rejeter; il y en aurait si l'étoile était de l'autre côté du méridien, par exemple en S'. Alors, en comptant toujours les angles horaires à partir de OM, dans le sens du mouvement diurne, et de 0° jusqu'à 360°, on aurait MSM'S' $= P'$, ♈MS' $= A'$. Par conséquent, $P' + A' = 360^o - MS' + ♈MS'$; ainsi, en retranchant 360°, le reste serait ♈MS' $-$ MS', ou M♈, comme tout à l'heure. La formule s'appliquerait de même dans tous les quadrants, ce qui tient à ce que les arcs qu'on y combine sont toujours comptés continuement dans leur sens propre, depuis 0° jusqu'à 360°.

loin. Pour le moment, la connaissance du temps sidéral nous suffira, et lorsque nous aurons déterminé les lois des mouvements propres à l'aide de cette connaissance, nous donnerons quelques exemples numériques de cette application, la plus importante de l'astronomie.

19. Rappelons encore que les résultats précédents n'ont lieu avec rigueur qu'en supposant aux étoiles un éloignement presque infini, ou du moins tel que, vues des différents points de la terre, elles ne présentent aucune différence d'aspect sensible, en sorte que les rayons visuels, menés de ces points à une même étoile, puissent être censés parallèles entre eux. Cette condition n'a plus lieu pour le soleil, la lune, les planètes et les comètes, qui, par là, semblent beaucoup plus rapprochées de nous que les fixes. Alors, pour rendre les observations de ces astres comparables entre elles, quoique faites dans les différents pays, il faut y faire une petite correction dont nous parlerons plus loin, quand nous aurons déterminé exactement la forme et la grandeur de la terre.

Les notions que nous venons d'acquérir sur les différents cercles de la sphère céleste nous permettent d'ajouter quelque chose sur l'usage de la machine parallatique. Elle sert spécialement pour mesurer de petites différences d'ascension droite et de déclinaison. Pour cela on dispose les fils rectangulaires du micromètre, de manière que les uns représentent des cercles horaires, et les autres des arcs de parallèles. Alors, si deux étoiles passent en même temps dans le champ de la lunette, la différence des époques de leur passage aux mêmes fils horaires donne leur différence d'ascension

jour. Au moyen de la machine parallatique, on peut déterminer les diamètres apparents des astres avec une très-grande exactitude, parce que la lunette, suivant la marche de l'astre, permet de multiplier les observations. Pour les diamètres horizontaux, le procédé est le même qu'avec la lunette méridienne. Mais, d'après ce qu'on a vu, § 10, la différence des passages des deux bords du disque, aux mêmes fils horaires, ne donne pas immédiatement le diamètre apparent de l'astre. Il faut, pour réduire ce diamètre en parties d'un grand cercle de la sphère céleste, multiplier l'intervalle des passages réduit en arc par le sinus de la distance polaire du parallèle où on les a observés. On prend cet élément sur un cercle gradué qui fait partie de l'instrument, et sur lequel la lunette fait mouvoir un vernier. On détermine les diamètres verticaux de la même manière que les différences de déclinaison; mais ils n'ont besoin d'aucune réduction.

20. Lorsqu'on a observé à la mer la distance angulaire du bord éclairé de la lune au bord du soleil qui en est le plus proche, ce qui se fait avec des instruments à réflexion que j'aurai plus loin l'occasion de décrire, il faut, pour avoir l'arc de distance compris entre les centres des disques, connaître, en arc de grand cercle, le demi-diamètre apparent de chacun d'eux, dans la direction suivant laquelle la distance des bords a été mesurée. Or, outre les variations occasionnelles de grandeur que le disque éprouve par les causes indiquées page 11, l'égalité de ses diamètres est quelque peu altérée, selon leur obliquité à l'horizon, parce que le centre du disque et le point de son contour où ils se terminent, ayant d'inégales hauteurs, la réfraction atmosphérique les élève inégalement dans leurs verticaux propres, qui convergent au zénith. Cela rend les diamètres apparents obliques toujours moindres que le diamètre vrai, dans des proportions dépendantes de leur obliquité actuelle, et ôte aux disques leur circularité. Pour envisager ce problème d'une manière générale, soient, *fig.* 5, O le centre d'observation et de la sphère céleste, OZ la verticale, Z le zénith, H′ H″ H le grand cercle de l'horizon, et ZH′, ZH″ deux verticaux dans lesquels se trouvent les lieux vrais de deux points lumineux Σ′, Σ″. Menons l'arc de grand cercle Σ″Σ′ qui mesure leur distance angulaire vraie, et nom-

mons-le D. Appliquons maintenant la réfraction; elle élèvera chacun des points Σ'', Σ' dans son vertical propre, mais Σ'' plus que Σ', parce qu'il est figuré plus bas; et elle portera, par exemple, le premier en S'', le second en S', de sorte que leur distance apparente sera devenue D', différente de D. Mais il est aisé d'obtenir D' en D quand on connaît les distances zénithales apparentes des deux points S', S'', et les lois des réfractions atmosphériques. Car, ces distances devant être toutes deux renfermées dans le même angle azimutal a compris entre les deux verticaux, les deux triangles sphériques $Z\Sigma''\Sigma'$, $ZS''S'$, qui ont leurs sommets au zénith et les distances D, D' pour bases, ont l'angle a commun; de sorte qu'en y formant les expressions individuelles de ces distances, et éliminant a entre elles, on obtient la relation cherchée de D' à D. C'est ce que j'expose ici en note. Le calcul est considérablement simplifié quand on suppose les deux distances D, D' fort petites, comme cela a toujours lieu dans les applications de ce problème. On en conclut que les disques circulaires, modifiés ainsi par la réfraction, se trouvent très-approximativement changés par elle en des ellipses dont le grand axe est horizontal, et le petit vertical, celui-ci différant toujours très-peu du premier.

Sur les grandeurs des demi-diamètres apparents des astres évalués suivant des directions obliques à l'horizon.

21. Ce problème, tel qu'il a été énoncé à la fin du précédent chapitre, se rapporte à la fig. 5, que je reproduis sans avoir besoin de la décrire de nou-

J'introduis ces expressions dans la première de nos deux équations, et elle devient

$$\sin^2\tfrac{1}{2}D = \sin^2\tfrac{1}{2}(z''-z'+r''-r') + \sin(z''+r'')\sin(z'+r')\sin^2\tfrac{1}{2}a;$$

alors j'élimine $\sin^2\frac{1}{2}a$ entre elle et l'autre, puis je dégage $\sin^2\frac{1}{2}D'$. J'obtiens ainsi

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \sin^2\tfrac{1}{2}D' = {} & \sin^2\tfrac{1}{2}(z''-z') \\ & + [\sin^2\tfrac{1}{2}D - \sin^2\tfrac{1}{2}(z''-z'+r''-r')]\,\frac{\sin z''\sin z'}{\sin(z''+r'')\sin(z'+r')}. \end{aligned}\right.$$

22. Le rapport de sinus qui multiplie le dernier terme du second membre est susceptible d'une transformation qui est très-propre à montrer le mode de variation de ses valeurs. Pour l'opérer, je prends un quelconque de ses deux facteurs sous la forme générale $\frac{\sin z}{\sin(z+r)}$. Afin de faciliter la division, je change le z du numérateur en $(z+r)-r$; et, le considérant comme formé de la différence de ces deux arcs, je développe l'expression de son sinus, où je remplace $\cos r$ par sa valeur équivalente $1-2\sin^2\frac{1}{2}r$. J'obtiens ainsi

$$\frac{\sin z}{\sin(z+r)} = 1 - \frac{\sin r\cos(z+r)}{\sin(z+r)} - 2\sin^2\tfrac{1}{2}r;$$

alors je change le facteur $\sin r$ du second terme en $2\sin\frac{1}{2}r\cos\frac{1}{2}r$, ce qui lui donne un facteur commun avec le suivant. Cela permet de l'y réunir, et, en le faisant, on a pour résultat

$$\frac{\sin z}{\sin(z+r)} = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}r\,\frac{\cos(z+\frac{1}{2}r)}{\sin(z+r)}.$$

On voit par là qu'un rapport pareil ne diffère de l'unité que par un terme de l'ordre de la réfraction r qui se trouve actuellement affecter la distance apparente z. Or, ce terme change non-seulement de valeur, mais même de signe, à d'inégales distances de l'horizon.

En effet, considérons-le d'abord à l'horizon même, où z sera 90°; alors $\cos(z+\frac{1}{2}r)$ deviendra $-\sin\frac{1}{2}r$, et $\sin(z+r)$ deviendra $\cos r$. Le second membre aura donc pour valeur

$$1 + \frac{2\sin^2\frac{1}{2}r}{\cos r}.$$

Cela équivaut à $\frac{1}{\cos r}$, comme on aurait pu le voir directement sur l'expression non développée du rapport $\frac{\sin z}{\sin(z+r)}$. Dans ce cas donc, le terme associé à l'unité se trouve positif.

Pour apprécier sa valeur numérique dans cette circonstance, supposons que, dans la couche d'air où est placé l'observateur, la température soit celle de 10 degrés centésimaux, et la pression $0^m,760$; alors la Table de réfraction

insérée dans le tome I, page 221, donnera, pour 90° de distance zénithale, r égal à 33′46″,3. De là on tire

$$\log\left(\frac{2\sin^2\frac{1}{2}r}{\cos r}\right) = 5,6844018,$$

conséquemment

$$\frac{2\sin^2\frac{1}{2}r}{\cos r} = 0,0000483506;$$

telle est donc alors la valeur du terme qui s'ajoute numériquement à l'unité dans l'expression de $\frac{\sin z}{\sin z + r}$.

A partir de cette limite, z et r diminuant à la fois, ce terme commence par s'affaiblir, en conservant, dans son expression algébrique, le signe négatif, ce qui continue de le rendre numériquement additif à l'unité; mais il devient nul lorsqu'on a

$$\cos(z + \tfrac{1}{2}r) = 0,$$

ce qui donne pour condition

$$z = 90^\circ - \tfrac{1}{2}r.$$

Si l'on consulte la Table numérique des réfractions insérée dans la tome I, pages 220 et 221, Table qui est calculée, d'après la théorie de Laplace, pour le cas où le thermomètre marque 10° et le baromètre 0^m,760 dans la couche d'air où l'observateur est placé, on trouve que la condition dont il s'agit a lieu lorsque la distance zénithale apparente z est 89°44′31″,586. En effet, pour cette distance, la Table donne, par proportionnalité,

$$r = 0^\circ 30' 56'',828;$$

de là on tire

$$\tfrac{1}{2}r = 0^\circ 15' 28'',414,$$

et par suite

$$90^\circ - \tfrac{1}{2}r = 89^\circ 44' 31'',586.$$

[redacted]

α est un très-petit angle qui varie proportionnellement à la densité de l'air dans la couche atmosphérique où l'observateur est placé; m et n sont des nombres positifs sensiblement constants, ou qui n'éprouvent que des variations négligeables dans un même lieu. Pour le cas où la température, dans la couche d'observation, est celle de la glace fondante et la pression $0^m,76$ de mercure à 0°, on a

$$\alpha = 60'',666, \qquad m = 0,99918\,761, \qquad n = 0,00110\,5823.$$

Le coefficient n étant fort petit relativement à m, l'influence du terme affecté de $\tang^2 z$ est toujours beaucoup moindre que celle du terme en $\tang z$, dans les limites de distances zénithales auxquelles la formule est adaptée; et, quand z devient moindre que 45°, ce qui rend $\tang z$ une fraction de l'unité, l'effet de ce terme est bientôt presque négligeable. Dans tous les cas, il tend à affaiblir, par l'opposition de son signe, l'effet du terme $m \tang z$; c'est pourquoi, voulant assigner la limite de grandeur que prend le produit algébrique

$$\frac{2\sin^2 \frac{1}{2} r \cos(z + \frac{1}{2} r)}{\sin(z + r)},$$

j'y remplacerai r, dans le facteur $\sin \frac{1}{2} r$, par la valeur qui résulterait du seul premier terme de son expression complète; car cette valeur, étant toujours plus forte que la véritable, nous donnera une limite d'évaluation plutôt trop forte que trop faible, si ce n'est au zénith même, où le terme en $\tang^2 z$, que nous aurons omis, devient rigoureusement nul avec la distance zénithale z.

L'expression théorique de r, ainsi réduite à son premier terme, peut, sans erreur appréciable, être mise sous la forme suivante

$$\sin \tfrac{1}{2} r = \tfrac{1}{2} m \sin \alpha \tang z;$$

cela revient à considérer les petits arcs α, r comme sensiblement proportionnels à leurs sinus. J'ai déjà rapporté la valeur de α; quant à celle de r, on peut voir que, même à 80° de distance du zénith, notre Table de réfraction, construite pour la température de 10°, la donne seulement de $5'19'',8$, qu'il faut élever à $5'32'',4$ pour la ramener aussi à la température de la glace fondante, d'après le mode suivant lequel cette Table a été calculée (*). Or, si l'on déduit le sinus de pareils arcs de celui de l'un d'eux, par proportionnalité, on ne lui trouve pas avec le sinus exact une différence qui réponde à une fraction de seconde appréciable. Usant donc de cette trans-

(*) Les facteurs nécessaires pour transporter ainsi les réfractions de la température de 10° et de la pression $0^m,760$ à toute autre circonstance météorologique quelconque, sont donnés sous forme logarithmique dans le recueil des Tables publiées par le Bureau des Longitudes, et on les reproduit en nombres dans la *Connaissance des Temps* de chaque année. Ici le facteur de conversion est 1,0395 pour transporter les réfractions de la Table de 0° à 10°, la pression restant toujours $0^m,760$, mais la température du mercure dans le baromètre étant aussi supposée descendre de 10° à 0°, comme dans notre valeur de α.

formation ainsi légitimée, j'introduis l'expression précédente de $\sin \frac{1}{2} r$ dans le terme algébrique que nous voulons évaluer, et il devient

$$m \sin \alpha \frac{\sin z \cos (z + \frac{1}{2} r)}{\cos z \sin (z + r)}.$$

Sous cette forme, on voit qu'il sera toujours moindre que $m \sin \alpha$. Car, dans la fonction de z qui multiplie cette quantité, le facteur $\cos z$ du dénominateur sera toujours plus grand que le facteur $\cos z + \frac{1}{2} r$, entre les limites de distance zénithale que nous considérons; et, pareillement, l'autre facteur du dénominateur $\sin (z + r)$ y sera plus grand que son correspondant $\sin z$ du numérateur. La fonction totale qui multiplie $m \sin \alpha$ sera donc, dans tous les cas, une fraction moindre que 1, mais toujours de très-peu moindre, à cause de la petitesse de r; et enfin elle deviendra rigoureusement 1 quand z sera nul, ce qui donne $m \sin \alpha$ pour la valeur maximum du terme que nous considérons. Le terme en $\tang^2 z$ que nous avons omis dans l'expression de $\sin \frac{1}{2} r$ ne change évidemment rien à cette limite finale, puisqu'en le supposant multiplié aussi par le rapport $\frac{\cos (z + \frac{1}{2} r)}{\sin (z + r)}$, le produit s'évanouit rigoureusement au zénith, où z et r sont nuls tous deux simultanément.

Mais, bien longtemps avant d'arriver à sa valeur limite, notre terme en différera si peu, que l'on pourra, sans erreur sensible, la prendre comme son expression réelle et constante. Pour avoir la preuve de ce fait, supposons $z = 80^\circ$, ce qui est le plus grand abaissement où l'on fasse les observations que nous voulons ici considérer. La valeur correspondante de r pour la température 0° et la pression $0^m,76$ que notre évaluation de α suppose sera, par ce qui précède, $5'32'',4$. Si avec ces données on calcule rigoureusement le multiplicateur de $m \sin \alpha$, on le trouve égal à $1 - 0,004853$; de sorte que sa différence avec l'unité équivaudrait à diminuer $\sin \alpha$ de $0,00000\ 14273$, fraction dont l'influence sera toujours négligeable dans les applications pratiques auxquelles est destinée la formule que nous préparons. Ainsi, dans toute l'étendue de distances zénithales qu'elles embrassent, on pourra, sans aucune erreur sensible, supposer généralement

et par suite

$$(1)\quad \sin^2\tfrac{1}{2}D' = \sin^2\tfrac{1}{2}(z''-z') + [\sin^2\tfrac{1}{2}D - \sin^2\tfrac{1}{2}(z''-z'+r''-r')](1-f')(1-f'').$$

25. Cette expression est rigoureuse et ne fixe aucune limite aux distances vraies et apparentes D, D'. Mais, dans l'usage qu'on en fait habituellement, ces distances sont toujours assez restreintes pour qu'on puisse considérer les cubes de leurs sinus comme négligeables comparativement à leurs premières puissances. La même supposition peut alors être, à plus forte raison, appliquée aux arcs $z''-z'$, $r''-r'$, le premier ne pouvant jamais excéder D', et le second étant plus faible encore, puisqu'il exprime seulement la différence des deux réfractions qui affectent les extrémités de la distance considérée. On aura donc, dans de tels cas, avec une approximation toujours suffisante,

$$(2)\qquad D'^2 = (z''-z')^2 + [D^2 - (z''-z'+r''-r')^2](1-f')(1-f'').$$

26. Je vais maintenant appliquer cette formule ainsi restreinte à l'évaluation des demi-diamètres apparents de la lune et du soleil affectés de la réfraction. Comme les demi-diamètres vrais D diffèrent alors peu de 15 minutes, l'approximation que nous y avons introduite leur est applicable, et je prendrai cette valeur comme type, pour en éprouver les effets.

Je commence par considérer le diamètre horizontal ; pour celui-là, $z'=z''$; conséquemment $r'=r''$, et $f'=f''$. Introduisant donc ces particularités dans notre formule, elle donnera, pour sa valeur,

$$D' = D(1-f''), \qquad \text{ou} \qquad D' = D - Df''.$$

Le produit Df'' exprime ici le changement que la réfraction produit dans le demi-diamètre horizontal vrai. La valeur de ce changement, et même son signe, varient donc à diverses distances du zénith proportionnellement au facteur f''. A l'horizon, par exemple, nous avons vu que f'' devient négatif, et, dans l'état de densité de l'air que nous avons considéré, $-f''$ a pour valeur $+0,0000\tfrac{4}{1}835\,06$. Si donc on suppose le demi-diamètre vrai D égal à 15 minutes ou 900 secondes, on aura, par multiplication,

$$D' = 15' + 0'',0435.$$

Ainsi, quand le centre du disque paraîtra à l'horizon même, le demi-diamètre apparent horizontal sera *un peu plus grand* que le demi-diamètre vrai; mais l'agrandissement sera inappréciable aux mesures les plus délicates.

A mesure que l'astre commencera à s'élever, le produit $-Df''$ diminuera comme le facteur f'', en restant toujours positif jusqu'à ce qu'il devienne nul, lorsque la distance zénithale apparente z égale $89^\circ 44' 31'',586$. A ce terme, f'' sera nul, et le demi-diamètre horizontal apparent D' égalera le diamètre vrai D.

Au-dessus de cette hauteur, z continuant à décroître, f'' changera de signe, il deviendra positif et il acquerra bientôt sa valeur finale constante $m \sin \alpha$.

Depuis cette limite jusqu'au zénith, on aura donc

$$D' = D - mD \sin \alpha ;$$

or, d'après les valeurs de m et de α données plus haut, on trouve

$$\log (m \sin \alpha) = \bar{4},4681673, \qquad m \sin \alpha = 0,00029\,3878.$$

Si l'on prend le demi-diamètre D égal à 15 minutes ou 900 secondes, il en résultera, par multiplication, dans les circonstances de pression et de température assignées,

$$D' = 15' - 0'',264.$$

27. Ces variations du facteur f sont, en apparence, très-singulières, et l'on ne conçoit pas, au premier coup d'œil, comment, à l'horizon par exemple, le demi-diamètre horizontal peut être augmenté par la réfraction. Il est cependant facile de s'en rendre compte : en effet, quand le centre du disque paraît à l'horizon, le disque vrai est réellement abaissé au-dessous de ce plan d'une quantité angulaire égale à la réfraction horizontale calculée pour la distance apparente 90°. Cet abaissement, qui le rapproche du zénith inférieur, écarte les verticaux qui le contiennent plus que s'il se trouvait à l'horizon vrai ; alors son diamètre réfracté occupe l'intervalle de ces verticaux à l'horizon même où leur écart en arc est le plus considérable. De là l'augmentation relative du diamètre horizontal apparent ainsi observé.

Le cas d'anéantissement du facteur f'' s'explique par des considérations analogues. Lorsque l'astre est vu à la distance apparente z'' égal à $90^c - \frac{1}{2} r''$, le disque vrai est abaissé sous l'horizon autant que le disque apparent est élevé au-dessus ; ils se trouvent donc à des distances égales de leurs zéniths propres. Ainsi leurs diamètres mesurés parallèlement à l'horizon doivent être égaux, puisque tous deux doivent être compris à égales hauteurs, entre les mêmes cercles verticaux prolongés.

28. Il ne me reste plus qu'à introduire, dans notre formule restreinte aux petits angles, l'obliquité du demi-diamètre que l'on veut spécialement évaluer. Pour cela, considérons, dans la *fig.* 6, le disque réfracté comme un petit espace terminé par une courbe ovoïde de forme quelconque, dont l'éten-

férences $r'' - r'$ leur sont sensiblement proportionnelles; en sorte que, pour toutes leurs valeurs individuelles entre ces limites, on a toujours une relation de la forme

$$r'' - r' = c(z'' - z');$$

conséquemment ici

$$r'' - r' = cD' \sin i.$$

Le coefficient c de la proportionnalité varie avec la distance zénithale z'' du centre du disque; il a ses plus grandes valeurs près de l'horizon, où, par suite, la supposition de simple proportionnalité du rapport doit être plus restreinte; mais il décroît rapidement à mesure que la distance zénithale diminue, ce qui permet alors de lui continuer plus longtemps la même valeur. Je démontrerai tout à l'heure ces résultats par la théorie; pour le moment, je les prends comme un fait que l'on peut constater sur la Table numérique même, puisque les évaluations des réfractions pour les distances zénithales diverses y sont espacées conformément à ces considérations. Alors, si nous substituons les nouvelles expressions de $z'' - z'$ et de $r'' - r'$ en $D' \sin i$, dans notre formule restreinte, puis qu'on y rassemble, dans le premier membre, tous les termes qui ont pour facteur D'^2, elle deviendra

$$(3)\quad D'^2 \left\{ 1 + [(1+c)^2 (1-f')(1-f'') - 1] \sin^2 i \right\} = D^2 (1-f')(1-f'').$$

29. Dans les applications pratiques auxquelles cette formule est destinée, on a soin de n'observer les disques des deux astres que lorsque la hauteur apparente de leur centre est au moins de 10°; alors on admet qu'à cette limite les facteurs f', f'' ont tous deux atteint leur valeur finale commune $m \sin \alpha$, ce qui est déjà à peu près vrai et ne peut avoir aucune influence appréciable sur des arcs aussi peu étendus que D et D', comme on peut aisément le constater. On admet, en outre, que le rapport de proportionnalité c est devenu alors une fraction assez petite pour qu'on puisse négliger son carré comparativement à sa première puissance, ce qui est encore sensiblement vrai, puisque notre Table de réfraction montre qu'entre 79° et 80° de distance zénithale, il est déjà réduit à $\frac{1}{125}$. Alors, à plus forte raison, on néglige pareillement le produit de c par la quantité bien plus petite $m \sin \alpha$, et aussi le carré de cette dernière. La formule, restreinte par ces limitations, devient donc

$$(4)\qquad D'^2 [1 + 2(c - m \sin \alpha) \sin^2 i] = D^2 (1 - 2m \sin \alpha);$$

de là, dans les mêmes limites d'approximation, on déduit

$$D'^2 = D^2 \frac{(1 - 2m \sin \alpha)}{1 + 2(c - m \sin \alpha) \sin^2 i} = D^2 [1 - 2(c \sin^2 i + m \sin \alpha \cos^2 i)],$$

et, prenant la racine carrée des deux membres, toujours dans les mêmes limites, il vient enfin

$$D' = D [1 - (c \sin^2 i + m \sin \alpha \cos^2 i)].$$

C'est par cette formule réduite que Delambre a calculé la Table des demi-diamètres obliques de la lune et du soleil qu'il a insérée à la fin des Tables de la lune de Bürg, publiées par le Bureau des Longitudes. Seulement il n'y a pas compris le facteur $m \sin \alpha \cos^2 i$, ayant pris, au lieu de D, le demi-diamètre apparent horizontal déjà accourci par le facteur $1 - m \sin \alpha$. En outre, il a calculé sa Table pour la température de 10°, ce qui réduit $m \sin \alpha$ à 0,00027678 1, et revient à faire $m\alpha$ égal à 57",12.

30. Sous la forme réduite (4), et même sous la forme plus générale (2) qui s'applique à toutes les distances zénithales, on peut reconnaître que la figure apparente du disque représentée *fig.* 6 est une ellipse dont le grand axe est horizontal. En effet, prenons un moment cette figure comme type d'une ellipse dont le grand axe soit $2a$, le petit $2b$, et rapportons les points de son contour à un système de coordonnées rectangulaires x, y, respectivement parallèles à ces axes. Son équation sera

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Représentons par e le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, ce qui donnera

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2};$$

en chassant b^2 par cette expression, l'équation deviendra

$$y^2 + (1 - e^2) x^2 = a^2 (1 - e^2).$$

Prenons maintenant pour nouvelles coordonnées le rayon vecteur D' mené du centre, et l'angle i qu'il forme avec l'axe $2a$; cela donnera

$$y = D' \sin i, \qquad x = D' \cos i;$$

et, en chassant x, y par ces valeurs, l'équation entre D' et i prendra cette forme

$$D'^2 (1 - e^2 \cos^2 i) = a^2 (1 - e^2),$$

que l'on peut encore changer en

faut et il suffit que le rapport variable de proportionnalité c, qui est positif, surpasse toujours $m \sin \alpha$. Cela est, en effet, ainsi à toutes les distances zénithales, d'après les valeurs que notre Table assigne aux réfractions qui leur correspondent. Mais on peut encore le constater plus sûrement par l'expression théorique

$$r = \alpha\,(m \operatorname{tang} z - n \operatorname{tang}^3 z).$$

En effet, lorsqu'on l'applique successivement aux deux distances zénithales z', z'', elle donne, par différence,

$$r'' - r' = \alpha\,[m(\operatorname{tang} z'' - \operatorname{tang} z') - n(\operatorname{tang}^3 z'' - \operatorname{tang}^3 z')]\,;$$

et, en faisant sortir le facteur $\operatorname{tang} z'' - \operatorname{tang} z'$, qui est commun aux deux termes compris sous la parenthèse, on peut lui donner cette forme

$$r'' - r' = m\alpha \frac{\sin(z'' - z')}{\cos z'' \cos z'}\left[1 - \frac{n}{m}(\operatorname{tang}^2 z'' + \operatorname{tang} z'' \operatorname{tang} z' + \operatorname{tang}^2 z')\right].$$

Pour adapter cette valeur de $r'' - r'$ à notre équation restreinte (3), il faut y supposer de même la différence $z'' - z'$ des distances zénithales assez petite pour qu'on puisse la déduire de son sinus par simple proportionnalité, en sorte qu'on puisse remplacer $\sin(z'' - z')$ par $(z'' - z')\sin 1''$. Alors, en appliquant le facteur $\sin 1''$ à l'arc α, on pourra, par la même raison, remplacer le produit $\alpha \sin 1''$ par $\sin \alpha$. Quant au facteur compris entre les parenthèses, il faudra, pour l'évaluer dans les mêmes limites d'approximation, y négliger les termes de l'ordre $\sin^2(z'' - z')$, puisque leur multiplication par le facteur extérieur en donnerait dans $r'' - r'$ qui seraient de l'ordre $\sin^2(z'' - z')$, que nous supposons négligeables. Pour y introduire cette restriction, faisons

$$z'' + z' = 2s, \qquad z'' - z' = 2\delta,$$

cela donnera

$$z'' = s + \delta, \qquad z' = s - \delta.$$

Alors, en développant $\operatorname{tang} z''$, $\operatorname{tang} z'$, ainsi que leurs carrés et leurs produits, il faudra se borner aux termes qui seront de l'ordre $\operatorname{tang} \delta$. On aura donc, dans ces limites,

$$\operatorname{tang} z'' = \frac{\operatorname{tang} s + \operatorname{tang} \delta}{1 - \operatorname{tang} s \operatorname{tang} \delta} = \operatorname{tang} s \frac{\left(1 + \dfrac{\operatorname{tang} \delta}{\operatorname{tang} s}\right)}{1 - \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} s}$$
$$= \operatorname{tang} s \left[1 + \left(\operatorname{tang} s + \frac{1}{\operatorname{tang} s}\right)\operatorname{tang} \delta\right] = \operatorname{tang} s \left(1 + \frac{\operatorname{tang} \delta}{\sin s \cos s}\right),$$

et par suite, en négligeant toujours le carré de $\operatorname{tang} \delta$,

$$\operatorname{tang}^2 z'' = \operatorname{tang}^2 s \left(1 + \frac{2 \operatorname{tang} \delta}{\sin s \cos s}\right).$$

Pour passer de là à $\operatorname{tang} z'$, on n'aura qu'à intervertir le signe de δ, et l'on aura, par analogie,

$$\operatorname{tang} z' = \operatorname{tang} s \left(1 - \frac{\operatorname{tang} \delta}{\sin s \cos s}\right), \quad \text{puis} \quad \operatorname{tang}^2 z' = \operatorname{tang}^2 s \left(1 - \frac{2 \operatorname{tang} \delta}{\sin s \cos s}\right);$$

alors tang δ disparaîtra dans la somme des carrés des tangentes, par opposition de signe, et il disparaîtra aussi de leur produit, comme n'y donnant qu'un terme de l'ordre tang$^2\,\delta$. En réunissant les résultats de ces opérations, et rétablissant pour s sa valeur $\frac{1}{2}(z''+z')$, on aura finalement

$$\tang^2 z'' + \tang z'' \tang z' + \tang^2 z' = 3 \tang^2 \tfrac{1}{2}(z''+z');$$

les limitations de $r''-r'$ étant ainsi effectuées, on obtiendra

$$\frac{r''-r'}{z''-z'} = \frac{m \sin \alpha}{\cos z'' \cos z'}\left[1 - \frac{3n}{m} \tang^2 \tfrac{1}{2}(z''+z')\right].$$

Le second membre de cette expression représente le facteur de proportionnalité que nous avons désigné par c. Il se compose ici de deux facteurs. Dans celui qui est compris entre les parenthèses, le coefficient numérique $\frac{3n}{m}$ a pour valeur 0,00332017. Le carré de la tangente de la distance moyenne, déjà considérablement affaibli par ce coefficient, ira aussi en s'affaiblissant par lui-même à mesure que l'astre se rapprochera du zénith; et, à cette dernière limite il s'anéantira mathématiquement, après être devenu depuis longtemps insensible. Dans le facteur extérieur à la parenthèse, au contraire, le numérateur constant $m \sin \alpha$ se trouvera toujours agrandi par son dénominateur, puisque les cosinus des deux distances zénithales dont le produit se compose seront des fractions moindres que 1. Ainsi, par la disproportion de ces deux effets contraires, le second membre, qui représente notre coefficient c, surpassera généralement $m \sin \alpha$, en convergeant vers cette dernière valeur, qu'il atteindra au zénith même. Appliquant donc ceci aux conditions de forme établies plus haut pour notre équation (2), on voit que le coefficient de $\sin^2 i$ y sera généralement positif et moindre que 1, puisque c surpassera toujours $m \sin \alpha$ par une différence très-petite; et il deviendra nul au zénith, où c se trouvera finalement égal à $m \sin \alpha$. Ainsi le disque réfracté de l'astre présentera toujours la figure d'une ellipse dont le demi-grand axe horizontal sera $D(1 - m \sin \alpha)$; et son excentricité, toujours très-petite, deviendra nulle au

CHAPITRE XVII.

Des pôles et de l'équateur de la terre. Définition des méridiens et des parallèles terrestres. Aspects divers de la sphère céleste sur les horizons des différents pays.

31. Les principaux cercles de la sphère céleste étant définis, comme nous venons de le dire, et leurs positions respectives étant aussi déterminées, l'aspect sous lequel ils se présentent aux observateurs dépend de l'inclinaison des horizons des différents pays, et par conséquent de leur direction dans l'espace, laquelle dépend à son tour de la courbure de la surface terrestre. Sous ce rapport, la situation variable de la sphère céleste est importante à considérer.

32. D'après les analogies que j'ai rassemblées dans le tome I, page 36, le mouvement diurne du ciel, d'orient en occident, ne serait qu'une apparence, produite par la révolution de la terre sur elle-même en sens contraire. Ce résultat, qui se présente déjà comme infiniment vraisemblable, sera confirmé ultérieurement par une succession de preuves qui en compléteront la certitude. Alors, ce que nous avons appelé l'axe de rotation de la sphère céleste, est réellement l'axe idéal et géométrique autour duquel la terre tourne en un jour sidéral. Traçons, par la pensée, sa direction dans l'intérieur de la masse terrestre, et prolongeons-le indéfiniment au dehors. Les points où il percera la surface extérieure seront les *pôles terrestres*, correspondants aux *pôles célestes* placés à une distance infinie sur son prolongement.

Toutes les observations astronomiques s'accordent, jusqu'à présent, à prouver que la position de cet axe, dans l'intérieur de la terre, est invariable; qu'il perce constamment sa surface dans les mêmes points, et que la vitesse de la rotation est uniforme et constante. Si la terre était complétement solide, il résulterait de ces phénomènes que l'axe autour duquel elle tourne est un des trois

axes principaux passant par son centre de gravité, autour duquel le moment d'inertie est un *maximum* ou un *minimum*. Mais la rigueur de cette déduction est modifiée par l'existence des mers qui recouvrent en partie le noyau solide de la terre. En admettant, comme c'est le fait, que cette portion fluide et superficielle est très-petite comparativement à la masse totale, Laplace a démontré que la rotation s'opère autour d'un axe passant très-près du centre de gravité commun, et que l'on peut encore appeler *principal*, parce que la rotation est stable autour de lui. Alors, non-seulement la présence des mers n'altère pas cette stabilité, mais, par la mobilité résultante de leur état fluide, et par les résistances que leurs oscillations éprouvent, elles ramèneraient ou tendraient à ramener la terre à un état permanent d'équilibre, si des causes perturbatrices quelconques venaient à l'en écarter (*).

33. Dans le chapitre II du tome I, j'ai rassemblé les phénomènes les plus apparents qui nous montrent que la terre, de même que le soleil, la lune et les planètes, est un corps arrondi de forme à peu près sphérique. Comme première approximation, supposons-la une sphère exacte, et, pour compléter la simplification, admettons encore que l'axe autour duquel elle tourne passe exactement par son centre de figure. Plaçons alors un observateur à ce centre même, et décrivons la sphère céleste concentriquement autour de lui : il verra tous les points de la terre projetés sur cette sphère, chacun suivant sa verticale, et les divisions géométriques que nous venons de tracer dans le ciel auront toutes leurs analogues sur la surface terrestre. Commençons par les y rapporter

noms homologues à ceux qui leur correspondent dans le ciel. Ainsi le plan de l'équateur céleste mené perpendiculairement à l'axe de rotation y trace un cercle qui s'appelle l'*équateur terrestre*. Les plans horaires célestes menés par ce même axe y tracent d'autres cercles qu'on appelle les *méridiens terrestres*, ou simplement les *méridiens*. Ils se coupent tous aux pôles, puisqu'ils contiennent l'axe de rotation. Dans cet énoncé, on les considère comme de simples lignes, abstraction faite du plan qui les contient.

La terre est si petite, que deux plans qui la toucheraient à ses deux pôles, et qui seraient perpendiculaires à l'axe de rotation, passeraient par les mêmes étoiles, et iraient rencontrer la sphère céleste dans son équateur même ; ou du moins l'arc qu'ils interceptéraient sur cette sphère, étant vu de la terre, répondrait à un angle si petit qu'il serait inappréciable. Les plans des parallèles célestes qui interceptent de grands arcs sur la sphère céleste de part et d'autre de l'équateur, ne coupent donc point la surface de la terre, ils passent infiniment au dehors. Mais, si l'on imagine des cônes qui aient leur sommet au centre de la terre, et pour base les différents parallèles célestes, ces cônes couperont la surface de la terre, supposée sphérique, suivant des cercles dont le plan sera parallèle à celui de l'équateur, et que l'on nomme pour cette raison des *parallèles terrestres;* expression, toutefois, qui les désigne spécialement comme lignes, abstraction faite du plan qui contient chacun d'eux.

Les mêmes correspondances et les mêmes énoncés s'appliqueront encore si la terre est un ellipsoïde de révolution engendré sur l'axe même autour duquel la rotation s'opère. Seulement les rayons menés du centre aux divers points de la surface ne coïncideront plus avec les verticales de ces points, excepté sur le contour de l'équateur et aux deux pôles ; en outre, les intersections de la surface par les plans horaires, ou les méridiens, ne seront plus des cercles. Leur configuration sera identique avec l'ellipse génératrice.

34. Étendons enfin ces conceptions au cas général où la terre, ayant une forme sphéroïdale quelconque, tourne autour d'un axe fixe passant dans l'intérieur de sa masse à une distance quelconque de son centre de gravité. Les points dans lesquels cet axe perce la

surface seront encore proprement ses *pôles physiques*, mais ils ne présenteront plus généralement la propriété que la verticale y coïncide avec l'axe de rotation. Alors, si l'on cherche sur la surface les points où la verticale se trouve parallèle à cet axe, on pourra les appeler, par analogie, les *pôles astronomiques de la terre*. De même, si, par le milieu de l'axe, on mène un plan qui lui soit perpendiculaire, lequel coupera la sphère céleste suivant le grand cercle de l'équateur, il conviendra d'appeler *équateur terrestre* la suite des points de la surface dont les verticales sont parallèles à ce plan. En effet, il pourra bien arriver que les pieds de ces verticales ne forment pas une courbe plane, auquel cas l'équateur terrestre, ainsi défini, sera ce qu'on appelle une *ligne à double courbure;* mais il s'accordera avec les définitions précédentes par cette condition, qu'en vertu de la petitesse de la terre comparativement aux dimensions infinies de la sphère céleste, les sommets de toutes ces verticales iront pareillement y aboutir sur le même grand cercle équatorial. Enfin, pour généraliser l'idée des méridiens terrestres, en un point quelconque de la terre, concevons une droite parallèle à l'axe de rotation : le plan conduit par cette droite et par la verticale sera le méridien du lieu considéré. Menons par l'axe même un plan qui lui soit parallèle; étant prolongé à l'infini, il tracera sur la sphère céleste un grand cercle méridien sur lequel la verticale, pareillement prolongée, ira aboutir. Tous les autres points de la surface terrestre, dont les verticales propres seront parallèles à ce plan-là, auront le même méridien céleste ; et leurs méridiens propres seront traversés par les mêmes étoiles aux mêmes instants phy-

36. Si l'on applique les définitions précédentes aux deux cas particuliers que nous avons considérés d'abord, elles reproduisent évidemment toutes les propriétés que nous y avons reconnues. On aurait donc pu se borner à les énoncer comme caractères généraux; mais alors on n'aurait pas vu aussi clairement le but de cette généralisation et sa convenance; de plus, on n'aurait pas embrassé le système des courbes formées par les méridiens et les parallèles terrestres avec autant de facilité qu'en le considérant d'abord dans les cas simples où ces lignes sont planes. Or, ce sont précisément ceux-là qui se trouvent réalisés sur la surface terrestre quand on fait abstraction de ses irrégularités locales, comme nous aurons l'occasion de le reconnaître dans le chapitre suivant.

37. Pour ne pas anticiper sur ce résultat, employons les énoncés que nous venons d'établir, en leur laissant toute leur généralité. Nous pouvons d'abord classer les divers parallèles terrestres et les distinguer les uns des autres, d'après la déclinaison du parallèle céleste auquel ils répondent; ou, ce qui revient au même, d'après l'angle que leur verticale fait avec le plan de l'équateur céleste. Cet angle se nomme la *latitude géographique du parallèle*, comme nous l'avons déjà dit.

Dans la *fig.* 7, ZO est la verticale menée au point O sur le parallèle terrestre OO'. De ce même point, on mène OP parallèle à l'axe de rotation PP'; alors le plan POZ est le méridien local qui coupe l'horizontal suivant la ligne méridienne HOH', perpendiculaire à OZ. Soient EQE' le plan de l'équateur céleste, et OE une droite menée dans le méridien POZ, parallèlement à cet équateur. L'angle ZOE, ou son égal ZVE, est la latitude géographique du point O. Si la terre est sphérique, la verticale ZO passe par son centre, car toutes les verticales concourent en ce point; mais ce concours est particulier à la forme sphérique. Quelle que soit la figure de la terre, la latitude est nulle à l'équateur, parce que la verticale se trouve dans le plan de l'équateur céleste, si la terre est sphérique, ou parallèle au plan de cet équateur, dans le cas général. Aux pôles terrestres définis astronomiquement, la latitude est égale à 90°, parce qu'alors la verticale locale CP est parallèle à l'axe de rotation, et par conséquent perpendiculaire à l'équateur. La latitude

varie entre ces limites depuis 0° jusqu'à 90°. Pour appliquer ces conceptions dans la généralité que nous leur attribuons en ce moment, il faut faire abstraction de la régularité de forme avec laquelle la masse terrestre est représentée dans la *fig.* 7, qui nous sert de type. On ne doit y considérer en chaque point O que la verticale locale ZO, l'horizontale HOH′ et les droites OE, OP, contenues avec elles dans le méridien de ce point; la première parallèle au plan de l'équateur céleste, la seconde parallèle à l'axe rectiligne qui passe par les pôles du ciel, soit que les points P, P′ de la surface où les normales deviennent parallèles à cet axe se trouvent ou ne se trouvent pas diamétralement opposés autour de son centre de figure.

38. En considérant toujours la *fig.* 7 dans sa généralité de conception idéale, l'angle POH s'appelle la *hauteur du pôle sur l'horizon*. Or, les angles EOP, ZOH sont égaux, puisque tous deux sont droits. Retranchant la partie commune ZOP, il reste EOZ égal à POH; c'est-à-dire qu'*en général, la latitude géographique d'un lieu est égale à la hauteur du pôle sur l'horizon.*

Par exemple, d'après les observations de Méchain que j'ai rapportées dans le tome II, page 387, la distance du pôle boréal au zénith, à l'Observatoire de Paris, est 41°9′46″,7. La latitude géographique de cet Observatoire est donc le complément de ce nombre ou 48°50′13″,3, et c'est aussi la hauteur angulaire du pôle boréal sur son horizon.

La latitude est *boréale* pour les pays situés au nord de l'équateur; elle est *australe* pour ceux qui sont au midi.

dans l'océan Atlantique, il vient terminer, aux rivages de l'Afrique, le contour entier de la terre.

40. L'axe de la terre, qui est aussi celui du mouvement diurne, étant diversement incliné sur les horizons des différents pays, il en résulte, dans la marche générale des étoiles, des différences d'aspect remarquables qui, d'après ce qui précède, peuvent se prévoir et se décrire avec une extrême facilité.

A l'équateur, par exemple, on se trouve placé verticalement sous la direction du mouvement diurne. Un observateur, tourné vers l'orient, ayant le sud à sa droite et le nord à sa gauche, voit les étoiles situées vis-à-vis de lui s'élever verticalement dans le ciel; elles passent à son zénith et se couchent directement derrière lui : l'arc qu'elles décrivent se trouve tout entier dans un même plan perpendiculaire à l'horizon; ce plan est celui de l'équateur.

Les étoiles situées à droite et à gauche suivent une marche parallèle aux précédentes : elles décrivent donc aussi des cercles de la sphère céleste; mais ce sont des petits cercles, parce que les plans qui les contiennent ne passent pas par le centre de la sphère. La grandeur de ces cercles diminue à mesure qu'ils s'écartent de l'équateur; les étoiles qui s'y trouvent décrivent donc des cercles plus petits et moins élevés sur l'horizon; enfin, vers le sud et vers le nord, on découvre des étoiles qui décrivent des arcs si petits, que leur mouvement est à peine sensible; de sorte que les points du ciel où elles se trouvent paraissent immobiles dans le mouvement général; ce sont les pôles célestes.

41. Voilà les apparences que présente le mouvement du ciel pour un observateur situé perpendiculairement sous sa direction. Mais en revenant dans notre pays, les apparences ne sont plus les mêmes, et cela doit être; car, en changeant de lieu sur la terre, la direction de l'horizon change, et l'on a successivement au zénith différents points du ciel. Sous l'équateur, l'observateur voit les deux pôles; il cessera de les voir tous deux s'il avance vers le nord ou vers le sud. S'il marche vers le nord, son zénith se rapproche du pôle boréal, et s'éloigne du pôle austral; celui-ci s'enfonce donc sous l'horizon : il est caché par la convexité de la terre. En marchant toujours vers le nord, les étoiles qui entourent

le pôle austral s'abaissent de plus en plus, et deviennent invisibles; l'autre pôle, au contraire, s'élève sur l'horizon de la même quantité, et les étoiles qui l'entourent se dégagent de plus en plus; enfin, les cercles que décrivent quelques-unes d'entre elles s'élèvent entièrement au-dessus de l'horizon; alors ces étoiles ne se couchent plus, et, sans la trop grande clarté du soleil, elles resteraient constamment visibles. On observe les phénomènes contraires en s'avançant vers le sud.

42. Ces différences d'aspect ont fait imaginer aux géographes des dénominations pour désigner les divers pays, d'après la position de la sphère céleste relativement à leur horizon; ils disent qu'un pays a *la sphère droite*, *oblique* ou *parallèle*, selon que l'équateur céleste y est perpendiculaire, oblique ou parallèle au plan de l'horizon: le premier cas a lieu sur l'équateur terrestre, le dernier au pôle, le troisième par tout le reste de la terre.

43. La hauteur du pôle reste toujours la même au-dessus de l'horizon de chaque lieu. C'est par là que l'on sait que l'axe et l'équateur de la terre répondent toujours aux mêmes points de sa surface, comme je l'ai annoncé § 32; mais ils répondent successivement à divers points de la sphère des étoiles. L'étoile qui est placée à l'extrémité de la petite Ourse, et que nous nommons l'étoile polaire, parce qu'elle est aujourd'hui voisine du pôle, en était fort éloignée du temps d'Hipparque, c'est-à-dire il y a environ deux mille années; elle s'en approche encore peu à peu de siècle en siècle, et, après avoir atteint une certaine limite de

CHAPITRE XVIII.

Détermination exacte de la figure de la terre. Mesure exacte de ses dimensions et de sa grandeur.

SECTION I. — *Mensuration immédiate d'une portion locale de sa surface corrigée de ses inégalités accidentelles.*

Dans le chapitre II du tome Ier de cet ouvrage nous avons constaté, par des remarques très-simples, la forme arrondie de la terre, et son isolement dans l'espace; nous avons reconnu aussi que la configuration générale de sa surface s'écarte peu de la courbure des mers qui s'y entremêlent de toutes parts, et qu'elle diffère seulement de leur niveau commun par des élévations ou des dépressions locales, de dimensions presque insensibles, comparativement à celles de la masse entière. Maintenant que nous avons établi des procédés exacts d'observation et de mesures, nous allons les employer à transformer en déterminations rigoureuses ces premiers aperçus.

44. Pour prendre une idée exacte de la figure de la terre, il faut la mesurer successivement dans différents sens. Commençons donc par l'étudier dans le sens du méridien, puisque cette direction est la première que les observations nous aient fait connaître.

La chose serait facile si les méridiens terrestres étaient des courbes planes; car les considérations très-simples que nous avons exposées dans le tome I, page 20, nous ont appris dès lors que la courbure d'une courbe plane est toujours indiquée par les angles plus ou moins aigus que forment entre elles les perpendiculaires menées à ses différents points. Pour appliquer ce résultat à la terre, il suffirait donc alors de prendre, sur un même méridien, curviligne, mais plan, plusieurs points espacés à des distances connues, par exemple à égales distances, de les ramener idéalement ou par le calcul au niveau des mers environnantes, et de déterminer les angles que leurs verticales forment entre elles; car les verticales sont ici les perpendiculaires à la courbe du méridien.

Par ce moyen on reconnaîtra tout de suite si la terre est exactement sphérique, car, dans ce cas, la courbure de ses méridiens doit être partout la même: toutes les verticales concourront au centre, et quand les angles formés par ces verticales seront égaux, les arcs mesurés sur la surface terrestre devront l'être aussi sur quelque partie du méridien qu'ils soient observés. Voyez *fig.* 8, où C est le centre de la terre, AA′, A′A″ des arcs égaux mesurés sur sa surface dans le sens du méridien. En général, dans le cas des méridiens circulaires, les angles des verticales sont proportionnels aux arcs compris entre elles.

Au contraire, si la terre n'est pas sphérique, on devra s'en apercevoir; car là où elle sera plus convexe, les verticales se rencontreront plutôt dans son intérieur; là où elle sera plus aplatie, elles se rencontreront plus loin. Ainsi, pour mesurer le même angle entre ces verticales, il faudra faire plus de chemin dans le second cas que dans le premier. Voyez la courbe AA′ BB′, *fig.* 9; l'angle C formé par les verticales AC, A′C est égal à l'angle C′ formé par les verticales BC′, B′C′; mais la courbe étant plus convexe en E, plus aplatie en P, l'arc BB′ est plus grand que l'arc AA′.

48. Quoique nous ne sachions pas, à priori, si les méridiens terrestres sont des courbes planes, cependant, comme cette supposition est la plus simple possible, il est naturel de l'essayer, et de voir si les observations y sont conformes. Mais je puis d'avance prévenir qu'elle approche si près de l'exactitude, qu'il n'a pas encore été possible de mesurer la quantité dont elle s'en écarte, ou même de s'assurer d'une manière bien certaine qu'elle s'en

cales, il n'est pas nécessaire de chercher deux points dont les verticales fassent juste entre elles un angle de 1°, ce qui serait très-difficile et presque impraticable; mais on raisonnera comme si la terre était sphérique dans une petite étendue autour des points observés, ce qui permettra d'y supposer les arcs du méridien proportionnels aux angles des verticales. Si donc l'angle observé entre les verticales est V, et si M est la longueur de l'arc terrestre compris entre elles, on fera la proportion $V : M :: 1^\circ : \frac{1^\circ.M}{V}$, et la quantité $\frac{1^\circ.M}{V}$ exprimera la longueur d'un degré terrestre en ce lieu de la terre, telle qu'on l'aurait mesurée directement. Je la désignerai désormais par la lettre $D^{(0)}$, dans tout ce qui va suivre, en lui attribuant des valeurs locales, constantes ou variables, selon que l'expérience l'indiquera. Quand $D^{(0)}$ sera ainsi connu pour un lieu donné, si l'on conçoit une surface sphérique ayant une courbure égale à celle qui s'observe sur le méridien terrestre en ce lieu-là même, le contour de cette sphère sera $360\ D^{(0)}$, son demi-contour $180\ D^{(0)}$; et si l'on divise cette dernière longueur par le nombre ϖ, rapport de la demi-circonférence au rayon, lequel a pour valeur 3,1415926, ou à peu près $\frac{355}{113}$, on aura la longueur R du rayon de cette sphère qui sera $\frac{180\ D^{(0)}}{\varpi}$. En supposant la terre complétement sphérique, ce serait là le rayon commun à toute sa surface. Si elle n'est pas tout à fait sphérique, ce sera le rayon d'une sphère qui suit sensiblement sa courbure dans le sens du méridien, sur l'étendue de 1°, au lieu où l'arc M a été mesuré. Si l'on considère cet arc commun comme contenant, sur le méridien réel, deux éléments tangentiels consécutifs, infiniment petits comparativement à ses dimensions totales, la sphère ainsi décrite sera, dans l'acception géométrique, *tangente* à la surface terrestre au point milieu de l'arc; et, de plus, elle y sera *osculatrice* à cette surface *dans le sens du méridien* (*).

(*) Comme le rapport $\frac{180}{\varpi}$ se représentera fréquemment dans les transformations que nous aurons à effectuer, il sera utile d'établir ici son logarithme,

46. La mesure d'un degré du méridien exige donc deux opérations distinctes. La première est purement géométrique : c'est le tracé continu d'un même méridien terrestre, et la mesure de la courbe ainsi décrite sur la surface de la terre, ramenée à la régularité du niveau des mers; la seconde est astronomique : c'est la mesure de l'angle compris entre les verticales menées aux deux extrémités de l'arc mesuré.

Je commencerai par cette dernière, parce que le procédé qu'elle exige peut s'énoncer en deux mots : *Il suffit de mesurer les distances du même pôle au zénith des deux stations extrêmes : la différence de ces distances est l'angle que les verticales comprennent.*

Car, soient OZ, O'Z', *fig.* 10, deux verticales menées aux points O, O' du méridien OO'; et, considérant d'abord la terre comme exactement sphérique, supposons que ces verticales, prolongées vers l'intérieur de sa masse, se rencontrent au point C, qui sera son centre. Menons les rayons visuels OP, O'P', dirigés vers un même pôle céleste, conséquemment parallèles entre eux. Si, par le point O, l'on conçoit une droite Oζ, parallèle à O'Z', l'angle ZOζ sera la différence des distances du pôle au zénith dans les deux stations, et il sera évidemment égal à l'angle central ZCZ' que les deux verticales comprennent, ce qui démontre la proposition énoncée.

47. Nous supposons que les deux verticales se rencontrent. Si le méridien terrestre est une courbe plane, cette rencontre aura lieu nécessairement, quelque éloignés que soient les points extrêmes

---

et celui du rapport inverse, plus exactement qu'on ne pourrait les obtenir

de l'arc observé. Si le méridien n'est point une courbe plane, cette double courbure sera insensible, dans une étendue de quelques degrés, comme celle qu'embrassent ordinairement les observations faites dans un même pays. Les verticales menées aux deux extrémités d'un si petit arc, si elles ne se rencontrent pas mathématiquement, auront du moins leur ligne de plus courte distance très-petite, puisque la forme générale de la surface terrestre diffère très-peu d'une sphère exacte; et l'on peut pressentir qu'une telle circonstance devra produire des effets géométriques approximativement pareils à ceux d'une rencontre. Mais il est facile de donner à cette conception une forme rigoureuse, en rappelant ici quelques propriétés des surfaces sphéroïdales., qui éclaireront toute la suite des opérations que nous allons exposer.

48. Considérons une telle surface dans son acception la plus générale, sous la seule réserve que sa courbure varie, sans discontinuité brusque, sur toute son étendue. Par un quelconque M de ses points, menez-lui une *normale*, c'est-à-dire une droite indéfinie, perpendiculaire au plan qui est tangent à la surface en ce point-là. Sur cette normale prenez, dans la concavité intérieure, un point quelconque C, dont la distance au point de contact sera désignée par R. Toute sphère décrite d'un tel centre C, avec le rayon R, sera tangente à la surface, dans le point d'où la normale est menée. Mais il y aura, sur la même normale, un certain espace où les centres C donneront des sphères qui auront avec la surface un contact plus intime que toutes les autres. C'est ce que j'appellerai l'*espace d'osculation*, parce que toutes les sphères tangentes, dont le centre s'y trouve compris, suivent la courbure de la surface, chacune en un certain sens spécial, sur l'étendue de deux éléments tangentiels consécutifs, supposés infiniment petits; ce qu'on exprime en disant qu'elles sont *osculatrices* à la surface, *dans ce sens-là*. Les deux rayons extrêmes R, qui ont cette propriété, s'appellent, l'un le plus grand, l'autre le plus petit *rayon osculateur*, de la surface considérée. Si elle était une sphère rigoureuse, ils seraient égaux entre eux et au rayon même de cette sphère; alors l'espace d'osculation serait nul. Par conséquent, lorsque la surface s'écarte très-peu de la forme sphérique, cet espace devient très-petit du même ordre que l'é-

cart; et les rayons osculateurs menés des deux points qui le terminent, ne différant l'un de l'autre que par l'intervalle qu'il occupe, sont aussi très-peu différents en longueur. Cela doit donc être ainsi pour la surface terrestre, corrigée de ses inégalités locales et ramenée à la régularité du niveau des mers, puisque, dans son ensemble, elle diffère extrêmement peu de la sphéricité. Dans un tel cas, tous les centres des plus grandes sphères osculatrices, et tous les centres des plus petites, devront se trouver répartis dans l'intérieur de sa masse sur deux surfaces géométriques, de forme généralement différentes, mais toutes deux restreintes à des étendues de volume très-petites, qui se réduiraient à deux points coïncidents entre eux si la sphéricité de la surface osculée était rigoureuse.

Les choses étant ainsi, prenons, sur une quelconque des normales terrestres, un des centres d'osculation C, par exemple celui qui correspond au plus grand rayon osculateur R. La sphère décrite du centre C avec le rayon R, sera tangente à la surface régularisée, au point M où la normale est menée, et elle s'assimilera avec elle autour de ce point dans une certaine étendue superficielle, d'autant plus intimement que l'étendue ainsi considérée sera plus restreinte. Supposons-la si petite que les sécantes, menées du centre C aux points de la surface régulière qui en forment le contour extérieur, diffèrent seulement du rayon R par des quantités insensibles ou négligeables. Alors, dans toute cette étendue, les mesures de longueur et les opérations trigonométriques que l'on effectuera entre

miné la position de la pyramide de Montmartre, sur la direction de la ligne méridienne tracée dans la grande salle du même édifice. Cette ligne étant prolongée, vers le nord, de 6000 mètres, passerait dans l'axe de la pyramide. Concevez deux points encore plus distants, marqués, de même, dans une direction horizontale, P′, P″, l'un au nord, l'autre au sud de la lunette de l'instrument des passages, ils détermineraient, sur une étendue encore plus grande, la direction de l'arc méridien supposé plan. On pourrait aisément, si on le jugeait nécessaire, subdiviser l'intervalle des points P′, P″, sans sortir du même méridien terrestre. Car, puisque nous le supposons contenu dans un même plan, on n'aura qu'à établir, dans quelque point intermédiaire, un cercle portatif à limbe vertical, que l'on placera de manière que l'axe optique de sa lunette, rendu préalablement parallèle au plan de ce limbe, s'aligne exactement, sur eux, dans sa rotation. Quand cette condition sera remplie, on fera placer, de distance en distance, d'autres jalons verticaux, portant des mires, que l'on dressera d'abord approximativement à vue, sur cette direction. Lorsqu'ils en seront assez proches pour que les divisions des mires se voient dans le champ de la lunette, toujours alignée sur les signaux extrêmes, on notera celle des divisions qui se trouve sous le fil, et l'on marquera, comme précédemment, sur une plaque fixée au niveau du sol, le pied de la verticale correspondante. Le même procédé servira pour prolonger, au delà de l'intervalle P′P″, le plan vertical, conséquemment l'arc méridien qui passe par ces points. Cela sera plus simple que de transporter, pour le même but, l'instrument des passages, qui est plus difficile à établir; et l'on pourrait concevoir la ligne méridienne d'une première station continuée ainsi d'un bout à l'autre d'un continent, sur son prolongement primitif, après qu'elle aurait été déterminée par des passages d'étoiles circompolaires dans cette seule station.

31. Toutefois, dans ce cas idéal d'une si longue extension, qui sortirait des conditions restreintes auxquelles nous supposons les opérations réelles assujetties, il y aurait un grand intérêt à établir de nouveau l'instrument des passages au dernier point de la ligne ainsi tracée, et même en d'autres points intermédiaires, pour y

déterminer immédiatement, par des observations astronomiques, la direction du méridien local. Car, si les méridiens terrestres, tels que nous les avons généralement définis, page 34, n'étaient pas des courbes planes, le méridien réel, ainsi astronomiquement fixé, s'écarterait de la direction du signal précédent, et cette déviation azimutale décélerait le fait lui-même, par un caractère incontestable. Malheureusement, on ne saurait espérer de trouver une localité où le tracé direct puisse être prolongé assez loin pour qu'on pût le faire servir à une pareille épreuve. C'est pourquoi on tâche d'y suppléer, dans les grandes opérations modernes, par une autre détermination équivalente, comme je l'expliquerai plus tard. Mais, malgré la grande longueur des chaînes de triangles auxquelles on a pu l'appliquer, on n'a trouvé que des déviations finales si petites, qu'elles se confondent avec les résultats des erreurs que les observations comportent, ou qu'on y peut, tout au plus, reconnaître des indices d'accidents locaux, dont l'influence ne se fait pas sentir d'une manière suivie; de sorte que, jusqu'à présent, rien n'autoriserait à affirmer que les méridiens terrestres, dans ce qu'ils ont de régulier, ne sont pas des courbes planes. D'après cela, leur double courbure, si elle existe, doit certainement être insensible sur un arc d'un petit nombre de degrés, tel que pourrait tout au plus l'embrasser un tracé direct, comme celui que j'ai tout à l'heure décrit.

82. Même, en le restreignant à ces limites, il faudrait, pour qu'il fût exécutable sans rectification, supposer que la surface du terrain où l'on opère est partout exactement horizontale, c'est-à-dire que sa convexité est la même que celle de la surface des mers; car cette condition serait nécessaire pour qu'une chaîne ou un fil

la température à laquelle la comparaison est effectuée. Et, quand on s'en sert à une autre température, on les ramène toujours à cette longueur primitive, d'après la dilatation connue de la matière dont elles sont faites. Afin que ces règles, ou ces chaînes, quoique rectilignes, puissent s'adapter à la convexité de la surface terrestre par des applications successives, avec une suffisante approximation, il faut que leur longueur n'excède pas quelques toises des anciennes mesures de Paris, ou un nombre semblablement restreint de mètres. Elles sont étendues sur des plans inflexibles, dont les supports sont pourvus de mouvements de rappels verticaux qui permettent de les amener à une exacte horizontalité, quand le sol sur lequel on opère n'est que peu inégal. Mais, comme des accidents de localité, trop ordinaires, rendraient souvent difficile, ou même impossible d'opérer matériellement un grand nombre de contacts successifs dans cette condition unique, on y ramène, par le calcul, les contacts quelque peu obliques, d'après l'angle actuel d'inclinaison mesuré par un niveau divisé, qui est fixé au plan rigide sur lequel la règle ou la chaîne repose. Chaque système partiel, ainsi constitué, est recouvert par un toit en bois qui l'abrite contre la radiation solaire. On les peint extérieurement de couleurs différentes, pour les distinguer les uns des autres, quand on les transporte successivement pour continuer leur apposition; et des pointes métalliques, fixées verticalement aux extrémités des sommets de ces toits, servent de viseurs pour aligner les règles intérieures sur les jalons dressés aux différents points P′, P″,... que l'on a marqués sur le sol dans la direction de la ligne à mesurer. Peut-être cet alignement se jugerait mieux à travers de petites lunettes munies de réticules, dont l'axe optique physique coïnciderait avec l'axe des règles, et qui seraient fixées aux deux bouts de chaque toit, à des hauteurs tant soit peu différentes. Mais une très-petite erreur dans l'alignement de chaque règle n'a presque pas d'importance, parce que la longueur oblique diffère alors extrêmement peu de sa projection sur la ligne directe. Toutefois, la somme de ces écarts donne nécessairement une mesure totale plus longue que la véritable d'une quantité qui peut s'apprécier, en supposant, dans chaque posage, la plus grande erreur que l'on

puisse commettre; et l'on s'assure ainsi qu'elle est négligeable, même dans une mensuration très-longue, si l'on y apporte les soins nécessaires. L'apposition des règles entre elles ne se fait pas par des contacts immédiats, qui pourraient opérer des repoussements. Mais chaque règle, ou chaque chaîne, porte, à l'un de ses bouts, une *languette* mince, mobile dans une coulisse longitudinale, où elle est conduite par une vis de rappel qui sert à la faire plus ou moins sortir; et c'est le bout libre de cette languette qui se met en contact avec l'extrémité fixe de la règle précédente. La quantité de sa sortie se juge par l'indication d'un vernier qu'elle transporte avec elle le long d'une division rectiligne tracée sur la règle à laquelle elle appartient; et la coïncidence du vernier se lit avec un petit microscope fixé à cette règle. Pour opérer le mesurage, on amène d'abord l'extrémité antérieure de la première règle en coïncidence avec la verticale du premier point P′ marqué sur le sol, ce qui se juge par le contact d'un fil-à-plomb, tombant sur ce point, et dont la demi-épaisseur doit ainsi s'ajouter à la mesure totale, indiquée par l'apposition des règles successives. Cette première règle a d'ailleurs été alignée sur les jalons de repère, comme le seront toutes les autres; et si elle n'est pas exactement horizontale, on mesure de même son inclinaison pour en déduire sa projection exacte par le calcul. Cela fait, sans déplacer celle-ci, on en pose une seconde, que l'on met en contact avec elle par sa languette mobile; puis une troisième, que l'on met de même en contact avec cette seconde; et ce n'est qu'après en avoir ainsi établi sur le sol au moins trois consécutives, que l'on relève la première, pour s'en servir à

33. Si l'opération que je viens de décrire est faite sur une plage sablonneuse, longeant le bord de la mer, les règles apposées ainsi horizontalement, ou plus généralement leurs projections horizontales, calculées d'après les indications de leur niveau, si elles sont quelque peu obliques aux verticales successives, représenteront autant de petites droites consécutivement tangentes à l'arc méridien, au milieu de leur longueur. Or, dans un cercle, la différence entre un petit arc et sa tangente est moindre que le tiers du cube de cette même tangente divisé par le carré du rayon du cercle. On peut donc penser qu'en restreignant les longueurs de nos règles comme nous l'avons fait, elles seront si petites, comparativement au rayon de la terre, que leur différence avec l'arc qu'elles touchent sera négligeable; et cela peut du moins être admis dans un premier calcul approximatif. Mais, quand le rayon de la terre nous deviendra connu par cette première évaluation, nous pourrons nous assurer que la différence dont il s'agit sera en effet insensible pour chacune de nos règles, dans les bornes de longueur auxquelles nous les avons restreintes; et même la somme des différences ainsi accumulées dans une mensuration de 300000 ou 400000 mètres ne formerait pas une fraction de millimètre appréciable par les appareils physiques les plus précis.

34. Supposons maintenant que la mensuration n'ait pas été faite au bord de la mer, mais dans une vaste plaine située à l'intérieur d'un continent; et, pour nous adapter entièrement aux réalités les plus ordinaires, donnons à cette plaine une faible pente continue sur sa verticale moyenne. Quand toutes les règles apposées auront été réduites, par le calcul, à l'horizontalité sur leurs ver-

---

cessive. Les détails varient selon la disposition des appareils employés. J'ai pris principalement pour type ceux qui ont été appliqués, d'après les idées de Borda, à la mesure des bases de la grande triangulation effectuée en France par Méchain et Delambre. On en trouvera l'exposition précise dans l'ouvrage de ce dernier, intitulé : *Mesure de la Méridienne*, tome II. Les procédés employés en Angleterre pour une opération analogue ont été exposés, par le general Roy, dans les *Transactions philosophiques de la Société royale de Londres*, et ils ont été rassemblés, par le général Mudge, dans un ouvrage spécial intitulé : *An account of the operations carried on for accomplishing a trigonometrical Survey of England and Wales*; 1 vol. Londres, 1799.

4..

ticales individuelles, leurs projections, ainsi obtenues, seront autant de tangentes au cercle méridien qui passerait par le sommet de chaque verticale; et, d'après ce qu'on vient de dire, elles se confondraient sensiblement avec la petite portion d'arc qu'elles recouvrent. Ces arcs, que nous supposons ici décrits du même centre, auront des rayons d'inégales longueurs, à cause de la pente générale du sol sur lequel on a successivement porté les règles. Ainsi, avant d'en faire la somme, il faut les réduire aux dimensions que les verticales qui les terminent auraient interceptées sur un même cercle, par exemple sur celui dont le rayon R′ passerait par le point moyen de la ligne mesurée. C'est-à-dire que si h est la différence de niveau absolu entre ce point moyen et un point quelconque de la ligne, où le petit arc tangentiel est μ, il faut transformer cet arc en $\frac{\mu R'}{R' + h}$ ou $\mu - \frac{\mu h}{R' + h}$. Mais, à cause de l'excessive petitesse de h, comparativement à R′, dans les cas de faible pente que nous admettons, le terme qui exprime la correction de chaque arc μ sera individuellement insensible; et la somme de toutes les corrections s'anéantira encore, par compensation, pour la ligne entière, puisque le facteur h, qui leur donne son signe, sera positif pour les points plus élevés que le point moyen, et négatif pour les plus bas. D'après cela on pourra, sans aucune erreur, considérer l'arc total mesuré M comme appartenant au cercle méridien décrit avec le rayon moyen R′.

55. A présent admettons que, par un nivellement topogra-

bornons ici. Or, puisqu'elles interceptent l'arc circulaire M à la distance R + H du centre, elles intercepteront à la distance R un arc proportionnellement moindre, c'est-à-dire $\frac{MR}{R+H}$ ou $M - \frac{MH}{R+H}$. Cet arc, calculé, sera donc l'arc méridien que l'on aurait obtenu entre les mêmes verticales qui comprennent M, si l'on avait pu le mesurer sur le prolongement de la surface sphérique de la mer dans la région où l'on a opéré. Ce sera ce qu'on appelle l'arc M *réduit au niveau de la mer;* et le terme soustractif $-\frac{MH}{R+H}$ s'appelle la *réduction à ce niveau*. Pour l'évaluer numériquement, il faudrait connaître le rayon R, qui est précisément l'élément physique que l'on cherche à déterminer. Mais cette apparence de cercle vicieux se dissipe, en considérant que, d'après le § 45, le rayon local R + H peut se conclure de l'arc M même, puisqu'en nommant V l'angle observé entre les verticales extrêmes, exprimé en degrés sexagésimaux, sa longueur est $\frac{180^\circ M}{V\varpi}$. Ainsi la réduction cherchée de l'arc M, c'est-à-dire $\frac{MH}{R+H}$, sera $\frac{V\varpi H}{180}$; et la réduction du degré simple $D^{(\circ)}$ ou $\frac{1^\circ.M}{V}$ sera proportionnellement $\frac{\varpi H}{180}$; expressions dont tous les éléments seront connus, par les déterminations préalables de M, V, H, dans le lieu même et à la hauteur où on les aura observés (*). Il ne restera donc, pour les réduire en nombres, qu'à

(*) Par exemple, dans l'opération faite près de Quito, sur le plateau des Andes du Pérou, par les académiciens français Bouguer, Godin et la Condamine, la hauteur H de l'arc méridien M, déterminé tant par triangulation que par mensuration directe, se trouva être de 1226 toises au-dessus du niveau de la mer Pacifique. Ainsi, $D^{(\circ)}$ ou $\frac{1^\circ.M}{V}$ étant la longueur obtenue en toises, pour un degré simple à cette élévation, on dut, pour la réduire au niveau de cette mer, la diminuer d'un nombre de toises égal à $\frac{1226^T\varpi}{180}$, ou $21^T.3977$. Bouguer a pris 21^T, comme valeur suffisamment approchée; mais on serait plus scrupuleux aujourd'hui.

connaître l'angle au centre V compris entre les verticales des stations extrêmes ; et on l'obtiendra, comme nous l'avons dit, par les observations astronomiques qu'on y devra faire ; car il sera égal à la différence des distances du même pôle, aux zéniths de ces deux stations.

86. Une opération précisément pareille à celle que je viens de décrire a été faite dans l'année 1768 par les astronomes Mason et Dixon, sur la limite des États de Pensylvanie et de Maryland, dans une presqu'île qui aboutit à la mer Atlantique, entre les embouchures des rivières Chesapeack, Potomack et Delaware ; de sorte que l'arc mesuré put être alors considéré comme s'étendant sur le prolongement même de la surface de cette mer, sans aucune réduction. La mensuration, dégagée de quelques particularités qui la compliquent, fut essentiellement composée de deux parties distinctes, dont la disposition relative est représentée, *fig.* 11, par les arcs de grand cercle SS_1, S_1S_2, tracés consécutivement sur une même sphère supposée osculatrice à la surface terrestre, dans la région où ces arcs sont décrits. C désigne le centre de cette sphère, CP son rayon, parallèle à l'axe de rotation du ciel, et P le pôle auquel tous les méridiens de son hémisphère septentrional vont converger. On partit du point S, le plus voisin du pôle, et ayant déterminé, par des observations astronomiques, la direction du méridien propre à cette station, on mesura sur son prolongement un arc SS_1, qui, exprimé en pieds anglais, fut trouvé égal à $104988^{pds},4$. Alors des obstacles naturels obligèrent à dévier quelque peu vers l'est, pour suivre un autre arc de grand cercle S_1S_2 sur lequel on continua la mensuration jusqu'en S_2 ; et la longueur S_1S_2 de ce second

pôle P comme centre, on pourra bien transporter idéalement l'arc SS_1, en MM_1, sur le méridien de S_2, sans altérer sa longueur, puisque tous les méridiens sphériques sont pareils. Mais il faudra ensuite trouver l'arc M_1S_2 qui le complète sur ce même méridien, pour pouvoir l'ajouter à MM_1 comme prolongement; et cet arc M_1S_2 doit être évidemment moindre que l'oblique S_1S_2 que l'on a mesurée. Nous calculerons, plus loin, cette réduction exactement, et nous la trouverons égale à $932^{pds},45$, dont il faut diminuer l'arc S_1S_2 pour avoir M_1S_2, ce qui donnera celui-ci égal à $433079^{pds},15$. Mais, déjà, la petitesse de l'angle $S_1S_2M_1$ montre qu'on obtiendrait une valeur très-approchée de M_1S_2 en considérant $S_1M_1S_2$ comme un triangle rectiligne, rectangle en M_1, dont S_1S_2 serait l'hypoténuse; auquel cas on aurait M_1S_2 égal à $S_1S_2 \cos S_1S_2M_1$, ce qui donnerait pour sa valeur $433094^{pds},69$, excédant seulement de $15^{pds},54$ sa valeur exacte. On pourrait donc employer ce résultat comme une première évaluation approximative, qui servirait à trouver l'arc méridien total MS_2, compris entre les parallèles des stations extrêmes, et par suite le rayon de la sphère osculatrice locale; résultats que l'on corrigerait ultérieurement par un second calcul, fondé sur la valeur ainsi obtenue de ce rayon. Pour éviter ce détour, j'emploierai de prime abord les résultats définitifs, avec la petite réduction de $15^{pds},54$ due à la courbure sphérique du triangle $S_1M_1S_2$, sauf à prouver plus tard que la longueur approximative du rayon terrestre qu'on obtiendrait sans en tenir compte suffirait pour calculer très-exactement sa valeur (*). L'arc oblique M_1S_2 ainsi réduit

---

(*) Pour apprécier l'exactitude de ce raisonnement, il n'y a qu'à effectuer le calcul du degré avec la valeur de MS_2 supposée égale à $433094^{pds},69$ au lieu de $433079^{pds},15$. En l'ajoutant de même à SS_1 ou à son égale MM_1, qui est $104981^{pds},4$, l'arc méridien total compris entre les parallèles de S et de S_2 sera $538065^{pds},55 + 15^{pds},54$. Il faudra encore l'augmenter de $10^{pds},84$ pour réduire le mesurage à la température de $16^{\circ},25$, ce qui donnera $538075^{pds},39 + 15^{pds},54$. En divisant cette somme par l'angle $1^{\circ}28'45''$, compris entre les verticales extrêmes, la longueur du degré sexagésimal donnée par cette première approximation sera

$$\frac{1^{\circ}.538075^{pds},39}{1^{\circ}28'45''} + \frac{1^{\circ}.15^{pds},54}{1^{\circ}28'45''} = 363771^{pds},3 + 10^{pds},51 = 363781^{pds},81.$$

On verra plus tard que cette première évaluation, malgré la petite circon

sera donc $433094^{pds},69 - 15^{pds},54$ ou $433079^{pds},15$. En l'ajoutant à SS_1 ou à son égale MM_1, qui était $104988^{pds},4$, on aura pour somme MS_2 égal à $538067^{pds},55$. Il faut ajouter à ce nombre $10^{pds},84$, pour que les chaînes métalliques employées à la mensuration se trouvent ramenées à la température de 60° Fahrenheit, ou $16^{\circ}\frac{2}{3}$ du thermomètre centésimal, qui était celle à laquelle la toise de la Société royale de Londres était rapportée comme étalon de mesure. L'arc total de méridien MS_2 ou M, compris entre les parallèles des stations extrêmes, était donc ainsi égal à $538078^{pds},39$ (*).

Maintenant, les distances du pôle au zénith, observées aux deux points extrêmes S, S_2, ont été trouvées telles qu'il suit :

A la station la plus australe S_2	51°32′26″
A la station la plus boréale S ou M	50° 3′41″
Différence, ou angle compris entre les verticales extrêmes	1°28′45″

57. Pour obtenir la longueur du degré terrestre qui résulte de ces observations, supposons la terre sensiblement sphérique, dans une petite étendue autour des points observés; ou, ce qui revient au même, considérons ces points comme situés sur la

---

de $10^{pds},51$ qui l'affecte, serait très-suffisamment exacte pour calculer la réduction que nécessite la sphéricité du triangle $S_1S_2M_1$, ce qui tient au peu d'étendue de ce triangle et à la petitesse de l'angle azimutal en S_2.

(*) Voulant présenter cette opération plutôt comme un exemple que comme un modèle définitif, j'ai omis plusieurs particularités de détail qui en auraient inutilement compliqué l'exposition. Ainsi le premier arc SS_1, *fig.* 11, n'a pas été effectivement mesuré sur un même méridien, mais sur trois portions de méridiens différents; et les extrémités de ces portions qui se suivaient ont été placées, par des observations astronomiques, sur des

sphère locale, qui se confondrait avec la surface réelle dans la région où l'opération a été faite. Alors les arcs de méridien mesurés sur cette sphère seront proportionnels aux angles au centre compris entre les verticales qui les limitent. Ainsi, la longueur $D^{(o)}$ d'un degré sexagésimal y sera $\frac{1^{\circ}.538078^{pds},39}{1^{\circ}28'45''}$ ou, en nombres ronds, 363771 pieds anglais, sur la partie du méridien où la distance du pôle au zénith est, en moyenne, 50°48'. Si l'on veut exprimer cette longueur en anciennes toises françaises, identiques à l'étalon en fer adopté par l'Académie des Sciences, il faut savoir que celle-ci est, par rapport à celle de la Société royale de Londres, comme 76,734 est à 72; d'où il suit que pour convertir le résultat précédent en pieds français, il faut le multiplier par $\frac{72}{76,734}$; et si l'on veut ensuite l'exprimer en toises, il faut le diviser par 6, ou, ce qui revient au même, le multiplier tout de suite par $\frac{12}{76,734}$. On obtient ainsi 56888 toises pour la longueur de 1° du méridien à la latitude de 39°11'56",5 moyenne entre les précédentes. S'il s'agissait d'un degré décimal ou d'un grade, il faudrait réduire le résultat précédent dans le rapport de 400 à 360, ou, ce qui revient au même, il faudrait en prendre les $\frac{9}{10}$, ce qui donnerait $51199^{t},2$ pour la longueur d'un grade à la latitude de $43^{r},5545$.

Si la terre était exactement sphérique, on pourrait, d'après ce résultat, calculer ses dimensions. Car la valeur de 1 degré sexagésimal étant 56888 toises, la circonférence entière serait $360.56888 = 20479680$ toises. En multipliant ce nombre par $\frac{113}{355}$, rapport rapproché du diamètre à la circonférence, on aurait le diamètre de la terre égal à 6518884 toises, et son rayon 3259442 toises. Mais ces déductions ne peuvent être considérées que comme provisoires, jusqu'à ce que nous ayons comparé entre elles les mesures des degrés obtenues ainsi, dans diverses régions, pour des distances moyennes du pôle au zénith très-inégales, afin de découvrir s'il existe des différences appréciables entre leurs

longueurs, ce qui décèlerait que la surface terrestre s'écarte d'une sphéricité rigoureuse.

88. Toutefois, les résultats ici obtenus vont déjà nous servir pour démontrer l'exactitude de plusieurs considérations approximatives, dont j'ai fait usage dans la série des raisonnements, et je vais les reprendre, en suivant le même ordre dans lequel je les ai introduites.

La première, c'est que chacune des règles employées à la mensuration étant rendue normale à la verticale qui passe par son milieu, peut être censée se confondre avec le petit arc terrestre dont chacune de ses moitiés sont les tangentes.

Pour nous en assurer, nommons α un petit arc pris sur la circonférence d'un cercle dont le rayon soit 1. Cet arc, étant moindre que 45°, sera exprimé en fonction de sa tangente par la série suivante, qui se démontre dans les éléments de géométrie :

$$\alpha = \text{tang}\,\alpha - \tfrac{1}{3}\,\text{tang}^3\,\alpha + \tfrac{1}{5}\,\text{tang}^5\,\alpha \ldots.$$

Plus l'arc α sera petit, comparativement au rayon pris pour unité, plus la fraction qui exprime sa tangente sera petite, et inversement. Si cette fraction devient si faible, que son cube et ses puissances supérieures dépassent l'ordre de décimales que l'on croit pouvoir apprécier, l'arc α se confondra avec sa tangente dans les mêmes limites d'approximation.

Soit maintenant A un arc de cercle qui soutende le même angle au centre que α, dans un cercle décrit avec le rayon R. La proportionnalité des lignes homologues dans les figures semblables

C'est précisément pour la réduire au premier de ces termes, que l'on restreint les règles de mensuration à de très-petites longueurs. Supposons-les, par exemple, de 2 toises comme dans les opérations faites en France; la moitié, 1 toise, sera tang A. Or, l'opération de Pensylvanie nous a donné, en toises,

$$R = 3259442.$$

Quoiqu'elle ait été faite sans la correction que nous voulons ici apprécier, l'erreur qui en peut résulter dans l'évaluation de R ne peut être que très-petite, comme cette correction elle-même. Nous pouvons donc, sans cercle vicieux, employer la valeur ainsi obtenue de R, pour calculer les termes de notre série où elle entre comme diviseur, la limitation de tang A devant évidemment les rendre d'une petitesse excessive. Et le résultat même nous montrera s'il aurait été nécessaire d'en tenir compte dans le premier calcul de R. Or, en considérant d'abord le premier de ces termes, et l'évaluant par logarithmes, on trouve

$$\frac{1}{3}\frac{\tang^3 A}{R^2} = \frac{1}{3(3259442)^2} = 0^T,00000\ 00000\ 00031\ 3756.$$

Telle est donc la valeur de ce premier terme pour une seule demi-règle, et tous les suivants seront encore progressivement bien plus petits. Supposez 50000 règles entières apposées ainsi bout à bout, ce qui composera un arc plus grand que celui de Pensylvanie. La somme de tous les termes pareils sera celui-ci répété 100000 fois, c'est-à-dire

$0^T,00000\ 00031\ 3756$; ou, en lignes, $0^l,00000\ 27108\ 5184$.

Cette somme sera donc tout à fait inappréciable aux procédés de mensuration les plus précis; et ainsi la correction dont elle résulte a pu être très-légitimement négligée dans l'opération de Pensylvanie, comme dans toutes les autres du même genre, mais seulement, toutefois, sous la condition que la mensuration est faite avec des règles ou des chaînes dont les longueurs sont suffisamment restreintes, comme nous l'avons suppposé ici.

39. Il faut maintenant légitimer la petite correction de $15^{pds},54$,

que j'ai dit avoir été nécessaire dans l'opération de Pensylvanie, pour projeter sur le méridien de la dernière station la seconde portion d'arc de grand cercle qui avait été mesurée dans une direction tant soit peu différente; ceci me donnera lieu d'exposer divers théorèmes approximatifs qui, non-seulement vont nous servir dans ce cas spécial, mais qui nous deviendront ultérieurement indispensables, pour calculer toutes les autres opérations analogues, dans lesquelles la mensuration directe de l'arc méridien a été suppléée, en partie, par une triangulation.

Soit α un arc de cercle exprimé en parties du rayon pris pour unité de longueur. Lorsque cet arc n'embrasse qu'un petit nombre de degrés, son sinus et sa tangente, exprimés en parties de la même unité, ont avec lui des relations de grandeur, représentées par les quatre séries suivantes, qui sont toujours convergentes dans le cas supposé de limitation (*),

(1) $$\sin\alpha = \alpha - \tfrac{1}{6}\alpha^3 + \tfrac{1}{120}\alpha^5 \ldots;$$

(2) $$\operatorname{tang}\alpha = \alpha + \tfrac{1}{3}\alpha^3 + \tfrac{2}{15}\alpha^5 \ldots;$$

(3) $$\alpha = \sin\alpha + \tfrac{1}{6}\sin^3\alpha + \tfrac{3}{40}\sin^5\alpha \ldots;$$

(4) $$\alpha = \operatorname{tang}\alpha - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3\alpha + \tfrac{1}{5}\operatorname{tang}^5\alpha \ldots.$$

Prenez, dans chaque série, le logarithme tabulaire des deux membres; et, séparant le logarithme du facteur qui est commun à tous les termes du second membre, développez en série le logarithme de l'autre facteur dont le premier terme sera toujours 1. Pour abréger ces expressions, nommez L le module direct des

Vous trouverez :

(1) $$\log \sin \alpha = \log \alpha - \frac{k}{6}\alpha^2 - \frac{k}{100}\alpha^4 \ldots;$$

(2) $$\log \operatorname{tang} \alpha = \log \alpha + \frac{4}{3}\alpha^2 + \frac{7}{90}\alpha^4 \ldots;$$

(3) $$\log \alpha = \log(\sin \alpha) + \frac{k}{6}\sin^2 \alpha + \frac{11}{100}k \sin^4 \alpha \ldots;$$

(4) $$\log \alpha = \log \operatorname{tang} \alpha - \frac{k}{3}\operatorname{tang}^2 \alpha + \frac{13}{90}k \operatorname{tang}^4 \alpha \ldots.$$

La portion ultérieure des seconds membres que je n'ai point écrite, commence par des termes du sixième ordre. Ces séries ont été données par Euler sous des formes qui montrent les lois de leurs coefficients numériques, ce qui permettrait de les prolonger indéfiniment.

60. Dans les applications qu'on en fait aux calculs des opérations que nous voulons considérer, l'arc α, exprimé en parties de la graduation du cercle dont il est un élément, est toujours moindre que 2° ou 7200″ sexagésimales. Or, en le restreignant à cette limite, les deux premiers termes du second membre suffiront toujours pour avoir la valeur du premier, avec une exactitude que les observations astronomiques et les opérations de mensuration sont loin d'atteindre.

Pour établir ce fait, il faut considérer que, dans ces formules, l'arc α et les lignes trigonométriques qui s'y rapportent, sont censés exprimés en parties du rayon du cercle pris pour unité de longueur; de sorte que les égalités indiquées ont lieu entre des nombres abstraits. Il convient de laisser cette forme aux lignes trigonométriques, qui sont toujours données ainsi par les Tables usuelles. Mais, dans les termes où l'arc α entre explicitement, si nous voulons, pour notre épreuve, l'exprimer en secondes de degré, il faudra diviser la valeur qu'on lui attribuera par le rayon plié en arc et exprimé de la même manière, afin de conserver à ces termes la même valeur abstraite qu'ils sont supposé représenter. Je désignerai cette expression du rayon du cercle par R″; et, comme l'usage en revient sans cesse dans les calculs que nous aurons à effectuer, je donnerai ici, une fois pour toutes, sa valeur et

celle de son logarithme tabulaire, avec beaucoup plus de décimales qu'on n'aura jamais besoin d'en employer. Ces valeurs sont

$$R'' = 206264'',80624\,70963\,55156,$$
$$\log R'' = 5,31442\,51331\,76459\,48047.$$

J'explique en note le calcul numérique par lequel on les obtient (*).

(*) Les valeurs de R″ et de log R″ que j'ai rapportées ici s'obtiennent de la manière suivante. Soit ϖ le rapport de la circonférence au diamètre qui se déduit de la comparaison des polygones réguliers inscrits et circonscrits. Si l'on désigne par C la circonférence d'un cercle dont le rayon, exprimé dans la même unité de longueur, sera R, on aura évidemment

$$2\varpi R = C, \qquad \text{et} \qquad R = \frac{1}{2}\frac{C}{\varpi}.$$

Prenons pour unité de longueur l'arc qui soutend, au centre du cercle, un angle égal à 1 seconde de degré sexagésimal. La demi-circonférence $\frac{1}{2}$C comprenant 180°, le nombre total de ces arcs qui compose son contour sera 180.60.60 ou 648000. Remplaçant donc $\frac{1}{2}$C par cette évaluation, R se trouvera exprimé dans la même espèce d'unité; et, en les désignant par l'indice usuel ″, on aura

$$R'' = \frac{648000''}{\varpi}.$$

Le nombre ϖ a été calculé avec beaucoup de patience par plusieurs mathématiciens, dont les résultats se sont mutuellement vérifiés. Wega, dans ses Tables logarithmiques, le donne jusqu'à 140 décimales, et son résultat est rapporté par Delambre à la page 25 de la préface des *Tables de Borda*. En se bornant à 20 décimales, on a

Supposant donc, dans ce qui va suivre, que l'arc α sera exprimé en secondes, je remplace la lettre qui le représente par $\frac{\alpha}{R''}$,

---

pression de R'', si l'on retranche ce logarithme de celui de l'unité qui est o, on aura

$$\log\left(\frac{1''}{R''}\right) = \bar{6},68557\,48668\,23540\,51953.$$

Celui-ci, dans ses sept premières décimales, augmentées d'une unité sur la dernière, reproduit le logarithme de sin 1'' tel qu'il est indiqué dans les Tables usuelles. Pour voir la raison de cette rencontre, formons l'expression du logarithme de ce sinus par les séries rapportées dans le texte. L'arc α devant alors être 1'', il faudra l'y représenter par son rapport au rayon réduit aussi en secondes, c'est-à-dire par $\frac{1''}{R''}$; on aura ainsi

$$\log \sin 1'' = \log\left(\frac{1''}{R''}\right) - \frac{k}{6}\left(\frac{1''}{R''}\right)^2 - \frac{k}{180}\left(\frac{1''}{R''}\right)^4 \ldots.$$

Le premier terme de sa valeur se trouve ainsi être $\log\left(\frac{1''}{R''}\right)$, et l'on voit que les suivants ne pourront y ajouter que des décimales très-éloignées. En effet, si l'on calcule seulement le second avec les logarithmes que j'ai rapportés, et en prenant pareillement celui de 6 avec dix décimales, on trouve

$$\log\left[\frac{k}{6}\left(\frac{1''}{R''}\right)^2\right] = \overline{12},23078\,27945.$$

Le premier chiffre significatif du nombre correspondant sera donc une décimale du treizième ordre, et les termes suivants seront évidemment bien plus petits encore. Conséquemment, dans les Tables usuelles où l'on se borne à sept décimales, le log sin 1'' doit être exprimé par le $\log\left(\frac{1''}{R''}\right)$, limité de la même manière, comme en effet nous le trouvons.

D'après cela, lorsqu'un arc α, donné en secondes, est assez petit pour que le cube de son rapport à R'' puisse être considéré comme négligeable, on peut, dans cette concession d'approximation, prendre

$$\sin\alpha = \alpha'' \sin 1'', \qquad \text{et aussi} \qquad \operatorname{tang}\alpha = \alpha'' \sin 1'';$$

en effet, les développements complets donneraient

$$\sin\alpha = \left(\frac{\alpha''}{R''}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha''}{R''}\right)^3 \ldots, \qquad \operatorname{tang}\alpha = \left(\frac{\alpha''}{R''}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha''}{R''}\right)^3 \ldots.$$

Puisque la petitesse supposée de $\left(\frac{\alpha''}{R''}\right)$ permet de borner ces expressions à

dans les termes de nos quatre égalités qui la contiennent hors de signes trigonométriques; et, limitant les séries à leurs deux premiers termes, que je vais montrer devoir toujours nous suffire nous aurons

$$(1) \qquad \log \sin \alpha = -\log R'' + \log \alpha - \frac{k}{6}\frac{\alpha^2}{R''^2};$$

$$(2) \qquad \log \operatorname{tang} \alpha = -\log R'' + \log \alpha + \frac{k}{3}\frac{\alpha^2}{R''^2};$$

$$(3) \qquad \log \alpha = +\log R'' + \log \sin \alpha + \frac{k}{6}\sin^2 \alpha;$$

$$(4) \qquad \log \alpha = +\log R'' + \log \operatorname{tang} \alpha - \frac{k}{3}\operatorname{tang}^2 \alpha.$$

Pour éprouver ces expressions ainsi restreintes, je suppose l'arc α égal à 2° ou 7200″, valeurs toujours supérieures à celles qu'il pourra recevoir dans les opérations géodésiques. Alors il faudra le remplacer ici par le nombre 7200. Avec cette donnée, j'évalue d'abord $\log \sin \alpha$ et $\log \operatorname{tang} \alpha$ par les deux premières égalités, en me servant, pour plus de précision, de Tables logarithmiques à dix décimales. Puis je compare le résultat aux valeurs exactes de ces mêmes logarithmes prises avec un nombre de décimales pareil. Je trouve ainsi :

$\log \sin \alpha$ calculé par α,	répond à $\alpha = 2° + 0'',0000582$;
$\log \operatorname{tang} \alpha$ calculé par α,	répond à $\alpha = 2° - 0'',0008336$.

Je répète la même épreuve sur les deux dernières séries, en prenant alors pour données les valeurs exactes de $\log \sin \alpha$ et de $\sin \alpha$, ou de $\log \operatorname{tang} \alpha$ et de $\operatorname{tang} \alpha$, telles que les Tables les donnent; je

Je montre en note le détail de ces vérifications par un exemple(*) : or, les observations les plus précises d'angles ne peuvent jamais atteindre les millièmes de seconde. Nos quatre expressions, ainsi restreintes, seront donc toujours parfaitement suffisantes lorsque l'arc α ne dépassera pas 2°. Les deux premières fournissent

---

(*) Je suppose que l'on veuille vérifier le degré d'exactitude de l'expression (1) pour un arc de 2° ; cette expression est

$$\log \sin \alpha = -\log R'' + \log \alpha - \frac{k}{6}\frac{\alpha^2}{R''^2};$$

α devra y être remplacé par 7200. Je prends le logarithme de ce nombre avec dix décimales, et, restreignant celui de R'' de la même manière, le calcul s'achèvera comme il suit :

$$\begin{array}{rl} \log 7200 = & 3,85733\,24964 \\ -\log R'' = & -5,31442\,51332 \\ \hline \log\left(\frac{\alpha}{R''}\right) = & \bar{2},54290\,73632 \\ -\frac{k}{6}\frac{\alpha^2}{R''^2} = & -0,00008\,81958 \\ \hline \log \sin \alpha = & \bar{2},54281\,91674 \\ \log \sin 2^\circ = & \bar{2},54281\,91639 \\ \hline \text{Excès de la formule...} & +35 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log\left(\frac{\alpha}{R''}\right)^2 = & \bar{3},08581\,47264 \\ \log\left(\frac{k}{6}\right) = & \bar{2},85963\,30609 \\ \hline & \bar{5},94544\,77873 \\ \frac{k}{6}\frac{\alpha^2}{R''^2} = & 0,00008\,81958 \end{array}$$

Le logarithme exact de sin 2°, ici rapporté comme élément de comparaison, est pris dans les Tables de Briggs intitulées : *Trigonometria Britannica*. Les trente-cinq unités d'excès, dans les derniers chiffres du logarithme calculé par notre formule restreinte, répondent à un excès d'arc égal à 0",00005 8206. Il en résulte donc que le log sin α, ainsi conclu des deux premiers termes de nos séries, ne se trouve pas être exactement celui de 2°, mais de 2°+0",00005 8206, comme je l'ai dit dans le texte. Les limites d'exactitude des trois autres expressions, qui donnent log tang α et log α, s'obtiennent par un calcul absolument pareil.

Il ne sera pas inutile de reproduire ici une conséquence que l'on a fréquemment occasion d'appliquer, mais de laquelle ceux qui l'emploient ne se rendent pas toujours un compte exact. Supposons qu'au lieu de prendre l'arc α égal à 2°, on le fasse seulement égal à 1 seconde. En appliquant à ce cas nos expressions approchées de log sin α et de log tang α, il faudra remplacer l'arc α'' par 1 ; et, en se bornant encore à dix décimales, on aura

un moyen très-commode pour obtenir le logarithme du sinus ou de la tangente d'un arc borné à cette limite, et dont la valeur donnée contiendrait plusieurs décimales de seconde que l'on croirait occasionnellement ne pas devoir négliger. Car on obtiendra ainsi ces logarithmes plus exactement, et plus aisément, que si on les déduisait des Tables par les parties proportionnelles.

Veut-on connaître les valeurs linéaires que représentent les quatre erreurs que nous venons de calculer, en supposant que l'arc de 2° qu'elles affectent soit pris sur le contour d'un grand cercle de la terre supposée sphérique? Pour cela, il n'y a qu'à se donner, par anticipation, la valeur moyenne d'un degré terrestre, que nous trouverons bientôt être 57014,5 toises, de l'ancien étalon adopté par l'Académie des Sciences. Alors la soixantième partie d'un degré, ou 1′, sera $950^{T},2417$; et la soixantième partie de cette minute, ou 1″, sera $15^{T},83736$. Multiplions maintenant par ce nombre la plus grande erreur de nos séries, qui est 0″,0015434 pour un arc de 2°; le produit sera $0^{T},024443$, ou, en lignes, $21^{l},119$. Cette quantité serait beaucoup trop faible pour qu'on pût espérer de la saisir, sur la longueur d'un si grand arc. Et l'erreur d'évaluation

---

d'abord, pour leur premier terme,

$$\begin{aligned} \log 1 &= 0,00000\,00000 \\ -\log R'' &= -\,5,31442\,51332 \\ \hline \log\left(\frac{1''}{R''}\right) &= \bar{6},68557\,48668 \end{aligned}$$

qu'elle représente deviendra encore plus petite, dans la proportion des amplitudes, pour des arcs moindres, comme sont toujours ceux auxquels on a occasion d'appliquer les expressions précédentes. On pourra donc la négliger sans hésitation.

61. On peut représenter par des développements analogues toute fonction de l'arc α dont la forme serait donnée. Supposons, par exemple, que l'on veuille exprimer ainsi les relations de la corde avec l'arc qu'elle soutend. On aura, par définition,

$$\text{corde}\,\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Rapportons d'abord l'arc α au rayon du cercle pris pour unité de longueur. Si l'on veut avoir la corde en fonction de l'arc, il faudra développer $\sin\frac{1}{2}\alpha$ suivant les puissances de $\frac{1}{2}\alpha$. Si l'on veut, au contraire, l'arc en fonction de la corde, il faudra développer l'arc $\frac{1}{2}\alpha$ en fonction de son sinus qui est $\frac{1}{2}$ corde α. Effectuant donc ces opérations, et faisant ensuite disparaître le dénominateur commun 2, on trouvera d'abord

$$\text{corde}\,\alpha = \alpha - \tfrac{1}{24}\alpha^3 + \tfrac{1}{1920}\alpha^5 \ldots;$$

et

$$\alpha = \text{corde}\,\alpha + \tfrac{1}{24}(\text{corde}\,\alpha)^3 + \tfrac{3}{640}(\text{corde}\,\alpha)^5 \ldots.$$

La petitesse des fractions $\frac{1}{1920}$, $\frac{3}{640}$, qui multiplient les puissances cinquièmes, montre d'avance qu'on pourra toujours négliger ces termes, pour des arcs moindres que 2°. Alors, en prenant les logarithmes tabulaires des deux membres de chaque égalité, et restreignant les développements à leurs deux premiers termes, on trouvera

$$\log(\text{corde}\,\alpha) = \log\alpha - \frac{k}{24}\alpha^2, \qquad \log\alpha = \log(\text{corde}\,\alpha) + \frac{k}{24}(\text{corde}\,\alpha)^2;$$

ou, si l'on veut exprimer l'arc α en secondes de degré, hors des signes trigonométriques,

$$\log\text{corde}\,\alpha = -\log R'' + \log\alpha - \frac{k}{24}\frac{\alpha^2}{R''^2},$$

$$\log\alpha = \log R'' + \log(\text{corde}\,\alpha) + \frac{k}{24}(\text{corde}\,\alpha)^2$$

62. Dans les applications, il arrive souvent que l'arc α n'est pas donné par sa valeur angulaire, mais par la longueur A qu'il occupe sur un grand cercle de la sphère où il a été mesuré linéairement. Alors on peut vouloir connaître, sur ce même cercle, les longueurs absolues de son sinus, de sa tangente et de sa corde, que je représente respectivement par sin A, tang A, corde A. Or, elles se déduisent également de nos formules approximatives, en supposant toujours que l'arc A n'occupe pas, sur son cercle, un arc qui dépasse 2°. En effet, désignons par R le rayon de ce cercle, exprimé dans la même espèce d'unité de longueur que l'arc A. Si l'on nomme α l'arc qui soutend le même angle dans un cercle dont le rayon serait 1, la proportionnalité des lignes homologues, dans les figures semblables, donnera évidemment

$$A = R\alpha, \qquad \sin A = R \sin \alpha, \qquad \operatorname{tang} A = R \operatorname{tang} \alpha,$$
$$\operatorname{corde} A = R \operatorname{corde} \alpha.$$

Tirez donc de ces égalités les valeurs de α, $\sin\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$, $\operatorname{corde}\alpha$, et celles de leurs logarithmes tabulaires, puis substituez-les dans les développements que nous avons formés, en les bornant toujours à leurs deux premiers termes que nous avons reconnu devoir toujours suffire pour un arc d'une telle amplitude. Il en résultera l'ensemble des formules approximatives suivantes :

$$\sin A = A - \frac{1}{6}\frac{A^3}{R^2}, \qquad \operatorname{tang} A = A + \frac{1}{3}\frac{A^3}{R^2},$$

où il faut toujours se rappeler que l'on a, en se bornant à dix décimales,

$$k = 0,4342944819, \quad \log k = \bar{1},6377843113.$$

On peut remplacer le rayon R par sa valeur en fonction du degré sexagésimal, mesuré sur le cercle auquel l'arc A appartient. Car, soit $D^{(0)}$ la longueur de ce degré exprimé dans la même espèce d'unités linéaires que A. D'après ce qui a été démontré dans la page 42 (note), si l'on fait, par abréviation,

$$\omega = \frac{180}{\varpi},$$

on aura

$$R = \omega D^{(0)} \quad \text{et} \quad \log \omega = 1,7581226324.$$

Toutes ces expressions ont été données par Delambre dans le tome II de l'ouvrage intitulé : *Base du système métrique décimal*. Leur principal avantage consiste en ce que, lorsqu'on veut calculer leur premier membre, par l'élément du second qui se trouve actuellement donné, la partie principale de la valeur cherchée s'obtient immédiatement par celle de cet élément même, et le rayon R n'entre que dans les termes correctifs, toujours très-petits. Ainsi la longueur linéaire de ce rayon, ou du degré $D^{(0)}$ qui le représente, n'a pas besoin d'être connue avec la dernière rigueur, mais seulement par une évaluation approximative. Cela est rendu évident par la petitesse du facteur $\frac{1}{\omega^2}$ ou $\frac{k}{\omega^2}$ qui affecte tous ces termes, et qui atténue ainsi les erreurs que l'on aurait pu commettre dans l'appréciation du degré $D^{(0)}$, le rapport $\frac{A}{D^{(0)}}$ devant être toujours moindre que 2. Alors, quand on applique ces formules à des mesures d'arcs méridiens, effectuées dans une région quelconque de la terre, on pourrait, comme première approximation, calculer les termes correctifs, en donnant au rayon R la valeur que l'on conclurait de ces mesures mêmes, en faisant d'abord abstraction de ces termes; sauf à les recalculer de nouveau plus exactement

lorsque l'ensemble de tous les résultats aurait fait mieux connaître la valeur locale qu'il convient de lui attribuer. Mais, dans l'état actuel de la géodésie, ces valeurs du rayon R, très-peu différentes les unes des autres, sont déjà connues partout assez approximativement par les opérations déjà faites, pour qu'on puisse les employer de prime abord dans le calcul des termes correctifs, sans passer par le détour de la première évaluation que l'on obtiendrait en les négligeant; et cette conception, qui ne fait que prévenir les conséquences d'une rectification ultérieure, permet d'arriver directement aux résultats locaux définitifs, sans avoir l'inconvénient d'un cercle vicieux.

65. Il n'y a que deux cas où il devient indispensable d'avoir les valeurs locales de R ou de $D^{(0)}$ avec une plus grande exactitude. C'est lorsque, l'arc A étant donné en mesures linéaires, on veut en conclure l'angle au centre correspondant α en secondes, par son expression algébrique $\alpha = \frac{A}{R} R''$, sans le déterminer astronomiquement par la mesure de l'angle céleste compris entre les normales qui le contiennent; ou, réciproquement, lorsque α étant ainsi donné, on veut en conclure l'arc A par l'expression inverse $A = \frac{R\alpha}{R''}$. Alors, pour effectuer exactement de pareilles conversions, où le rayon local R entre avec toute sa valeur, il faut avoir préalablement déterminé la figure générale de la terre, avec assez d'universalité, comme de précision, pour pouvoir assigner théoriquement

$S_1 S_2$ de la *fig.* 11, pour obtenir l'arc $M_1 S_2$ du méridien de la dernière station qui est compris entre les mêmes parallèles terrestres. Cette recherche nous sera ultérieurement très-utile. Car un calcul exactement pareil se représente dans toutes les opérations analogues que nous aurons à considérer, non-seulement quand on arrive à leur terme final, mais même pour projeter sur le méridien les diverses portions d'arcs sphériques qui les composent, lesquels sont toujours plus ou moins obliques à cette direction.

Pour éviter les confusions de lignes, je reproduis séparément ici ce système d'arcs dans la *fig.* 12, en l'y plaçant sur la même sphère locale dont le rayon polaire est CP. J'y ajoute cette spécification de localité par anticipation, puisque, dans cette première épreuve, qui ne sera qu'approximative, nous pourrions considérer la surface terrestre régularisée comme étant absolument sphérique, et décrite avec un rayon constant. Mais il n'en coûtera pas plus de nous mettre, dès à présent, dans l'hypothèse plus générale d'une sphère osculatrice variable, sauf à voir si nous pourrons déterminer son rayon local avec une approximation suffisante pour l'usage que nous en voudrons faire, ou si nous devrons nous résoudre à négliger d'abord cette modification de localité. Ici, cette sphère sera caractérisée par la condition de se confondre sensiblement avec la surface terrestre dans la petite étendue superficielle où l'on a mesuré l'arc $S_1 S_2$, et d'avoir son rayon polaire CP parallèle à l'axe de rotation du ciel. Alors ce sera sur sa superficie que nous construirons le triangle sphérique $S_1 S_2 M_1$, dont le côté $S_2 M_1$ représentera la direction du méridien de S_2, avec lequel l'arc $S_1 S_2$ forme l'angle observé i. Quel que puisse être le rayon de cette sphère osculatrice, je le représente par R, en le concevant exprimé dans les mêmes espèces d'unités de longueur qu'on a employées pour mesurer l'arc $S_1 S_2$.

Maintenant, du point S_1, le plus boréal de l'oblique $S_1 S_2$, je mène, sur notre sphère, un arc de grand cercle $S_1 N$, perpendiculaire au méridien $S_2 M_1$. Le triangle polaire $PS_1 N$ ayant PS_1 pour hypoténuse, PN sera moindre que PS_1, parce que l'angle en P est nécessairement très-petit; et comme PM_1 est égal à PS_1, par construction, puisque les points S_1, M_1 doivent appartenir à un même

parallèle terrestre, M_1N sera situé sur le prolongement de S_2M_1, en se rapprochant du pôle, ainsi qu'on l'a représenté dans la figure. Cela posé, je vais d'abord calculer l'arc total S_2N. Je déterminerai ensuite la longueur de l'arc M_1N, par la condition que les deux points M_1, S_1 soient également distants du pôle sur leurs méridiens respectifs. Alors, $S_2N - M_1N$ sera la longueur cherchée de l'arc méridien S_2M_1.

Les trois arcs de grands cercles S_1S_2, S_1N, S_2N, forment sur notre sphère, dont le rayon est R, un triangle sphérique, rectangle en N, dans lequel on connaît l'hypoténuse S_1S_2, que je nomme A, avec l'angle adjacent S_1S_2N égal à $3^\circ 43' 30''$, que j'appellerai i. On cherche le côté S_2N que je désigne par A', et le côté S_1N que je désigne par Δ'. Pour ne pas introduire explicitement dans le calcul l'espèce particulière d'unités linéaires dans lesquelles l'arc A est exprimé, et qu'il faudrait aussi appliquer au rayon R, je mène idéalement, à partir du centre C, trois rayons, ou verticales, dirigées aux points S_1, S_2, N; puis je les coupe par une sphère concentrique à la première, et décrite d'un rayon égal à 1. Joignant les trois points d'intersection par des arcs de grands cercles, je forme ainsi, sur cette sphère centrale, un triangle sphérique semblable à S_1S_2N, dont je désigne les côtés respectivement homologues par α, α', δ', l'angle i étant commun. Lorsque α' et δ' seront connus en α et i, sur la sphère centrale, la proportionnalité des lignes homologues, dans les figures semblables, donnera évidemment

[redacted]

dans son *Traité de Géométrie*. En y adaptant les formules qu'il donne, on trouve

$$(s) \qquad \operatorname{tang}\alpha' = \operatorname{tang}\alpha \cos i, \qquad \sin\delta' = \sin\alpha \sin i.$$

Si l'on voulait résoudre immédiatement ces équations par les Tables de sinus et de tangentes, il faudrait y remplacer l'arc α de la sphère centrale par sa valeur angulaire, qui, exprimée en secondes, serait $\frac{A}{R}$ R″. Cela exigerait donc déjà la connaissance exacte du rayon R pour l'employer comme diviseur dans cette conversion. Lorsque les arcs α', δ' seraient ainsi connus en valeurs angulaires, il faudrait former leurs valeurs abstraites $\frac{\alpha'}{R''}$, $\frac{\delta'}{R''}$, puis les multiplier par R pour avoir A′ et Δ′, ce qui donnerait à l'évaluation de R une influence inverse dans ces deux calculs. Il est donc très-désirable d'éluder les erreurs que l'inexactitude de cette évaluation produirait dans ces opérations réciproques; et cela doit être au moins essentiellement possible pour de petits arcs tels que ceux que nous considérons, puisque, s'ils étaient si petits qu'on pût les considérer comme proportionnels à leurs sinus et à leurs tangentes, le rayon R disparaîtrait évidemment tout à fait de leurs relations mutuelles. Or, en effet, ce caractère spécial de petitesse permet de dégager la partie principale de A′ et de Δ′, qui est indépendante de sa valeur.

66. Pour cela, les arcs α, α', δ' devant toujours être ici moindres que 2 degrés ou 7200 secondes, je leur applique les développements restreints que nous avons établis dans la page 60. J'exprime ainsi d'abord l'arc α' par sa tangente qui est donnée dans la première des équations (s), et j'obtiens

$$\alpha' = \operatorname{tang}\alpha \cos i - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3\alpha \cos^3 i.$$

Maintenant, dans le second membre, je remplace $\operatorname{tang}\alpha$ par son développement en α, qui, restreint de même à ses deux premiers termes, est

$$\operatorname{tang}\alpha = \alpha + \tfrac{1}{3}\alpha^3;$$

et, en bornant cette substitution aux puissances de α qui n'ex-

cèdent pas la troisième, pour rester dans les mêmes limites d'approximation, j'ai finalement

$$\alpha' = \alpha \cos i + \tfrac{1}{3}\alpha^3 \cos i \sin^2 i.$$

Opérant de même sur la deuxième des équations (s), j'exprime d'abord l'arc δ' par son sinus qui est donné, et, en me bornant toujours aux deux premiers termes du développement, j'ai

$$\delta' = \sin\alpha \sin i + \tfrac{1}{6}\sin^3\alpha \sin^3 i;$$

alors je remplace $\sin\alpha$ par son développement en α qui est dans les mêmes termes

$$\sin\alpha = \alpha - \tfrac{1}{6}\alpha^3;$$

et, en me restreignant toujours à la même limite d'approximation, j'obtiens finalement

$$\delta' = \alpha \sin i - \tfrac{1}{6}\alpha^3 \sin i \cos^2 i.$$

Maintenant, pour reporter ces résultats sur notre sphère osculatrice, dont le rayon est R, il faut y remplacer les arcs α, α', δ', par leurs valeurs $\frac{A}{R}$, $\frac{A'}{R}$, $\frac{\Delta'}{R}$. Alors un des facteurs $\frac{1}{R}$ disparaît des deux membres de chaque égalité comme leur étant commun, et l'on a

$$A' = A\cos i + \frac{1}{3}\frac{A^3}{R^2}\cos i \sin^2 i; \quad \Delta' = A \sin i - \frac{1}{6}\frac{A^3}{R^2}\sin i \cos^2 i.$$

Les premiers termes de ces expressions, qui forment la portion

que ces derniers termes peuvent être calculés avec toute la précision nécessaire, d'après la connaissance approximative que l'on a toujours du rayon R. Ici, en particulier, la petitesse de ce rapport est telle, qu'on peut le calculer sans erreur appréciable avec la valeur de R qui se déduirait du degré $D^{(0)}$, immédiatement évalué en résolvant le triangle $S_1S_2M_1$ comme rectiligne, et supposant que le côté S_1M_1 se confond avec la perpendiculaire S_1N. D'après ce que j'ai montré dans la note annexée à la page 55, cette détermination approximative donnerait, en pieds anglais, $D^{(0)}$ égal à $363781^{pds},81$; et de là on déduit, dans la même espèce de mesures,

$$R = \omega D^{(0)}; \text{ donc, } \log R = \log\omega + \log D^{(0)} = 7,3189636.$$

Malgré la petite inexactitude qui peut affecter cette expression de R, elle nous suffira parfaitement pour calculer nos petits termes correctifs, comme je le prouve matériellement ici en note (*). En

(*) Pour confirmer matériellement l'assertion ici émise dans le texte, je vais calculer les termes correctifs de A′ et de Δ′, en attribuant à $D^{(0)}$ la valeur finale 363771^{pds}, qui se déduit de la mesure des arcs, après les réductions exactement faites. Je montrerai ensuite que ces mêmes termes s'obtiendraient sans différence appréciable, dans l'ordre de décimales qu'on y conserve, si on les calculait en prenant pour $D^{(0)}$ la première évaluation approximative $363781^{pds},81$; cela suffira pour faire disparaître toute apparence de cercle vicieux. Mais, en général, dans cette question comme dans toute autre, où l'on craindrait qu'une évaluation imparfaite de $D^{(0)}$ ne pût entraîner quelque erreur dans l'appréciation de termes correctifs, comme ceux que nous avons ici à considérer, on appliquerait d'abord aux arcs observés les corrections obtenues avec cette valeur imparfaite, ce qui conduirait à une seconde évaluation de $D^{(0)}$ beaucoup moins fautive, avec laquelle on calculerait de nouveau ces mêmes corrections; et si elles différaient sensiblement des premières que l'on avait obtenues, on recommencerait un troisième calcul pareil, puis un quatrième, jusqu'à ce qu'on n'y trouvât plus que des variations négligeables. Ici ces détours sont inutiles, comme on va le voir, à cause de la petitesse de l'angle i, qui rend la première approximation très-suffisante; et je n'y emploie la valeur exacte de $D^{(0)}$ que pour présenter le calcul definitif tel qu'on l'effectuerait, par une approximation finale, dans d'autres cas où l'on en aurait reconnu la nécessité.

Les données du calcul numérique seront donc ici

$A = 434011^{pds},6$, $i = 3^{\circ}43'30''$, $D^{(0)} = 363771$, $\log\omega = 1,7581926324$.

Pour pouvoir l'effectuer avec les Tables de logarithmes à sept decimales, je

l'appliquant à nos deux formules, et effectuant aussi le calcul direct de leurs premiers termes avec les valeurs de A et de i qui sont données, on trouve

$$A' = 433094^{\text{pds}},692 + 0^{\text{pd}},264 = 433094^{\text{pds}},956;$$
$$\Delta' = 28196^{\text{pds}},747 - 2^{\text{pds}},029 = 28194^{\text{pds}},718.$$

---

change $\cos i$ en $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} i$ dans le terme de A' où ce cosinus a pour facteur l'arc A; alors les formules à évaluer sont

$$A' = A - 2A\sin^2\tfrac{1}{2}i + \frac{1}{3\omega^2}\frac{A^2}{D^{(0)2}}\cos i \sin^2 i, \qquad \Delta' = A\sin i - \frac{1}{6\omega^2}\frac{A^2}{D^{(0)2}}\sin i\cos^2 i.$$

Voici le type des opérations, avec des logarithmes à sept décimales :

1°. *Calcul de* A'.

log A	= 5,6375013	log A^2	= 16,9125039	log 3	= 0,4771213
log 2	= 0,3010300	log cos i	= $\bar{1}$,9990815	log ω^2	= 3,5162453
log $\sin^2\frac{1}{2}i$	= $\bar{3}$,0237914	log $\sin^2 i$	= $\bar{3}$,6253954	log $D^{(0)2}$	= 11,1216562
	2,9623257		14,5369808		15,1150228
	pds		15,1150228		
$2A\sin^2\frac{1}{2}i$...	916,908				
A.....	434011,6		$\bar{1}$,4219580		
A cos i.....	433094,692				
Terme corr.	+ 0,264				
A'.....	433094,956				

$$\frac{1}{3\omega^2}\frac{A^2}{D^{(0)2}}\cos i \sin^2 i.\ 0^{\text{pd}},26421.$$

On trouverait, pour ce terme, $0^{\text{pd}},26420$ si on le calculait en donnant à $D^{(0)}$ la valeur approximative $363781^{\text{pds}},81$.

2°. *Calcul de* Δ'.

La petitesse excessive de ces termes correctifs justifie ainsi toutes nos prévisions.

67. L'arc A′ ou S_2N de la *fig.* 12 étant connu, il reste à trouver M_1N qu'il faut en soustraire. Pour cela, je remarque que le point M_1 devant être sur le parallèle de S_1, par définition, l'arc PM_1, compté du pôle P sur notre sphère osculatrice, est égal à PS_1, qui représente, sur cette même sphère, la distance du point S_1 au pôle P. Comme la condition de tangence est supposée sensiblement remplie dans la petite étendue superficielle du triangle S_1NS_2, le rayon CS_1 de la sphère tangente coïncide avec la normale terrestre en S_1, et se dirige ainsi extérieurement au zénith de ce point. En outre, le rayon CP de cette sphère est censé dirigé au pôle de rotation de la sphère céleste. Ainsi, à cause de la petitesse infinie de la terre, la distance angulaire du pôle céleste au zénith, qui s'observerait en S_1, et que je désignerai par d', est égale à l'angle S_1CP, que l'arc PS_1 soutend au centre de la sphère tangente. A la vérité, l'angle d' n'est pas ici connu par des observations astronomiques, qui auraient été faites précisément en S_1. Mais je montrerai tout à l'heure qu'on peut, avec une approximation suffisante, le déduire des observations de ce genre effectuées à la station la plus boréale S, *fig.* 11, en les combinant avec la longueur de l'arc mesuré entre S et S_1, suivant la direction SS_1 du méridien même. D'après cela, nous pourrons considérer d' comme donné, et le supposer représenté par sa valeur abstraite exprimée en parties du rayon du cercle pris pour unité de longueur. Alors Rd' exprimera la longueur de l'arc homologue PS_1, sur la sphère osculatrice que nous considérons. Je représenterai cet arc par D′, et je désignerai par Π′ l'arc PN, qui est sa projection sur le méridien PM_1S_2. Nous venons, en outre, de déterminer l'arc perpendiculaire SN, que nous avons nommé Δ′. Si, avec ces éléments, on parvient à déterminer PN, on aura, par différence, M_1N égal à PS — PN : ce sera l'inconnue cherchée.

68. Les trois arcs D′, Π′, Δ′ forment sur la sphère osculatrice un triangle sphérique rectangle en N. Si donc, comme tout à l'heure, on conçoit trois verticales menées du même centre C aux points S, N et au pôle P, elles couperont la sphère dont le rayon

est 1, en trois points correspondants, qui formeront, sur celle-ci, un triangle sphérique rectangle dont je désigne par d', π', δ', les côtés respectivement homologues à D', Π', Δ'. Alors, en nommant toujours R le rayon de notre sphère, on aura encore, par proportionnalité,

$$D' = Rd' ; \quad \Pi' = R\pi' ; \quad \Delta' = R\delta'.$$

Si, par la résolution du triangle central, on obtient π' en fonction de d' et de δ' qui sont connues, on en conclura, par l'élimination, les valeurs de Π' en fonction de D' et de Δ', quantités dont la seconde est déjà trouvée, et dont la première se déduirait de d' si l'on avait la connaissance exacte du rayon R. Mais on va voir qu'ici, comme dans l'exemple précédent, la quantité M_1N ou $\Pi' - D'$, que nous avons seule besoin d'évaluer, pourra se déduire de ces données, sans exiger autre chose que l'évaluation approximative de ce rayon, dont nous avons déjà fait usage.

69. Or, l'hypoténuse d' du triangle central étant supposée connue ainsi que δ', on tombe sur le premier cas des triangles sphériques rectangles, que Legendre considère dans sa *Géométrie*. Donc, en désignant aussi par p l'angle polaire NPS_1 qui est commun au triangle central et au triangle terrestre, on aura

$$\cos \pi' = \frac{\cos d'}{\cos \delta'} ; \qquad \sin p = \frac{\sin \delta'}{\sin d'}.$$

Nous venons de reconnaître que Δ' est un arc terrestre de peu de longueur ; δ' sera donc aussi un petit arc de la sphère centrale.

et la petitesse de δ' permet de l'obtenir par une approximation aussi exacte que facile. Pour le mettre en évidence, faisons

$$\pi' = d' - x;$$

x sera l'excès cherché. Alors, en formant $\cos \pi'$ d'après cette expression, et le substituant dans l'équation qui donnait sa valeur, elle devient

$$(1) \qquad \cos d' \cos x + \sin d' \sin x = \frac{\cos d'}{\cos \delta'}.$$

Il faut maintenant dégager l'inconnue x qui se trouve enveloppée à la fois sous les signes de sinus et de cosinus, circonstance que l'on a très-souvent occasion de rencontrer dans les applications de l'astronomie. Cette opération conduit nécessairement à une équation du second degré en $\sin x$, ou $\tang \frac{1}{2} x$, que l'on résout, soit avec rigueur, par une extraction de racine, soit approximativement, par des séries qui peuvent atteindre une exactitude indéfinie. Je rejette ces détails dans une Note placée à la fin de la présente section; mais j'exposerai ici un raisonnement, applicable à tous les cas de ce genre, et par lequel on obtient, sans peine, les deux premiers termes du développement de l'inconnue x, ce qui suffit presque toujours dans les évaluations que l'on veut en faire.

Ce raisonnement se fonde sur la petitesse prévue de l'arc x, par conséquent de $\sin x$, laquelle résulte de la petitesse de l'arc δ'. Or on a, en général,

$$\cos x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2} \sin^2 x - \tfrac{1}{4} \sin^4 x \ldots;$$

$\cos x$ ne diffère donc de l'unité que par des termes de l'ordre du carré et des puissances supérieures de $\sin x$, lesquels sont d'autant plus petits que l'ordre de leur puissance est plus élevé. D'après cela, on obtiendra une première évaluation approchée de $\sin x$, en faisant $\cos x$ égal à l'unité dans l'équation (1). Effectuant donc cette substitution, et dégageant $\sin x$, on obtiendra d'abord

$$\sin x = \frac{\cos d'}{\sin d'} \left(\frac{1 - \cos \delta'}{\cos \delta'} \right) = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta'}{\tang d' \cos \delta'}:$$

et par suite, dans le même ordre d'approximation,

$$\cos x = 1 - \frac{2 \sin^4 \frac{1}{2} \delta'}{\tang^2 d' \cos^2 \delta'}.$$

Alors, si l'on substitue cette valeur de $\cos x$ au lieu de l'unité dans l'équation (1), et que l'on dégage de nouveau $\sin x$, on en obtiendra une seconde évaluation plus approchée, qui sera

$$\sin x = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta'}{\tang d' \cos \delta'} + \frac{2 \sin^4 \frac{1}{2} \delta'}{\tang^3 d' \cos^2 \delta'}.$$

Je bornerai cette expression aux quatrièmes puissances de $\sin \frac{1}{2} \delta'$, ce qui sera toujours plus que suffisant pour les applications, et même j'expliquerai tout à l'heure pourquoi je la pousse si loin. Alors il faudra faire $\cos \delta'$ égal à 1 dans le dénominateur de son second terme qui est déjà, par son numérateur, de l'ordre de petitesse auquel on veut s'arrêter. Mais, dans le premier terme, qui est seulement de l'ordre $\sin^2 \frac{1}{2} \delta'$, il faudra développer le facteur $\frac{1}{\cos \delta'}$ en $\sin \frac{1}{2} \delta'$ de la manière suivante :

$$\frac{1}{\cos \delta'} = \frac{1}{1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta'} = 1 + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta' + 4 \sin^4 \tfrac{1}{2} \delta', \text{ etc.}$$

Mais il faut s'arrêter aux deux premiers termes, puisque celui auquel le développement doit s'appliquer, comme facteur, est déjà de l'ordre $\sin^2 \frac{1}{2} \delta'$. On aura donc ainsi finalement

$$\sin x = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta'}{\tang d'} + 4 \left(1 + \frac{1}{2 \tang^2 d'}\right) \frac{\sin^4 \frac{1}{2} \delta'}{\tang d'}.$$

loppées en note à la fin de cette section, en les limitant aux termes de même ordre. Or, nous avons trouvé plus haut, page 74,

$$\delta' = \alpha \sin i - \tfrac{1}{6}\alpha^3 \sin i \cos^2 i;$$

en remplaçant δ' par cette expression, et s'arrêtant aux quatrièmes puissances de l'arc α, on trouve finalement

$$d' - \pi' = \frac{1}{2}\frac{\alpha^2 \sin^2 i}{\operatorname{tang} d'} + \frac{1}{4}\left(1 - \tfrac{5}{3}\cos^2 i + \frac{\sin^2 i}{2\operatorname{tang}^2 d'}\right)\frac{\alpha^4 \sin^2 i}{\operatorname{tang} d'}.$$

Pour transporter ce résultat de la sphère centrale à la sphère osculatrice, dont le rayon est R, il faut y remplacer les arcs α, d', π', par leurs expressions équivalentes $\frac{A}{R}$, $\frac{D'}{R}$, $\frac{\Pi'}{R}$. La valeur de $D' - \Pi'$, ainsi obtenue, exprimera la longueur de l'arc terrestre M_1N, que nous voulions évaluer dans la *fig.* 12. C'est la distance comprise, sur le méridien PS_2, entre le parallèle de la station S_1 et l'arc S_1N, mené de S_1 perpendiculairement à ce même méridien. Toutefois il convient de laisser d' exprimé par sa valeur angulaire sous le signe *tang*, parce qu'il se présente sous cette forme dans le calcul numérique. Après cette élimination, un des facteurs $\frac{1}{R}$ disparaît encore, comme commun aux deux membres de l'égalité, et il reste

$$M_1N = D' - \Pi' = \frac{1}{2}\frac{A^2 \sin^2 i}{R \operatorname{tang} d'} + \frac{1}{4}\left(1 - \tfrac{5}{3}\cos^2 i + \frac{\sin^2 i}{2\operatorname{tang}^2 d'}\right)\frac{A^4 \sin^2 i}{R^3 \operatorname{tang} d'}.$$

Pour l'application particulière que nous avons ici en vue, le premier terme de cette expression donnera une évaluation parfaitement suffisante. On s'y est même généralement borné pour les réductions de ce genre qui se présentent dans toutes les mesures d'arcs méridiens. Mais il ne serait pas hors de possibilité que le second terme devînt nécessaire, si la station S_1, d'où l'on mène l'arc perpendiculaire, était fort rapprochée du pôle, ce qui donnerait à tang d' une valeur fractionnaire qui agrandirait les termes où elle entre comme diviseur, de manière à rendre sensibles ceux qui

affectent $\frac{A^4}{R^3}$. On pourrait même concevoir mathématiquement des valeurs de d' assez petites pour que la série qui forme le développement de $\sin x$ devînt divergente, δ' étant donné. Mais les mesures d'arcs méridiens ne pourront jamais être faites assez près du pôle pour que ce cas se réalise; et, dans les opérations habituelles, il sera toujours facile de constater par notre formule si le terme en A^4 est sensible ou négligeable. C'est pour ce motif théorique que j'ai poussé le développement jusque-là; car, dans l'application particulière que nous allons en faire, il serait complétement inutile d'aller jusqu'aux A^4.

70. Pour réduire le second membre de cette formule en nombres, nous pouvons, comme dans l'évaluation de l'arc A' ou NS_2, attribuer à R la valeur de $\omega D^{(0)}$ qui nous a servi alors, et dans laquelle $D^{(0)}$ représente la longueur locale du degré du méridien déterminée par notre première approximation, ce qui nous a donné, en pieds anglais, page 75,

$$\log R = 7,3189636;$$

car, à la petitesse du rapport $\frac{A}{R}$, se joint encore ici celle du facteur $\sin^2 i$ qui multiplie les termes que nous voulons évaluer. Mais il faut aussi connaître l'angle d', qui est la distance du pôle au zénith, dans la station d'où l'on a mené l'arc Δ' perpendiculaire au méridien éloigné. Or, en revenant à la *fig.* 12, où cette station est désignée par S, on n'y a pas observé l'angle d', mais

dont la station S_1 sera plus éloignée du pôle que la station S. Donc, la distance du pôle au zénith en S étant $50° 3' 41''$ par observation, elle sera, en S_1, plus grande de cette quantité, c'est-à-dire égale à $50° 21' 0''$. Telle sera donc la valeur de d' dans l'expression de $D' - \Pi'$ ou M_1N. Il est facile de constater par le calcul arithmétique qu'une petite incertitude sur cet élément n'aurait ici qu'une influence inappréciable sur l'évaluation de M_1N, à cause de la petitesse de A et de sin i, ce qui nous soustrait à la nécessité de connaître le rayon R aussi rigoureusement que cela est nécessaire en général pour des conversions pareilles, comme nous l'avons expliqué plus haut, page 75.

71. D'après cela, dans l'application particulière que nous avons en vue, les données du calcul seront

$$A = 434011^{pds},6, \qquad i = 3°43'30'', \qquad d' = 50°21'0'';$$

et, en se bornant au premier terme de la formule qui est le seul appréciable, on trouve

$$M_1N = 15^{pds},81.$$

Le terme en $\frac{A^4}{R^3}$ serait ici complétement insensible. M_1N étant connu, on le retranchera de NS_2 ou A' que nous avons calculé tout à l'heure, ce qui donnera M_1S_2. Alors l'arc méridien total, MM_1S_2, *fig.* 11, compris entre les parallèles des stations extrêmes S, S_2, s'obtiendra définitivement comme il suit :

entre le méridien de S_2 et le méridien d'une autre station S_1 séparé de celui-là par un arc de grand cercle S_1N ou Δ' qui lui est perpendiculaire. J'expliquerai plus loin l'usage général qu'on fait de cette formule pour définir les positions relatives des points de la surface terrestre, par des coordonnées de ce genre Δ' et p. En ce moment je veux seulement faire remarquer que, lorsqu'on veut tirer d'une pareille équation la valeur de l'angle p en parties de la graduation du cercle, par l'emploi des Tables de sinus, il faut y exprimer les arcs d' et δ' de la sphère centrale, en parties de cette même graduation, et non pas en parties du rayon de cette sphère. Ici d' nous est déjà donné ainsi par les observations astronomiques transportées de S en S_1, et nous venons de le trouver égal à $50^\circ 21' 0''$. Pour avoir δ' sous la même forme, il faut considérer qu'il occupe, sur la sphère centrale, le même arc de graduation que Δ', sur la sphère locale dont le rayon est R. Or, on connaît, pour celle-ci, l'arc $D^{(\circ)}$ qui occupe un degré de la graduation sexagésimale d'un de ses grands cercles; et nous trouvons sa longueur égale à 363771 pieds anglais. Ayant donc aussi l'arc Δ' exprimé dans la même espèce d'unités de longueur, et l'ayant trouvé égal à $28194^{pds},718$, page 76, sa valeur Δ°, en parties du degré sexagésimal, sera proportionnellement

$$\Delta^{(\circ)} = \frac{1^\circ . 28194,718}{363771} = 0^\circ,0775068 = 4' 39'',024;$$

ce sera donc aussi la valeur de δ' exprimée sous la même forme. Alors, en la combinant avec celle de d', et achevant le calcul par les Tables de sinus, on trouvera

$$p = 6' 1'',359.$$

73. Quoique cette évaluation de l'angle p ne nous fût pas ici particulièrement nécessaire, j'ai jugé utile de la donner comme un exemple numérique de ces conversions, dont la nécessité se reproduit fréquemment. Pour éviter les ambiguïtés qu'elles pourraient faire naître, et qui ont occasionné plus d'une fois des erreurs numériques, je les caractériserai désormais par l'indice $^{(\circ)}$, affecté en exposant à l'arc quelconque auquel elles s'appliquent;

ORE

se dirigent d'ailleurs comme lui aux pôles de la sphère céleste situés sur son prolongement rectiligne. Alors les méridiens elliptiques et les méridiens sphériques, menés aux mêmes points S_1, S_2 de la surface terrestre, coïncident comme plans, et comprennent ainsi le même angle dièdre p; de sorte que cet angle se trouve connu pour l'ellipsoïde, lorsqu'il a été déterminé sur la sphère tangente par le calcul que nous venons d'exposer. Cette distribution des centres de toutes les sphères locales sur l'axe polaire de l'ellipsoïde offre plusieurs autres avantages qu'il est aisé de pressentir, et que nous aurons l'occasion de reconnaître. Il reste donc à examiner si ces sphères, ainsi définies, peuvent avoir avec la surface de l'ellipsoïde des contacts assez intimes, comme assez prolongés, pour s'assimiler successivement à lui, avec une suffisante précision, dans une petite amplitude conique de 1 ou 2 degrés autour de leur point de tangence. Or c'est ce que nous constaterons par des épreuves numériques indubitables.

NOTE

RELATIVE A LA PAGE 79.

Sur la résolution des équations où le sinus et le cosinus d'une inconnue que l'on sait être fort petite entrent l'un et l'autre, seulement à la première puissance.

Soit x l'inconnue; l'équation proposée sera de cette forme :

$$A \cos x + B \sin x = C,$$

A, B, C étant trois coefficients donnés, indépendants de x. Appliquons-lui d'abord le mode de raisonnement que nous avons employé dans le texte; $\sin x$ étant supposé une fraction du premier ordre de petitesse, $\cos x$ ne diffèrera de l'unité que par des termes de l'ordre du carré de cette fraction. Ainsi on obtiendra une première évaluation approchée de $\sin x$ en faisant, dans notre équation, $\cos x$ égal à 1, ce qui donne

$$\sin x = \frac{C - A}{B};$$

et par suite, dans le même ordre d'approximation,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\frac{(C-A)^2}{B^2}.$$

Alors, si l'on substitue cette valeur de $\cos x$ au lieu de l'unité dans l'équation primitive (1), et que l'on dégage $\sin x$, on en obtiendra une évaluation plus approchée qui sera

$$(2) \qquad \sin x = \frac{(C-A)}{B} + \frac{1}{2}\frac{A(C-A)^2}{B^3}.$$

On voit que la petitesse supposée de $\sin x$ exige d'abord que le rapport $\frac{C-A}{B}$ soit une fraction moindre que l'unité, et ensuite que le coefficient A ne soit pas très-considérable.

Pour étendre indéfiniment l'approximation, il faut développer $\sin x$ en série continue. On peut le faire de deux manières que j'exposerai successivement, et je montrerai que les expressions de $\sin x$ auxquelles elles conduisent s'accordent avec les précédentes dans les termes qui dépendent des deux premières puissances de $\frac{C-A}{B}$.

A cet effet, je mets d'abord l'équation (1) sous ces deux formes

$$(3) \qquad B \sin x = C - A \cos x, \qquad (4) \quad A \cos x = C - B \sin x.$$

J'élève les deux membres de (3) au carré, et je remplace, dans le second, $\cos^2 x$ par son expression équivalente $1 - \sin^2 x$; j'ai ainsi

$$(A^2 + B^2) \sin^2 x = A^2 + C^2 - 2AC \cos x;$$

alors j'élimine $A \cos x$ par sa valeur tirée de (4), et, en réunissant les termes semblables, j'obtiens

$$(A^2 + B^2) \sin^2 x - 2BC \sin x = -(C^2 - A^2).$$

[redacted]

l'unité, on a, par la formule du binôme,

$$(1-z)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{8}z^2 - \tfrac{1}{16}z^3 \ldots.$$

Mettant donc ici pour z sa valeur $\frac{(A^2+B^2)(C^2-A^2)}{B^2C^2}$, on obtiendra

$$\sin x = \tfrac{1}{2}\frac{(C^2-A^2)}{BC} + \tfrac{1}{8}\frac{(A^2+B^2)(C^2-A^2)^2}{B^3C^3} + \tfrac{1}{16}\frac{(A^2+B^2)^2(C^2-A^2)^3}{B^5C^5}\ldots,$$

et le second membre pourra être continué aussi loin que l'on voudra, puisque la loi du développement infini d'un binôme est connue.

Quoique cette série se présente sous une forme différente de l'expression (2), elle s'accorde cependant avec elle dans les termes qui contiennent seulement les deux premières puissances de $\frac{C-A}{B}$. Pour en avoir la preuve, représentez isolément ce rapport par u, ce qui donnera

$$C = A + Bu;$$

puis, avec cette expression, éliminez C du second membre de la série, et développez ses différents termes suivant les puissances de u, en négligeant celles qui sont supérieures à u^2. Cela reproduira exactement l'expression (2) trouvée d'abord pour $\sin x$ par une voie plus simple.

La seconde méthode de développement consiste à remplacer $\sin x$ et $\cos x$, dans l'équation primitive, par leurs valeurs rationnelles en $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x$, qui sont

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x}.$$

Après cette substitution, en ramenant $1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x$ en numérateur, elle prend la forme suivante

$$(C+A)\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}x - 2B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = -(C-A).$$

En la résolvant, et se bornant à la seule racine qui devient nulle en même temps que $C-A$, elle donne

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = \frac{B}{C+A}\left\{1 - \left[1 - \left(\frac{C^2-A^2}{B^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\},$$

et, après avoir developpé le radical par la formule du binôme, il reste

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{B}{C+A}\right)\left[\frac{C^2-A^2}{B^2} + \tfrac{1}{4}\left(\frac{C^2-A^2}{B^2}\right)^2 + \tfrac{1}{8}\left(\frac{C^2-A^2}{B^2}\right)^3\ldots\right];$$

ou, si l'on veut effectuer la multiplication par le facteur commun extérieur,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}\left[\frac{C-A}{B} + \tfrac{1}{4}\left(\frac{C-A}{B}\right)^2\frac{C+A}{B} + \tfrac{1}{8}\left(\frac{C-A}{B}\right)^3\left(\frac{C+A}{B}\right)^2\ldots\right].$$

La première de ces deux expressions sera généralement la plus commode pour le calcul numérique. On voit que la convergence plus ou moins rapide de la série dépendra du degré de petitesse du rapport $\frac{C^2 - A^2}{B^2}$, suivant les puissances duquel elle procède. Ainsi, on devra se guider sur la petitesse de ce rapport pour la prolonger autant qu'il sera nécessaire dans chaque cas particulier.

Ce développement est tout à fait analogue à notre première expression (2) de $\sin x$, et il s'accorde exactement avec elle quand on le restreint aux deux premières puissances de $\frac{C-A}{B}$. En effet, dans cette limite d'approximation, $\tang \frac{1}{2} x$ équivaut à $\frac{1}{2} \sin x$. Si, de plus, on remplace C par A dans le second terme de la série, qui a déjà pour facteur $\left(\frac{C-A}{B}\right)^2$, le résultat devient identique à notre expression (2).

Lorsque, par l'une des deux séries précédentes, on aura trouvé $\sin x$ ou $\tang \frac{1}{2} x$ en nombres, avec le degré d'approximation auquel on aura jugé pouvoir se restreindre, si l'on veut obtenir l'arc x en parties de la graduation du cercle, on l'en déduira immédiatement par les Tables logarithmiques de sinus ou de tangentes. Mais, si l'on veut obtenir cet arc en parties du rayon du cercle pris pour unité de longueur, il faudra former directement sa valeur par les séries de la page 60 qui donneront :

En fonction de $\sin x$,

$$x = \sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{3}{40} \sin^5 x \ldots;$$

en fonction de $\tang \frac{1}{2} x$,

$$\frac{1}{2} x = \tang \frac{1}{2} x - \frac{1}{3} \tang^3 \left(\frac{1}{2} x\right) + \frac{1}{5} \tang^5 \left(\frac{1}{2} x\right) \ldots.$$

D'après ces expressions, lorsque l'arc x sera assez petit pour que l'on puisse négliger les termes de l'ordre $\sin^3 x$, $\tang^3 \frac{1}{2} x$, et, à plus forte raison, ceux des ordres supérieurs, il suffira de prendre

[redacted]

il sera toujours très-facile de la former directement par le raisonnement très-simple dont nous avons fait usage, sans prendre la peine d'identifier les valeurs des coefficients à leurs expressions générales A, B, C, pour les introduire dans les séries indéfinies que nous venons de former.

Section II. — *Mensuration effectuée par triangulation. Formation et calcul des triangles sphériques établis tangentiellement à une petite portion de la surface terrestre régularisée.*

75. Je suis entré dans tous ces détails relativement à l'opération de Pensylvanie, parce que les problèmes géométriques et analytiques qu'elle nous a donné occasion de résoudre, pour des énoncés très-simples, se représentent dans toutes les mesures d'arcs méridiens effectuées par des procédés plus complexes. De sorte que les formules que nous y avons appliquées s'adapteront, sous leur forme littérale, à toutes les opérations de ce genre que nous aurons ultérieurement à considérer. Car elles ne diffèrent de celle-là que par les difficultés naturelles qu'y ajoutent les circonstances moins favorables des localités. On conçoit, en effet, qu'un procédé de mensuration directe, qui était possible dans un pays inhabité, comme l'était alors la presqu'île où Mason et Dixon opéraient, deviendrait complétement inapplicable dans notre Europe, où le sol est couvert de villes, de villages, et de constructions publiques ou particulières. Les astronomes ont donc été obligés de parvenir au même but par une méthode différente. Ils ont eu recours au procédé que l'on emploie dans le levé des plans, pour mesurer la distance des objets en les observant des deux extrémités d'une base connue; et ils s'en sont servis pour étendre, sur la surface terrestre, de grandes triangulations dirigées dans le sens d'un même méridien. Comme ici nous entrons dans les réalités, il faut prendre toutes les connaissances antérieures à l'état où elles existent, et s'en aider au besoin. Or, déjà, les cartes géographiques indiquent très-approximativement la suite des lieux, des villes, des montagnes, des plaines, qui se trouvent sur la direction du méridien d'un lieu donné. Ayant donc adopté un point de départ, on choisit, sur les cartes locales, une suite d'autres points situés des deux

côtés du méridien de celui-là, à peu de distance, tels que de chacun d'eux on puisse voir un certain nombre des précédents et des suivants, dans la chaîne de triangles que l'on veut établir, sauf à rectifier ces premiers aperçus par d'autres choix, si un examen plus immédiat des localités faisait reconnaître des difficultés ou des impossibilités qu'on n'aurait pas prévues. Les *stations*, ainsi adoptées, seront, par leur destination même, des sommets de montagnes, de collines, d'édifices publics, élevés au-dessus des obstacles qui pourraient arrêter la vision intermédiaire. Il faut aussi que les droites qui les joignent ne forment pas entre elles des angles trop aigus, afin que les côtés des triangles qu'elles sont destinées à former, et qu'on devra conclure les uns des autres, soient exempts des incertitudes que l'acuité des angles y introduirait. Ce plan arrêté, l'observateur se transporte successivement aux trois sommets du premier triangle, désignés par S, S_1, S_2, *fig.* 13. Il y établit des signaux fixes qui sont, par exemple, de grands disques blancs à centre noir; ou encore, des lampes à courant d'air abritées sous une tente, et munies de réflecteurs métalliques postérieurs, que l'on tourne successivement vers les autres stations d'où l'on veut les observer. Ces signaux doivent être fixés invariablement à des supports solides, et l'on détermine avec grand soin le pied de la verticale qui passe par leur centre de visibilité. Cela s'effectue à l'aide d'un fil-à-plomb, que l'on fait descendre de ce centre sur une plaque métallique horizontale, portée par un pieu enfoncé dans le sol; et, sur cette plaque, on marque le point précis auquel la verticale du centre du signal vient aboutir. Ce point

toujours être supposées faites dans la verticale même du centre S. Lorsque l'instrument employé est un cercle répétiteur portatif, l'observateur mesure d'abord l'angle plan a, compris entre les signaux S_1, S_2, ou plutôt entre leurs images réfractées Σ_1, Σ_2, telles qu'il les voit à travers la portion de l'atmosphère interposée; et, immédiatement après, ou dans des circonstances atmosphériques, autant qu'il le peut, semblables, il mesure aussi les distances apparentes z_1, z_2 de ces images, à son zénith Z. Les droites $S\Sigma_1$, $S\Sigma_2$, menées de S à ces images, sont les dernières tangentes des trajectoires lumineuses qui, partant des points S_1, S_2, sont amenées dans l'œil de l'observateur en S par la réfraction. Elles diffèrent donc des droites visuelles directes SS_1, SS_2, qui seraient menées de S à ces points à travers le vide. Elles sont généralement un peu plus élevées, parfois cependant un peu moins élevées que ces rayons directs. Mais, à moins d'accidents très-rares, qui sont toujours indiqués par une excessive déformation des images, et pendant lesquels on a soin de ne pas hasarder les observations, les deux trajectoires lumineuses parties de S_1 et de S_2 se forment dans les plans ZSS_1, ZSS_2 qui passent par ces points et la verticale du point S; de sorte que l'angle oblique $\Sigma_1 S \Sigma_2$, ou a, compris entre les tangentes extrêmes $S\Sigma_1$, $S\Sigma_2$, est alors constamment limité par ces mêmes plans.

76. Pour voir l'emploi que l'on peut faire de ces résultats, supposons d'abord que les distances zénithales z_1, z_2 des deux tangentes, et l'angle a qu'elles comprennent, aient été mesurés simultanément, ou dans des états réguliers et rigoureusement identiques de la portion d'atmosphère interposée, ce qui aura les mêmes conséquences. On en pourra conclure l'angle dièdre A compris autour du zénith de S, entre les deux plans S_1SZ, S_2SZ, menés par les deux signaux et par la verticale de ce point. En effet, du point S comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivez idéalement une sphère, qui coupera la verticale de S en Z, et en σ_1, σ_2, les tangentes finales des trajectoires lumineuses, sur la direction desquelles se voient les images Σ_1, Σ_2. Alors, dans le triangle sphérique $Z\sigma_1\sigma_2$, on connaîtra les deux côtés verticaux z_1, z_2, et le côté oblique a. On pourra donc en déduire l'angle dièdre A,

formé en Z ; car il sera lié aux trois côtés z_1, z_2, a du triangle par l'équation générale

$$(1) \qquad \cos a = \sin z_1 \sin z_2 \cos A + \cos z_1 \cos z_2,$$

ou encore

$$\cos a = \cos(z_2 - z_1) - 2 \sin z_1 \sin z_2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A.$$

Remplacez, dans celle-ci, $\cos a$ et $\cos(z_2 - z_1)$ par leurs valeurs équivalentes $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} a$, $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}(z_2 - z_1)$, puis dégagez $\sin^2 \frac{1}{2} A$, elle donnera

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} a - \sin^2 \frac{1}{2}(z_2 - z_1)}{\sin z_1 \sin z_2};$$

ou, en transformant le second membre en produits, pour le rendre plus propre au calcul logarithmique,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + z_1 - z_2) \sin \frac{1}{2}(a + z_2 - z_1)}{\sin z_1 \sin z_2}.$$

C'est la formule déjà rapportée, tome II, page 401, pour trouver directement les angles d'un triangle sphérique dont on connaît les trois côtés. Mais cette manière d'obtenir l'angle A n'est pas, à beaucoup près, la plus commode pour l'application que nous avons en vue, parce que le calcul absolu qu'elle exige devrait être fait avec une rigueur qui deviendrait fatigante, dans la succession nombreuse d'opérations de ce genre qu'exige une grande triangulation. Or, on peut arriver au même but, avec moins de soin et plus de sûreté, en profitant des moindres circonstances spéciales dans lesquelles nos triangles sont établis. En effet, les deux signaux S_1, S_2

tude illimitée, par un développement en série, que j'expose, plus loin, dans une note spéciale. $A - a$ s'appelle *la réduction à l'horizon*. Pour ne pas interrompre la chaîne des idées que je veux ici présenter, je me bornerai à rapporter le premier terme de son expression qui en renferme la partie de beaucoup la plus sensible, et la seule presque dont il faille habituellement tenir compte. Afin d'y mettre en évidence la petitesse des élévations ou des dépressions occasionnelles par lesquelles les distances apparentes z_1, z_2 diffèrent de 90°, j'introduis ces différences comme additives dans le calcul, sous la dénomination de h_1 et h_2, c'est-à-dire que je fais généralement

$$z_1 = 90^\circ + h_1; \qquad z_2 = 90^\circ + h_2.$$

Alors si l'on s'arrête au premier terme du développement, qui suffit lorsque h_1 et h_2 sont de très-petits angles, comme cela a lieu presque toujours, on a

$$(2)\quad A = a + 2\,\frac{\left[\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}(h_2+h_1) - \cos^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}(h_2-h_1)\right]R''}{\cos h_2\cos h_1\sin a}.$$

Le terme correctif de a est ici exprimé en secondes de degré, comme l'annonce le facteur R''. La petitesse des angles $\frac{1}{2}(h_2+h_1)$, $\frac{1}{2}(h_2-h_1)$ rendant les carrés de leurs sinus de très-petites fractions, on voit que ce terme entier sera toujours de l'ordre de ces carrés, pourvu que le dénominateur $\sin a$, qui est aussi une fraction, n'ait pas lui-même des valeurs dont la faiblesse leur soit comparable. Or, c'est ce qu'on a toujours soin de prévenir en choisissant les trois sommets de chaque triangle, de manière qu'aucun de leurs angles a ne se trouve trop aigu.

77. Lorsque les angles h_1, h_2 sont tellement petits, que l'on puisse négliger les quatrièmes puissances de leurs sinus, dans l'expression du terme correctif de a, ce qui a lieu presque toujours, elle se simplifie notablement. Car, d'abord, dans cette limite d'approximation, les facteurs $\cos h_2$, $\cos h_1$ du dénominateur peuvent être remplacés par l'unité. Puis, les sinus des arcs $\frac{1}{2}(h_2+h_1)$ et $\frac{1}{2}(h_2-h_1)$ n'entrant au numérateur qu'élevés à leur deuxième puissance, ils peuvent y être remplacés par les rapports de ces

arcs mêmes au rayon réduit en secondes, c'est-à-dire par $\frac{1}{2}\frac{(h_2+h_1)^2}{R''^2}$ et $\frac{1}{2}\frac{(h_2-h_1)^2}{R''^2}$. Alors R″ disparaît une fois des deux termes de la fraction comme facteur commun ; et il reste

$$(3) \qquad A = a + \frac{1}{2}\frac{\left[(h_2+h_1)^2 \sin^2\frac{1}{2}a - (h_2-h_1)^2 \cos^2\frac{1}{2}a\right]}{R'' \sin a};$$

ou encore,

$$A = a + \frac{1}{4}\frac{\left[(h_2+h_1)^2 \operatorname{tang}\frac{1}{2}a - \frac{(h_2-h_1)^2}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}\right]}{R''}.$$

Cette formule suffit dans la généralité des applications géodésiques. Les valeurs des angles h_2, h_1 qu'on y introduit doivent être évidemment exprimées en secondes de degré. Indépendamment de ses usages pratiques, elle est indispensable pour éclairer plusieurs points importants de théorie, qui resteraient obscurs sans son secours.

78. Je vais, dès à présent, m'en servir pour dissiper un soupçon d'incertitude que pourrait faire naître le procédé par lequel on détermine les éléments qui servent à la calculer. J'ai supposé les observations effectuées dans un état atmosphérique régulier, où les réfractions s'opèrent sans déviation azimutale sensible. C'est le cas le plus habituel, et il est facile d'éviter les circonstances où l'on pourrait soupçonner qu'il n'eût pas lieu. Mais j'ai

angles h_1, h_2 répondaient au même état atmosphérique que la moyenne des angles a. Admettons, comme cela arrivera sans doute, que cette identité d'état moyen ne soit pas tout à fait rigoureuse; au moins, d'après le principe des compensations, elle aura lieu approximativement. Alors les valeurs moyennes de h_1 et de h_2 ne différeront que très-peu des véritables; et comme leur influence absolue sur le terme correctif est extrêmement petite, dans les conditions que nous avons supposées, une très-faible altération de leurs valeurs ne pourra y produire que des changements insensibles. L'expérience confirme cette induction; car lorsqu'on a fait, dans une même station, un grand nombre de mesures des angles a, h_1, h_2, avec les précautions prescrites ci-dessus pour éviter les cas de trop grandes perturbations de l'atmosphère, si l'on partage les résultats en plusieurs moyennes qui se correspondent, et qu'on les emploie séparément au calcul de l'angle dièdre A, par la formule (2), on ne trouve entre ses valeurs que des différences tellement petites et accidentées, qu'elles rentrent dans les limites des erreurs dont on ne peut répondre dans les observations faites avec le plus de soin.

79. La réduction à l'horizon n'a plus besoin d'être calculée quand on observe l'angle entre les objets avec l'instrument appelé *théodolite*, dont le type général a été représenté dans le tome II, *fig.* 81. Le plan de son limbe porte des niveaux croisés rectangulairement, dont les indications servent pour le rendre horizontal. Les deux lunettes adaptées à ce limbe, l'une inférieure, l'autre supérieure, peuvent parcourir son contour de manière à embrasser tous les angles que l'on veut mesurer; et elles ont aussi chacune un mouvement de course peu étendu dans un plan perpendiculaire au limbe, qui permet de les pointer sur des objets situés à peu de distance au-dessus ou au-dessous de l'horizon, sans qu'il cesse lui-même d'être horizontal. Quand on veut prendre l'angle compris entre deux signaux S_1, S_2, on dirige d'abord la lunette inférieure sur un objet fixe quelconque qui servira de point de repère, et on la fixe elle-même au limbe par ses pièces d'attache; de sorte qu'on prévient tout mouvement horizontal que celui-ci pourrait prendre, soit en constatant qu'elle reste toujours sur son

point de mire, soit en faisant tourner horizontalement le limbe avec elle pour l'y ramener, si l'on trouvait que ce point n'est plus sous le fil vertical de son réticule. Cette condition d'immobilité étant ainsi toujours assurée, on dirige la lunette supérieure sur l'image réfractée d'un des deux signaux, par exemple sur Σ_1, en la faisant mouvoir dans son plan vertical pour l'atteindre, et on lit sur le limbe la division à laquelle le vernier de son alidade correspond alors; puis on la détourne vers l'image Σ_2 du signal S_2, et après l'avoir pointée sur elle de la même manière, on lit de nouveau la division à laquelle son vernier est parvenu. L'arc parcouru ainsi sur le limbe est évidemment l'angle dièdre compris entre les verticaux des deux objets. C'est donc notre angle horizontal A qui est ainsi obtenu sans réduction. Mais, pour se procurer cet avantage, on se soumet à dépendre de l'exacte horizontalité du limbe, et aussi de l'exacte perpendicularité du mouvement de la lunette supérieure relativement à son plan. A la vérité, l'accomplissement de ces deux conditions peut être constaté par des vérifications faciles à imaginer; mais il ne faut pas se dispenser de les faire. Le théodolite portatif, tel qu'il est représenté *fig.* 81 du tome II, est aujourd'hui fort employé en France pour les triangulations secondaires; ce qu'il doit à l'exactitude des procédés de division et de construction propres à notre excellent artiste M. Gambey. C'est aussi avec ce même genre d'instrument qu'a été effectuée la triangulation générale de l'Angleterre, pour laquelle Ramsden en avait construit un d'une grande dimension, et d'une exécution admirable. Mais les opérations géodésiques de France et d'Espagne ont été

mesure de même, en celles-ci, les angles plans a_1, a_2, ainsi que les distances zénithales des lignes visuelles qui les limitent, et il conclut de là, par le calcul, les angles dièdres A_1, A_2, propres à chacun de ces sommets, c'est-à-dire compris comme A, entre les plans visuels menés aux deux autres stations par les verticales S_1N_1, S_2N_2 qui leur sont propres.

Pour voir l'usage qu'on peut faire de ces résultats, supposons d'abord que les trois normales se coupent mutuellement dans un même point C, comme le représente la *fig.* 14; alors, de ce point comme centre avec un rayon quelconque CA, ou R, décrivez une surface sphérique qui coupera les trois normales en A, A_1, A_2. Joignez ces points deux à deux par des arcs de grands cercles, vous formerez un triangle sphérique dont les angles seront les angles dièdres précédemment déterminés; de sorte que, si vous pouvez connaître, en outre, la longueur d'un de ses côtés C, C_1, C_2, vous obtiendrez, par le calcul trigonométrique, les longueurs des deux autres.

Venons maintenant au cas général, où les trois normales pourront ne pas s'entrecouper, même deux à deux. Alors, sur la normale indéfinie SN de la *fig.* 13, je prends un point C pour centre d'une sphère qui, dans cette localité, soit osculatrice n'importe dans quel sens, à la surface terrestre régularisée, telle que la formerait le prolongement des mers environnantes; et, de ce même point, je mène aux stations S_1, S_2 deux sécantes que je suppose seulement former de très-petits angles avec les normales réelles qui y correspondent. Cette condition sera toujours réalisable si l'on restreint suffisamment l'étendue du triangle terrestre SS_1S_2, et il faudra seulement lui assigner des limites telles qu'elle soit certainement remplie. En reportant ceci à la *fig.* 14, on pourra encore former, sur la normale CS et les deux sécantes, un triangle sphérique dont l'angle au sommet A sera l'angle dièdre déterminé par l'observation en S. Mais les deux autres angles seront compris entre les plans diamétraux menés par les sécantes CS_1, CS_2, non par les normales. Or, si l'on désigne respectivement ces angles par $(A)_1$, $(A)_2$, je dis que, dans les circonstances supposées, on pourra, sans erreur appré-

ciable, leur substituer les angles dièdres A_1, A_2, observés en S_1 et S_2 autour des normales réelles, comme précédemment.

81. Pour le faire voir, je considère d'abord le sommet S_1. Par supposition, la sécante CS_1 forme avec la normale S_1N_1 un très-petit angle que je désigne par ω. Je le porte, avec les deux droites qui l'embrassent, dans le plan de la *fig.* 15. Le sommet S_1, ainsi reproduit, est commun à la sécante et à la normale. Je mène en S_1 un plan perpendiculaire à cette dernière; et je désigne sa trace sur le plan de la figure par la droite indéfinie S_1X, qui formera avec S_1N_1 un angle droit. Ce plan contiendra l'angle dièdre calculé A_1. Je l'y définis par les deux droites S_1T, S_1T_2, qui le limitent dans sa position réelle, tel qu'on la conclut des observations faites en S_1, sur les images des deux signaux S, S_2, réfractées chacune dans leur vertical propre, mené par la normale S_1N_1. Je nomme i l'angle plan que la première de ses branches S_1T forme avec la trace S_1X, de sorte que la seconde S_1T_2 formera avec cette même trace l'angle $i + A_1$. Maintenant je prolonge CS_1 indéfiniment dans le plan de la figure, ce qui y produira la droite CS_1M. Les deux branches de l'angle A_1 sont obliques à cette droite, par conséquent lui-même se trouve hors du plan tangent à la sphère dont CS_1 est un rayon. Donc, si par CS_1 on mène deux plans diamétraux qui contiennent ses branches S_1T, S_1T_2, ils comprendront un angle dièdre différent de A_1 et que je désigne par A'_1. Je vais d'abord le déterminer. Ce sera une véritable réduction à l'horizon, qui s'effectuera facilement par la formule générale que nous avons établie; et elle nous sera nécessaire plus tard dans un grand nombre de cir-

limite; car, si ω était nul, ils seraient aussi égaux à 90°, puisque les points x, t, t_2 se trouveraient alors tous trois dans un plan perpendiculaire à la droite CS_1M. Pour rappeler cette circonstance, je désigne ceux-ci par des dénominations analogues, en faisant

$$mS_1x = 90^\circ + \omega\,; \qquad mS_1t = 90^\circ + \theta\,; \qquad mS_1t_2 = 90^\circ + \theta_2.$$

θ et θ_2 peuvent aisément s'évaluer. En effet, les triangles sphériques mxt, mxt_2 sont évidemment rectangles en x, par notre construction. Or on connaît, dans chacun d'eux, le côté commun mx ou $90^\circ + \omega$, et le côté tx, ou t_2x, qui ont respectivement pour valeurs i et $i + A_1$. On aura donc les hypoténuses mt, mt_2 par les relations établies au deuxième cas des triangles sphériques rectangles de Legendre, lesquelles donneront ici

$$\cos mt = \cos mx \cos tx\,, \qquad \cos mt_2 = \cos mx \cos t_2x\,,$$

et, en remplaçant les arcs par les angles au centre qu'ils soutendent,

$$\sin\theta = \sin\omega\cos i\,, \qquad \sin\theta_2 = \sin\omega\cos(i + A_1).$$

Il nous sera tout à l'heure utile de connaître aussi les inclinaisons des mêmes hypoténuses sur le plan de l'angle A_1; ce sont les angles dièdres mtx, mt_2x, formés aux sommets t, t_2 de nos deux triangles. Je les désigne par ces lettres mêmes, et comme ils devront pareillement différer très-peu de 90°, je fais

$$t = 90^\circ + \tau\,, \qquad t_2 = 90^\circ + \tau_2.$$

Or, le même passage de Legendre, appliqué à ces angles, donne

$$\operatorname{tang} t = \frac{\operatorname{tang} mx}{\sin tx}\,, \qquad \operatorname{tang} t_2 = \frac{\operatorname{tang} mx}{\sin t_2x}\,;$$

de là on tire

$$\operatorname{tang}\tau = \operatorname{tang}\omega\sin i\,; \qquad \operatorname{tang}\tau_2 = \operatorname{tang}\omega\sin(i + A_1).$$

85. Nous supposons ω un très-petit angle; il peut être rendu aussi petit que l'on voudra en rapprochant suffisamment les trois sommets S, S_1, S_2, puisqu'il serait évidemment nul si on les rapprochait jusqu'à les mettre en coïncidence. Faisons-le seulement tel

Pages.

sphères osculatrices à l'ellipsoïde terrestre, et la surface de ce sphéroïde, à mesure qu'on s'éloigne du point d'osculation. Il n'en peut résulter aucune erreur appréciable dans les résultats des calculs géodésiques, lorsqu'on restreint l'emploi local de ces sphères autant qu'on le fait habituellement. 287-289

Note II. Sur la rectification générale de l'ellipse ; séries qui expriment analytiquement la longueur d'un arc méridien comptée depuis le pôle jusqu'à une distance polaire quelconque, et la portion de cet arc comprise entre deux distances polaires assignées, lorsque les éléments de l'ellipsoïde sont connus. 290-292

Section VI. — Sur les grands nivellements géodésiques.. 293

Détermination directe de la hauteur absolue d'une station au-dessus de la mer la plus proche, au moyen d'un nivellement matériellement effectué. Détermination successive des différences de niveau de cette station aux suivantes, et de celles-ci entre elles, par le procédé des distances zénithales réciproques, sur un ellipsoïde de révolution dont les éléments sont donnés conventionnellement. 293-294

Application théorique et numérique des formules de réfraction exposées dans le tome Ier, pour calculer les différences de niveau par les observations de distances zénithales réciproques simultanées ou non simultanées. Expressions générales de ces différences. Les restrictions nécessairement imposées aux amplitudes des arcs qui séparent les stations géodésiques, permettent toujours d'effectuer les calculs en prenant pour rayon sphérique le rayon osculateur moyen et constant qui est représenté par le demi-grand axe de l'ellipsoïde sur lequel le nivellement est opéré. . . . 294-320

Examen du cas particulier où l'on détermine la hauteur absolue d'une station, d'après la dépression observée de l'horizon de la mer. Incertitude inévitable de ce mode d'évaluation. 320

Discussion de quelques points de théorie relatifs aux calculs des réfractions atmosphériques. 320-324

Justification des éléments atmosphériques sur lesquels repose le calcul des différences de niveau dans les cas proposés ci-dessus comme exemples. Observations qu'il serait utile de faire pour compléter la connaissance théorique de l'atmosphère terrestre. . 324-333

Section VII.— Application des éléments de l'ellipsoïde terrestre à la détermination du mètre théorique, considéré comme la dix-millionième partie du quart du méridien. 334

Considérations qui ont présidé à la détermination du mètre légal. Évaluation du mètre théorique d'après les éléments de l'ellipsoïde terrestre, obtenus en combinant l'arc moyen de France et d'Espagne, d'abord avec celui du Pérou, puis avec celui de Laponie. Ces deux résultats, à peine différents entre eux, donnent le mètre

Ceci nous montre déjà que l'angle dièdre A'_1 ne différera de A_1 que par une quantité toujours moindre que $\frac{\omega^2}{2R''}$, puisque ce coefficient sera encore affaibli par les facteurs trigonométriques qui le multiplient, lesquels sont essentiellement fractionnaires. Si donc nous restreignons assez le triangle terrestre SS_1S_2 pour que $\frac{\omega^2}{2R''}$ ne soit qu'une fraction de seconde négligeable, ces deux angles pourront être substitués l'un à l'autre dans les applications où ils devront entrer. Afin d'apprécier les limites d'amplitude de ω qui satisferaient à cette condition, supposons-le égal à $40''$: alors ω^2 sera 1600; et, d'après la valeur de $\log R''$ donnée plus haut, nous aurons

$$\log \omega^2 = 3,2041200$$
$$\log 2R'' = 5,6154551$$
$$\log\left(\frac{\omega^2}{2R''}\right) = \overline{3},5886649, \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega^2}{2R''} = 0'',0038776.$$

Une fraction de seconde telle que celle-là n'est pas appréciable aux instruments les plus précis. Or, quand nous serons arrivés à déterminer la figure générale de la terre, nous aurons le moyen de constater que, dans les amplitudes superficielles auxquelles on restreint les triangles géodésiques, et même dans les plus grandes amplitudes que peut leur permettre la condition de visibilité réciproque des signaux, les angles ω sont toujours considérablement moindres que $40''$; de sorte que, pour tous ces cas, les deux angles dièdres A_1, A'_1, quoique géométriquement distincts, peuvent être employés comme égaux entre eux.

85. Mais cela ne suffit pas encore pour résoudre la question pratique que nous nous sommes proposée. Ce qu'il nous importe de connaître, c'est l'angle dièdre $(A)_1$ qui est compris en S_1 entre les deux plans diamétraux menés par la sécante CS_1, et par les deux sommets S, S_2, vus directement de ce point, sans l'intermédiaire des réfractions. Heureusement on peut le déduire de ce qui précède, et prouver qu'il est encore sensiblement égal à A_1 dans les conditions de restriction assignées au triangle terrestre SS_1S_2.

A cet effet, je suppose que les deux sommets S, S_2 puissent être observés directement du point S_1, à travers le vide. Les droites menées de S_1 à ces sommets comprendront entre elles un certain angle plan a_1, quelque peu différent du précédent. Mais elles seront situées dans les mêmes verticaux *réels*, où l'on a observé du même point S_1 leurs images réfractées Σ, Σ_2 à travers l'atmosphère, puisque la réfraction supposée régulière ne les fait point sensiblement sortir de ces plans. Seulement, les branches de l'angle oblique vrai a_1 se trouveront alors avoir des distances zénithales $90° + h_1$, $90° + h_2$, différentes de celles qu'on observe habituellement aux branches de l'angle oblique réfracté. Toutefois, les dépressions positives ou négatives h, h_2, seront encore très-petites, même généralement plus petites, abstraction faite de leur signe propre, que celles qu'on observe à travers l'air. Si l'on introduit ces nouveaux éléments dans la formule qui donne la réduction à l'horizon pour des dépressions ainsi restreintes, elle devra évidemment reproduire le même angle dièdre A_1, que l'on a conclu des images réfractées dans les mêmes verticaux, c'est-à-dire qu'on aura sous cette nouvelle forme

$$A_1 = a_1 + \frac{1}{2}\left[\frac{(h_2 + h)^2 \sin^2 \frac{1}{2} a_1 - (h_2 - h)^2 \cos^2 \frac{1}{2} a_1}{R'' \sin a_1}\right],$$

A_1 étant ici le même que précédemment.

86. Supposons maintenant que les deux mêmes sommets S, S_2 soient observés du sommet S_1 également à travers le vide, mais que l'on mesure leurs distances zénithales à partir de la sécante CS_1M de

ra une certaine autre valeur $(A)_1$, dont l'expression sera

$$(A)_1 = a_1 + \frac{1}{2}\left[\frac{(h'_2 + h')\sin^2\frac{1}{2}a_1 - (h'_2 - h')^2\cos^2\frac{1}{2}a_1}{R''\sin a_1}\right];$$

différera ainsi seulement de A_1 par l'influence que la diversité s dépressions y exercera.

87. Pour en apprécier l'effet, je reproduis les éléments généraux de la *fig.* 15, dans la *fig.* 16. Mais, afin de ne pas la compliquer, j'y marque seulement la trace S_1T du vertical *vrai* qui contient la branche directe S_1S menée au sommet S, branche dont la dépression TS_1S ou h_1, dans ce même vertical, sera représentée par l'arc *ts* sur la sphère décrite autour de S_1, avec le rayon 1. Alors l'arc *ms* de la même sphère y représentera la distance zénithale ζ de la même branche S_1S, mesurée à partir de la sécante CS_1M. Or, cet arc *ms* peut être évalué, presque sans calcul, avec une approximation parfaitement suffisante pour notre but. En effet, l'angle TS_1X étant désigné par i comme précédemment, nous avons trouvé que l'arc *mt*, ou $90 + \theta$ de la *fig.* 15, a pour valeur $90^\circ + \omega\cos i$; et nous avons trouvé que l'angle formé en *t* par ce même arc avec le plan TS_1X, étant compté vers S_1X, est $90^\circ + \omega\sin i$. En lui ajoutant 90°, nous aurons, dans notre *fig.* 16, l'angle dièdre total formé au même point *t* du triangle *mts*; de sorte que la valeur de celui-ci, comptée toujours dans le même sens, sera $180^\circ + \omega\sin i$. Ainsi, dans la construction qui nous sert de type, la disposition du triangle *mts* serait telle que la représente la *fig.* 16 *bis*. Or, le côté *ms* ou ζ du triangle *mts*, se trouvant ainsi opposé à un angle qui diffère seulement de 180° par un terme très-petit de l'ordre ω, sa longueur ne différera de la somme des deux autres côtés du triangle que par une quantité d'un ordre bien plus petit encore, puisque son expression, si l'on jugeait nécessaire de la calculer jusqu'aux termes de l'ordre ω^2, serait ici $-\frac{1}{2}\omega^2\sin h\sin^2 i$. Admettant donc qu'on la néglige, d'après cette évaluation, ou d'après la simple évidence géométrique, on en conclura

$$\zeta = 90^\circ + h + \omega\cos i,$$

et, par une analogie évidente,

$$\zeta_2 = 90^\circ + h_2 + \omega \cos(i + A_1);$$

car l'angle oblique a_1 doit toujours avoir pour projection A_1, sur le plan TS_1X qui est perpendiculaire à la normale réelle S_1A_1.

Les termes qui s'ajoutent à 90° dans ces deux expressions, sont ceux qu'il faut substituer à h' et h'_2 dans l'expression de $(A)_1$. On aura donc

$$A_1 = a_1 + \frac{1}{2}\left\{\frac{\left\{h_2 + h + \omega[\cos i + \cos(i + A_1)]\right\}^2 \sin^2 \frac{1}{2} a_1 - \left\{h_2 - h - \omega[\cos i - \cos(i + A_1)\right.}{R'' \sin a_1}\right.$$

au lieu qu'on avait, dans les mêmes conditions de visibilité directe,

$$A_1 = a_1 + \frac{1}{2}\left[\frac{(h_2 + h)^2 \sin^2 \frac{1}{2} a_1 - (h_2 - h)^2 \cos^2 \frac{1}{2} a_1}{R'' \sin a_1}\right].$$

88. Ces deux expressions ne diffèrent que par les petits termes dépendants de ω qui s'ajoutent, dans la première, aux dépressions vraies h, h_2. Si on développait les carrés que contient celle-ci, la différence se trouverait évidemment composée de termes ayant pour coefficient ω^2, ou les produits de ω par les dépressions vraies h, h_2. Or, ces dépressions ne sont jamais que de quelques minutes, et l'angle ω ne dépasse pas un petit nombre de secondes. Les termes dont il s'agit seront ainsi toujours insensibles dans le peu d'étendue que l'on donne aux triangles terrestres. Ils se confondront avec les

[redacted]

sommets. Quoique l'excessive petitesse des angles ω, sur laquelle cette démonstration repose, ne puisse être prouvée que plus tard, par des considérations d'ensemble, elle n'implique pas de cercle *vicieux*, parce qu'il suffira qu'elle justifie alors ce caractère que nous venons de lui attribuer. D'ailleurs nous en trouverons des confirmations de fait dans le cours des opérations géodésiques mêmes.

89. Ceci reconnu, je reviens à la *fig.* 14. C y désigne, sur la normale CS, le centre d'une sphère qui, étant osculatrice, dans cette localité, à la surface terrestre régularisée, s'assimile d'assez près, comme assez continûment, avec elle, pour que les sécantes menées de ce centre aux stations S_1, S_2 ne forment que de très-petits angles avec les normales réelles. Si l'on coupe ces trois sécantes par la surface sphérique décrite du centre C, avec le rayon osculateur local CA ou R, les plans diamétraux qui les contiennent par couples tracent sur la surface de la sphère un triangle curviligne formé par des arcs de grands cercles, ayant pour côtés ces arcs mêmes, AA_1, AA_2, A_1A_2; et pour angles des sommets les trois angles dièdres, A, A_1, A_2, qu'on a déterminés par l'observation autour des normales menées à ces trois sommets respectifs, la petitesse des angles ω_1, ω_2 étant supposée telle que les angles dièdres compris entre les plans diamétraux qui forment le triangle sphérique puissent, sans aucune erreur appréciable, être supposés égaux à ceux-là. Alors, si l'on parvenait à connaître la longueur absolue d'un des arcs AA_1, AA_2, A_1A_2, par une mensuration directe, ou par une opération trigonométrique qui le rattachât à quelque autre arc ainsi mesuré, on obtiendrait les longueurs absolues des deux autres côtés par le théorème connu que, dans tout triangle sphérique, les sinus des côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés. Car, en supposant, par exemple, que l'on eût ainsi le côté C opposé à l'angle A, on en déduirait

$$\sin C_1 = \sin C \frac{\sin A_1}{\sin A}. \qquad \text{et} \qquad \sin C_2 = \sin C \frac{\sin A_2}{\sin A}.$$

A la vérité, pour résoudre *immédiatement* ces équations par les Tables de sinus, il faudrait exprimer le côté C en parties de la gra-

duation de la sphère osculatrice, les angles dièdres A, A_1, A_2 étant déjà donnés sous cette forme par les instruments qui les mesurent, ou par la formule qui les déduit des angles obliques a, a_1, a_2 et des distances zénithales ainsi exprimées. Cela exigerait donc que l'on connût la longueur $D^{(0)}$ qu'un degré de la graduation adoptée occupe sur le contour d'un des grands cercles de cette sphère; et cette connaissance serait nécessaire encore pour obtenir les longueurs absolues des arcs C_1, C_2, d'après les valeurs que le calcul, fait avec les Tables, leur assignera dans le même mode de graduation. Mais la partie principale de ces conversions devient inutile si l'on suppose, comme c'est le cas réel, que les arcs C, C_1, C_2, ici considérés, ne dépassent pas en longueur 2 degrés sexagésimaux, limite qu'on ne leur laisserait même pas atteindre dans ces opérations quand on pourrait étendre aussi loin la vision réciproque. Car alors, les expressions approximatives que nous avons établies dans le § 62, page 68, deviennent applicables et suffisantes. Or, si on les emploie pour développer d'abord l'expression d'un des côtés cherchés, par exemple celle de C_1, en fonction de son sinus, dont la valeur est ici donnée; puis, que, dans ce développement, on remplace les puissances de $\sin C$ par leurs valeurs en fonction de l'arc C, en se bornant toujours aux limites d'approximation que nos formules embrassent, on trouve

$$C_1 = C\frac{\sin A_1}{\sin A} + \frac{1}{6}\frac{\sin A_1 \sin(A_1 + A)\sin(A_1 - A)}{\sin^3 A}\cdot\frac{C^3}{R^2};$$

et semblablement

[redacted]

k est le module logarithmique direct, dont la valeur est 0,43429 44819 et le logarithme tabulaire $\bar{1}$,63778 43113. Ces valeurs de $\log C_1$ et de $\log C_2$, données par nos formules générales, s'accordent, en effet, avec celles qu'on déduirait directement des expressions précédentes de C_1 et de C_2, en se restreignant aux mêmes limites d'approximation. Maintenant on voit que, dans ces expressions, la connaissance du rayon R de la sphère osculatrice locale est seulement nécessaire pour calculer les termes correctifs qui s'ajoutent à la partie principale du côté cherché; et cette partie est précisément celle qu'on obtiendrait si l'on résolvait le triangle $A A_1 A_2$ comme rectiligne, auquel cas les sinus des angles A, A_1, A_2 ne seraient pas proportionnels aux sinus des côtés opposés, mais à ces côtés eux-mêmes. Il reste donc à voir si la valeur locale de R peut être toujours connue, assez approximativement, pour servir à évaluer ces termes correctifs, qui sont essentiellement très-petits, par le peu d'extension des triangles, à sommets réciproquement visibles, que l'on peut former sur la surface terrestre.

90. A cet effet, j'annoncerai d'avance que, lorsque l'ensemble de la surface terrestre nous sera connu, par la comparaison des mesures de degrés du méridien, effectuées en des régions très-distantes entre elles, et que nous aurons établi définitivement, d'après cet ensemble, la succession de nos sphères osculatrices pour toute l'étendue de la surface, nous arriverons à reconnaître que les longueurs de leurs rayons R sont comprises entre les valeurs suivantes, que j'exprime en toises:

le plus grand aux pôles	$R = 3282300^T$	$\log R = 6,5161783$;
le plus petit à l'équateur	$R = 3271867$	$\log R = 6,5147956$.

Maintenant, dans la formule qui exprime les longueurs des côtés C_1, C_2 en fonction du côté donné C, je suppose C égal à 100000^T, ce qui lui donne une extension qui n'a jamais été réalisée dans aucune opération géodésique, et qu'il serait très-difficile d'embrasser entre des signaux réciproquement visibles, si l'on en avait l'intention. Ceci admis, je calcule successivement le coeffi-

cient du terme correctif $\frac{C^3}{6R^2}$, avec les valeurs attribuées ici à nos deux rayons extrêmes, et je trouve :

$$\text{par le plus grand rayon} \quad \frac{C^3}{6R^2} = 15^T,47\,;$$

$$\text{par le plus petit.....} \quad \frac{C^3}{6R^2} = 15^T,57.$$

Ainsi, dans ces suppositions exagérées, tant pour l'excessive longueur attribuée au côté C que pour la disproportion extrême des rayons R employés au calcul du coefficient considéré, les deux évaluations qu'on en obtiendrait ne différeraient entre elles que de $0^T,1$, quantité dont on ne pourrait répondre, même sur la mesure directe d'un si grand arc; de sorte que le choix qu'on pourrait faire entre ces deux valeurs du rayon R serait tout à fait indifférent. A la vérité ces évaluations précises ne peuvent être connues qu'après qu'on a définitivement arrêté le sens d'osculation que l'on veut attribuer à ces sphères, d'où résultent les positions locales de leurs centres, et les longueurs de leurs rayons sur les diverses normales où ils sont placés. Mais on pourrait, sans craindre une erreur plus sensible, leur substituer, dans ce calcul, le rayon de toute autre sphère que l'on aurait reconnue déjà comme approchant beaucoup de s'assimiler à la surface terrestre dans une région quelconque sur un arc de petite étendue. Par exemple, prenons pour le rayon R la valeur 3259442^T, qui nous a été donnée par l'opération de Pensylvanie, comme appartenant

l'opacité de la masse terrestre, selon que le passage s'opérera au-dessus ou au-dessous de leur horizon propre. Tous les lieux dont les normales ont cette corrélation sont dits être sous le *même méridien céleste;* les plans horaires dans lesquels chaque étoile s'y trouve à un même instant physique sont parallèles entre eux.

5. Généralement, tous les plans menés par l'œil de l'observateur terrestre seront des plans diamétraux de la sphère universelle; tous les angles visuels qu'on y observera auront donc leur mesure sur les arcs de grands cercles résultant de l'intersection de cette sphère par les plans qui les contiennent, et leur grandeur sera exprimée par la portion d'arc interceptée entre les rayons visuels qui les limitent. On conçoit ainsi tous les cercles de la sphère céleste divisés en degrés, minutes et secondes, et l'on exprime les mesures des angles visuels au moyen de ces divisions. Par exemple, lorsque deux étoiles, comprises dans un même plan horaire, traversent simultanément le méridien terrestre d'un certain lieu, si les rayons visuels menés à l'une et à l'autre comprennent entre eux un angle de dix degrés, on dira qu'elles se trouvent à dix degrés de *distance angulaire,* ou, par abréviation, à 10° *de distance* l'une de l'autre. On définit de même tous les angles visuels par les arcs de distance interceptés.

6. Les arcs que le mouvement diurne fait décrire aux étoiles sur leurs parallèles propres s'expriment aussi de la même manière, en parties de la graduation de ces cercles. Mais ces énoncés ne sont pas immédiatement comparables entre eux ni à ceux des angles visuels, parce que les subdivisions qu'ils expriment sont comptées

triangle sphérique considéré, et S la superficie totale de la sphère, ces deux quantités étant exprimées dans une même espèce d'unités de surface et de longueur. On démontre, dans les *Éléments de Géométrie* (Legendre, livre VII, prop. XXIII), qu'il existe toujours l'égalité suivante :

$$\frac{A + A_1 + A_2 - 2D}{8D} = \frac{s}{S}.$$

Plus s est petit, comparativement à S, plus les deux membres de cette équation s'affaiblissent. Enfin, si l'on suppose que le rapport $\frac{s}{S}$ devienne insensible, ce qui identifie le triangle sphérique à un triangle rectiligne qui serait compris dans un élément superficiel infiniment petit du plan tangent à la sphère, le numérateur du premier membre doit devenir aussi insensible, comparativement à son dénominateur 8D. Donc, à cette limite finale, la somme des trois angles du triangle est égale à deux angles droits, puisqu'elle ne diffère de deux droits que par un arc $8D\frac{s}{S}$, qui peut être supposé moindre que toute quantité assignable par l'atténuation du facteur $\frac{s}{S}$.

92. Cette relation peut se mettre sous plusieurs autres formes, selon les diverses expressions que l'on peut convenir de donner aux angles et aux surfaces. Par exemple, soit R le rayon de la sphère, exprimé dans la même espèce d'unité de longueur qui est employée

[redacted]

pléments d'un même angle Q'OZ'. Celui-ci s'appelle la *latitude géographique du lieu considéré*. Par une raison semblable, cette *latitude est égale à la hauteur angulaire* P'ON' du pôle, comptée du côté du zénith opposé à la trace de l'équateur. Tout évidentes que soient ces relations, comme leur emploi se représente continuellement, il était nécessaire d'en fixer les énoncés.

8. La position des divers parallèles célestes au-dessus de l'horizon de chaque lieu s'y définit d'après la distance zénithale méridienne des étoiles qui les décrivent, distance que nous avons appris à déterminer par observation. Elle peut se calculer d'après la distance polaire du parallèle, en portant cette distance de part et d'autre du pôle visible, dans le plan du méridien local.

9. Les degrés, minutes et secondes des parallèles célestes n'ayant pas des valeurs absolues comme les degrés des grands cercles, il faut, pour les rendre comparables entre eux et à ceux-ci, associer à leurs expressions un élément déterminatif, qui est la grandeur relative du rayon de ce parallèle comparé au demi-diamètre de la sphère; mais, avec cette spécification, il est facile de convertir les arcs de parallèles en arcs de grands cercles, et inversement.

En effet, pour découvrir ces rapports, transportons le centre de la sphère céleste au point O, *fig.* 2, supposé le centre local des observations. Traçons, dans le plan de la figure, le grand cercle PSQP' du méridien local, c'est-à-dire celui suivant lequel le plan de ce méridien coupe la sphère céleste. Soit QEQ' le grand cercle de l'équateur céleste ayant, comme le précédent, son centre au point O, centre des observations. Représentons par SUS' un parallèle quel-

Le premier membre de ces deux dernières égalités s'appelle l'*excès sphérique* du triangle sphérique considéré, quelle que soit celle des deux formes qu'on adopte pour l'expression des arcs. Je le désignerai désormais par ε dans le première, et par ε'' dans la deuxième; on aura ainsi

$$\varepsilon = \frac{s}{R^2}, \qquad \varepsilon'' = \frac{s}{R^2} R''.$$

Quelle que soit celle qu'on adopte, on pourra toujours l'évaluer pour un triangle sphérique dont on donnera la superficie s, en la divisant par le carré du rayon R exprimé dans la même espèce d'unités de longueur qu'on aura employée pour calculer s. On voit donc qu'ici encore l'évaluation directe de ε exige la connaissance du rayon R. Mais la rigueur d'appréciation de cet élément sera d'autant moins importante que s se trouvera moindre relativement à R^2, c'est-à-dire à mesure que l'étendue superficielle du triangle considéré sera plus petite, comparativement à la surface totale de la sphère sur laquelle il est établi.

95. J'arrive maintenant au théorème de Legendre. Considérons un triangle sphérique quelconque, dont les angles soient A, A_1, A_2 et C, C_1, C_2 les côtés respectivement opposés; on aura rigoureusement

$$\sin C_1 = \sin C \frac{\sin A_1}{\sin A}, \qquad \sin C_2 = \sin C \frac{\sin A_2}{\sin A}.$$

Avec ces mêmes côtés C, C_1, C_2, étendus en ligne droite, forme

NOMS DES ASTRES.	DISTANCE au pôle boréal.	DURÉE du passage entre deux fils observée.	PRODUIT de la durée du passage par le sinus de la distance polaire.
Polaire.....	1°42′20″	581ˢ80	17ˢ32
La Chèvre.....	44.12.36	24,90	17,37
β de la Vierge.....	87. 9.52	17,40	17,37
Rigel.....	98.25.50	17,35	17,36
Antarès.....	115.59.50	19,35	17,39
	Résultat moyen.		17,36

Les trois premières colonnes renferment, pour chaque étoile, les résultats de l'observation. En multipliant la durée du passage par le sinus de la distance polaire, on obtient les nombres contenus dans la dernière colonne, et leur égalité presque exacte montre bien que la proportion dont il s'agit est au moins très-approchée de la vérité. Si l'on consent à négliger les petits écarts qu'on y découvre, en les attribuant aux erreurs des observations, la moyenne de ces nombres représentera la durée du passage d'une étoile qui serait située dans le plan de l'équateur. C'est ce qu'on nomme l'*intervalle équatorial des fils*.

Pour rendre raison de ces résultats, considérons, *fig.* 3, deux fils réticulaires F*f*, F′*f*′, placés exactement dans le plan focal du

même manière, ce qui exige seulement que l'on remplace $\frac{s}{R^2}$ ou $\frac{s'}{R}$ par $\frac{s}{R^2}R''$ ou $\frac{s'}{R^2}R''$ dans les équations que nous venons de former.

96. Puisque ces expressions contiennent en dénominateur le carré du rayon de la sphère sur laquelle on suppose le triangle établi, nous avons ici à considérer, comme dans nos formules précédentes, jusqu'à quel point l'évaluation de l'excès sphérique ε'', exprimé en secondes de degré, comme il faut l'avoir pour le répartir entre les trois angles A, A_1, A_2, serait affectée par les petites incertitudes où l'on pourrait être sur la valeur précise du rayon R. Car, bien que, dans une grande triangulation, l'on ait toujours soin de se transporter successivement aux trois sommets de chaque triangle, pour déterminer par l'observation les angles qui y correspondent, ce qui en donne l'excès sphérique, sans calcul, par leur somme même, on verra tout à l'heure que, pour la plupart des résultats qu'on déduit d'une telle triangulation, l'on est obligé de subdiviser ces triangles primitifs en triangles partiels, où l'un des angles est souvent inconnu ; de sorte que, pour le conclure de la somme des deux autres, il faut d'abord calculer théoriquement la valeur totale de l'excès sphérique ε'', d'après le rapport de la superficie du triangle considéré, au carré R^2 de la sphère sur laquelle on le suppose établi.

A cet effet, je reprends les mêmes rayons qui nous ont hypothétiquement servi dans l'épreuve précédente, p. 100. Seulement pour

sages que nous avons rapportés (*). Il résulte encore de cette distinction que l'étoile, qui décrit l'arc de son parallèle, ne peut pas suivre rigoureusement le fil rectiligne qui en représente la corde. Si elle coïncide avec lui au commencement et à la fin de l'intervalle qu'il soutend, elle devra s'en écarter dans les positions intermé-

---

(*) Soient R le rayon de l'équateur de la sphère céleste, r celui du parallèle. La corde que soutend l'angle E sur le cercle équatorial est $2R \sin \frac{1}{2}E$; celle que l'angle Π soutend sur le contour du parallèle est $2r \sin \frac{1}{2}\Pi$. Puisque, dans leur superposition, ces cordes doivent être égales, l'expression de cette égalité sera

$$R.\sin \tfrac{1}{2}E = r.\sin \tfrac{1}{2}\Pi.$$

Soit d la distance polaire du parallèle, on aura

$$r = R \sin d;$$

en substituant cette valeur, et divisant tout par R, il vient

$$(1) \qquad \sin \tfrac{1}{2}E = \sin d.\sin \tfrac{1}{2}\Pi;$$

c'est la formule exacte, générale et rigoureuse. Mais, lorsque les angles E et Π sont fort petits, comme dans les exemples dont nous avons fait usage, le rapport $\frac{\sin \frac{1}{2}E}{\sin \frac{1}{2}\Pi}$ est, à fort peu près, le même que celui de $\frac{E}{\Pi}$. Ainsi, en substituant ce second rapport au premier dans l'équation précédente, elle devient

$$(2) \qquad E = \Pi.\sin d;$$

c'est celle que nous avons employée, mais elle n'est applicable qu'à de très-petits angles.

En l'admettant comme suffisamment exacte, nommons T l'intervalle de

des faibles incertitudes que pourrait présenter l'appropriation d rayon R employé pour les calculer théoriquement.

97. Les résultats précédents peuvent se résumer dans un énonc général, qui a été donné par Legendre :

1°. *Étant donné un triangle sphérique, dont la surface est très petite, comparativement à la surface totale de la sphère sur laquelle il est établi, comme sont les triangles géodésiques formés localement sur le sphéroïde terrestre, si les angles diédres de ce triangle sont* A, A_1, A_2, *et* C, C_1, C_2 *les longueurs des côtés respectivement opposés à ces angles, comme le représente la* fig. 14, *formez un triangle plan* $A'A'_1A'_2$, fig. 17, *dont les côtés rectilignes soient égaux à* C, C_1, C_2, *et dont les angles* A', A'_1, A'_2 *respectivement opposés à ces côtés aient pour valeurs*

$$A' = A - \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad A'_1 = A_1 - \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad A'_2 = A_2 - \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Toutes les relations que la trigonométrie rectiligne établira entre les côtés C, C_1, C_2 *de ce triangle idéal auront lieu aussi entre ces mêmes côtés dans le triangle sphérique, en ne négligeant que des termes de l'ordre* $\frac{1}{R^4}$, *et d'ordres supérieurs.*

2°. *Si les trois angles* A, A_1, A_2 *sont donnés en parties de la graduation du cercle, ou sous toute autre forme convenue, on pourra aisément calculer la valeur de* ε *sous la même forme, puisqu'il est égal à l'excès de leur somme sur deux angles droits. On pourra encore le calculer sans avoir ces angles, si l'on connaît la surface s*

11. Les distances au zénith et les azimuts nous ont offert, pour chaque lieu de la terre, un système de coordonnées angulaires auxquelles on peut rapporter la position de tous les astres; mais ce système a l'inconvénient d'être variable d'un pays à l'autre. Car, à cause de la rondeur de la terre, les plans de l'horizon et du méridien, auxquels se rapportent les hauteurs et les azimuts, prennent, dans l'espace, toutes les directions possibles, et par conséquent les positions des astres, ainsi exprimées, n'offrent rien de comparable. L'équateur et les plans horaires célestes nous offrent un système de coordonnées analogues, mais bien préférable, puisque étant pris immédiatement dans le ciel, il fournit, à tous les astronomes situés sur la surface terrestre, un moyen uniforme et comparable d'exprimer les résultats de leurs observations.

12. Pour déterminer ainsi la situation d'un astre quelconque sur la sphère céleste, il suffit de connaître le plan horaire, ou le cercle horaire sur lequel il se trouve, et sa position sur ce cercle ou dans ce plan. Tout se réduit donc à déterminer ces deux éléments.

La position de l'astre sur son cercle horaire est déterminée lorsque l'on connaît sa distance au pôle ou sa *distance à l'équateur*, qui en est le complément et que l'on nomme la *déclinaison*; c'est pourquoi on appelle souvent les cercles horaires *cercles de déclinaison*.

La position du plan horaire sur la sphère céleste se détermine d'après l'angle qu'il fait avec un plan horaire connu. Pour cela, on en choisit un à volonté, auquel on rapporte tous les autres; ce sera, par exemple, celui qui passe par une étoile que l'on aura désignée.

déclinaison, elle se compte depuis 0° jusqu'à un angle droit; on la dit *boréale* ou *australe*, suivant que l'astre auquel elle appartient est situé au nord ou au sud de l'équateur. L'emploi des distances polaires est bien préférable dans les raisonnements et même dans les formules analytiques, à cause de la continuité de sens de leur numération; aussi en ferai-je plus habituellement usage.

13. Lorsque ces deux coordonnées, la *déclinaison* et l'*ascension droite*, sont connues, on peut trouver, par la trigonométrie sphérique, tous les rapports de position et de distance qui existent sur la sphère céleste entre les points auxquels elles se rapportent.

Par exemple, si l'on veut trouver l'*arc de distance* de deux étoiles, c'est-à-dire l'arc de la sphère céleste qui les unit, on tirera de leurs déclinaisons leurs distances à un même pôle. On prendra ensuite la différence de leurs ascensions droites; ce sera l'angle dièdre compris entre les plans horaires où elles se trouvent. Alors les deux distances polaires et l'arc de distance formeront, sur la sphère céleste, un triangle sphérique où l'on connaîtra deux côtés et l'angle compris. On pourra donc calculer le troisième côté ou l'arc de distance des deux étoiles (*). On pourrait, de la même manière, cal-

(*) Soient P la différence des ascensions droites des deux astres, ou l'angle au pôle compris entre leurs cercles de déclinaison; Δ', Δ'' leurs distances polaires respectives, et D l'arc de grand cercle qui mesure leur distance angulaire sur la sphère céleste. Si l'on considère le triangle sphérique formé par les trois côtés Δ', Δ'' et D, on y connaîtra Δ', Δ'' et l'angle compris P. Ainsi les règles de la trigonométrie sphérique, appliquées à ce cas, donneront

$$\cos D = \sin \Delta' \sin \Delta'' \cos P + \cos \Delta' \cos \Delta''.$$

En transportant ici le mode de transformation dont nous avons fait usage, pour une relation semblable, tome II, page 396, si l'on remplace cos D, cos P, puis $\cos(\Delta'' - \Delta')$ par leurs expressions équivalentes $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}D$, $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}P$, $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(\Delta'' - \Delta')$, on obtiendra cette expression, plus commode pour le calcul numérique :

$$\sin^2\tfrac{1}{2}D = \sin^2\tfrac{1}{2}(\Delta'' - \Delta') + \sin\Delta' \sin\Delta'' \sin^2\tfrac{1}{2}P.$$

Nous aurons plus loin l'occasion de reconnaître que le pôle change de position parmi les étoiles dans la suite des siècles, ce qui fait varier inégalement leurs distances polaires et leurs ascensions droites absolues; mais nous constaterons aussi que ce mouvement appartient en réalité à l'axe de

culer l'arc de distance, d'après les distances au zénith et les azimuts. Le raisonnement est le même, le système seul des coordonnées est changé. Je reviendrai tout à l'heure sur cette opération, qui est nécessaire dans quelques circonstances.

14. Le point de l'équateur d'où les astronomes comptent les ascensions droites dépend du mouvement du soleil, ou plutôt de la position de cet astre à une époque déterminée ; car c'est au soleil, comme au régulateur naturel des jours, des années et des siècles, que les astronomes rapportent toutes leurs observations. Mais ce choix, purement arbitraire, ne change point les positions respectives des astres dans le ciel ; il n'influe ni sur leurs déclinaisons, ni sur leurs différences d'ascension droite ; il détermine seulement leur ascension droite absolue. Il ne doit donc apporter aucun changement aux lois des mouvements des astres qui se dé-

---

rotation de la terre, et que les étoiles ne le partagent point. Leurs distances relatives D, évaluées par la formule précédente, ne peuvent donc changer que par l'effet des mouvements individuels qui seraient propres aux étoiles elles-mêmes, et qui altéreraient leurs positions relatives. Le calcul de la distance D, réitéré pour des époques très-éloignées les unes des autres, avec les valeurs de Δ', Δ'' et P qu'on y a observées, offre ainsi un moyen direct pour constater l'existence et la mesure de ces variations. Malheureusement les observations anciennes, faites avant l'invention des instruments à lunettes et des horloges à pendule, sont trop inexactes pour qu'on puisse en faire des applications si minutieuses ; on peut seulement en conclure que les mouvements propres des étoiles doivent être fort petits, puisque les configurations des groupes dans lesquels on les rassemble sous le nom de constellations présentent encore aujourd'hui les mêmes apparences que les astronomes grecs

duisent des rapports de leurs positions à différentes époques. Ainsi, jusqu'à ce que nous ayons acquis les données d'après lesquelles on a fixé cette origine, nous pouvons d'abord supposer les ascensions droites de toutes les étoiles rapportées à une d'entre elles, comme à une origine fixe et déterminée.

15. En observant avec l'instrument des passages les instants où les diverses étoiles traversent le méridien, et mesurant aussi leurs distances zénithales dans ce plan avec les cercles fixes, ou par des moyens équivalents, on détermine, comme nous venons de le dire, leurs ascensions droites et leurs déclinaisons. On peut donc dresser des registres qui font connaître la position de toutes les étoiles observées, et l'ordre dans lequel elles se succèdent dans leur passage. C'est ce que l'on nomme des *catalogues d'étoiles;* on en publie un chaque année, pour les plus apparentes, dans la *Connaissance des Temps*. Avec un pareil catalogue, rien n'est plus facile que d'apprendre à distinguer et à reconnaître toutes les constellations visibles dans le lieu où l'on se trouve: il faut pour cela suivre leur succession avec l'instrument des passages, ou même, si l'on manque de cet instrument, il suffit de se placer auprès d'une muraille dirigée à peu près dans le plan du méridien, et avoir avec soi une horloge qui suive le temps sidéral ou dont la marche soit déterminée. Dès que l'on connaîtra une seule étoile, et qu'on l'aura vu passer au méridien, on les reconnaîtra toutes d'après le catalogue qui donne leur différence d'ascension droite, et par conséquent les intervalles de temps après lesquels elles se suivent. Cette étude deviendra encore plus agréable et plus facile si l'on s'aide en même temps d'un *globe céleste*, ou d'une *carte céleste*, sur laquelle soient figurées les différentes constellations, avec les principales étoiles qui les composent; ce qui permet de les déterminer et de les déduire en quelque sorte les unes des autres par des alignements. C'est là le principal avantage de ces représentations graphiques; car il ne faut pas s'arrêter aux figures d'hommes et d'animaux, par lesquelles on désigne les différentes constellations. Ces figures n'ont aucun rapport réel avec l'arrangement des étoiles dans le ciel: elles ont été déterminées par le caprice des hommes, quelquefois par flatterie; mais cependant elles peuvent jusqu'à un certain point servir pour aider

Sur la réduction à l'horizon des angles observés dans des plans obliques.

Conservant toutes les déterminations adoptées dans la page 93, § 76, je reprends l'équation transformée de la page 94 :

$$(1) \qquad \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin^2 \tfrac{1}{2} a - \sin^2 \tfrac{1}{2} (z_2 - z_1)}{\sin z_1 \sin z_2}.$$

En retranchant de ses deux membres $\sin^2 \frac{1}{2} a$, j'ai

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A - \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{(1 - \sin z_1 \sin z_2) \sin^2 \tfrac{1}{2} a - \sin^2 \tfrac{1}{2} (z_2 - z_1)}{\sin z_1 \sin z_2}.$$

Comme les distances zénithales z_1, z_2 sont toujours peu différentes de 90°, il sera bon de mettre en évidence les petites hauteurs apparentes ou les petites dépressions accidentelles qui complètent le quadrant; les considérant donc comme négatives dans le premier cas, et comme positives dans le second, je fais généralement

$$z_1 = 90^\circ + h_1, \qquad z_2 = 90^\circ + h_2.$$

ce qui donne

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A - \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{(1 - \cos h_1 \cos h_2) \sin^2 \tfrac{1}{2} a - \sin^2 \tfrac{1}{2} (h_2 - h_1)}{\cos h_1 \cos h_2};$$

or, on a identiquement

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A - \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \sin \tfrac{1}{2} (A + a) \sin \tfrac{1}{2} (A - a),$$

et

$$(1 - \cos h_1 \cos h_2) = \sin^2 \tfrac{1}{2} (h_2 + h_1) + \sin^2 \tfrac{1}{2} (h_2 - h_1).$$

Ces équivalents étant substitués dans l'équation précédente, elle prend la forme qui suit :

$$\sin \tfrac{1}{2} (A + a) \sin \tfrac{1}{2} (A - a) = \frac{\sin^2 \tfrac{1}{2} a \sin^2 \tfrac{1}{2} (h_2 + h_1) - \cos^2 \tfrac{1}{2} a \sin^2 \tfrac{1}{2} (h_2 - h_1)}{\cos h_1 \cos h_2}.$$

On voit alors que le second membre sera toujours une quantité très-petite de l'ordre du carré de h_2 et de h_1. En outre, comme on prend toujours soin que l'angle a ait une notable grandeur, $\sin \frac{1}{2} (A + a)$ ne sera jamais assez petit pour compenser, comme dénominateur, l'atténuation produite par les facteurs $\sin^2 \frac{1}{2} (h_2 + h_1)$, $\sin^2 \frac{1}{2} (h_2 - h_1)$. Conséquemment $\sin \frac{1}{2} (A - a)$, et par suite l'arc $A - a$, seront de même ordre qu'eux. D'après cela, si l'on consentait à négliger le carré de $A - a$, on pourrait supposer A égal à a dans le facteur $\sin \frac{1}{2} (A + a)$, ce qui le transformerait en $\sin a$ qui est connu, et

c'est-à-dire que, dans chaque lieu, on compte 0^h, 0^m, 0^s sidérales quand il passe au méridien. On le désigne ordinairement par le signe ♈, caractère de la constellation appelée le *Bélier* ou *Aries*. Nous en verrons la raison plus tard. Je dois seulement avertir qu'*aujourd'hui* il se trouve considérablement éloigné des étoiles qui composent cette constellation, et cela se voit par les nombres mêmes que je viens de rapporter.

18. D'après ces définitions, rien de plus aisé que de trouver, à chaque instant, l'heure qu'il est, *en temps sidéral*, dans un lieu où l'on connaît la hauteur du pôle. Il suffit d'observer la distance zénithale d'une étoile connue et de calculer son angle horaire, que je suppose compté du méridien supérieur et dans le sens du mouvement diurne de 0° à 360°. En ajoutant cet angle à l'ascension droite absolue de l'étoile, et rejetant les circonférences entières s'il y en a, le reste, converti en temps, exprimera la distance du méridien au point du ciel que l'on a pris pour origine, c'est-à-dire l'*heure sidérale* (*).

On peut aussi trouver l'heure par l'observation du soleil ou d'une planète; mais il faut pour cela que les mouvements propres de ces astres soient exactement connus, afin de pouvoir réduire les distances zénithales aux mêmes termes que si l'on eût observé une étoile. Nous sommes donc forcé de renvoyer cette recherche plus

(*) Soient, *fig.* 4, M♈M′ le cercle de l'équateur; MM′ la projection du plan du méridien local sur le plan de ce grand cercle; OS la projection du méridien de l'étoile ou de son cercle horaire, tournant d'orient en occident, suivant le sens indiqué par la flèche extérieure. ♈S sera l'ascension droite, que nous nommerons A; MS sera l'arc de l'équateur correspondant à l'angle horaire actuel que l'on a observé, et que nous nommerons P. Ajoutant ces deux arcs, on aura $P + A = M♈$. Cette somme, convertie en temps sidéral, donnera donc la distance de ♈ au méridien, ou l'heure sidérale.

Ici il n'y a pas de circonférence entière à rejeter; il y en aurait si l'étoile était de l'autre côté du méridien, par exemple en S′. Alors, en comptant toujours les angles horaires à partir de OM, dans le sens du mouvement diurne, et de 0° jusqu'à 360°, on aurait $MSM'S' = P'$, $♈MS' = A'$. Par conséquent, $P' + A' = 360° - MS' + ♈MS'$; ainsi, en retranchant 360°, le reste serait $♈MS' - MS'$, ou M♈, comme tout à l'heure. La formule s'appliquerait de même dans tous les quadrants, ce qui tient à ce que les arcs qu'on y combine sont toujours comptés continûment dans leur sens propre, depuis 0° jusqu'à 360°.

fais, par abréviation,

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2}(h_2 + h_1) - \cos^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2}(h_2 - h_1)}{\cos h_1 \cos h_2} = c \sin a,$$

et $\qquad \frac{1}{2}(A - a) = x, \qquad$ d'où $\qquad \frac{1}{2}(A + a) = a + x.$

c sera une quantité connue que nous savons être fort petite, et $2x$ sera l'inconnue ou la réduction à l'horizon que nous voulons déterminer; alors notre équation (2) deviendra

$$\sin(a + x) \sin x = c \sin a,$$

ou, en développant le premier facteur,

$$\sin a \cos x \sin x + \cos a \sin^2 x = c \sin a.$$

Maintenant divisez les deux membres par $\cos^2 x$, et remplacez dans le second $\frac{1}{\cos^2 x}$ par son expression équivalente $1 + \tang^2 x$; l'équation ne contiendra plus d'inconnue que $\tang x$, et, en l'ordonnant par rapport à cette quantité, elle deviendra

$$\tang^2 x + \frac{\tang a}{1 - c \tang a} \cdot \tang x = \frac{c \tang a}{1 - c \tang a}.$$

Si l'on voulait considérer $\tang^2 x$ comme négligeable comparativement à $\tang x$, ainsi que nous l'avions fait d'abord, cette équation nous donnerait $\tang x$ égal à c; et, par suite, cette tangente pouvant être remplacée par $\sin x$ ou $\sin \frac{1}{2}(A - a)$ dans le même ordre d'approximation, il viendrait

$$\sin \frac{1}{2}(A - a) = c,$$

résultat identique à l'évaluation que nous avions obtenue directement avec les mêmes restrictions. Pour aller plus loin, il faut résoudre notre équation du second degré, en ne prenant que celle des deux racines qui donne x nul quand c est nul, comme notre équation primitive non divisée. En effectuant cette résolution, on trouve, après quelques réductions faciles,

$$\tang x = \frac{\tang a}{2(1 - c \tang a)} \left\{ -1 + \left[1 + \frac{4c(1 - c \tang a)}{\tang a} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Il ne reste plus qu'à développer la partie radicale du second membre suivant les puissances de la quantité très-petite qui s'y trouve associée à l'unité. Cela se fera au moyen de la formule du binôme

$$(1 + u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} u - \frac{1}{8} u^2 + \frac{1}{16} u^3 - \frac{5}{128} u^4 \ldots,$$

et l'on aura $\tang x$ avec telle approximation que l'on voudra; d'où l'on déduira l'angle x par les Tables logarithmiques usuelles.

Je me bornerai, comme exemple, à effectuer ce développement jusqu'à la

jour. Au moyen de la machine parallatique, on peut déterminer les diamètres apparents des astres avec une très-grande exactitude, parce que la lunette, suivant la marche de l'astre, permet de multiplier les observations. Pour les diamètres horizontaux, le procédé est le même qu'avec la lunette méridienne. Mais, d'après ce qu'on a vu, § 10, la différence des passages des deux bords du disque, aux mêmes fils horaires, ne donne pas immédiatement le diamètre apparent de l'astre. Il faut, pour réduire ce diamètre en parties d'un grand cercle de la sphère céleste, multiplier l'intervalle des passages réduit en arc par le sinus de la distance polaire du parallèle où on les a observés. On prend cet élément sur un cercle gradué qui fait partie de l'instrument, et sur lequel la lunette fait mouvoir un vernier. On détermine les diamètres verticaux de la même manière que les différences de déclinaison; mais ils n'ont besoin d'aucune réduction.

20. Lorsqu'on a observé à la mer la distance angulaire du bord éclairé de la lune au bord du soleil qui en est le plus proche, ce qui se fait avec des instruments à réflexion que j'aurai plus loin l'occasion de décrire, il faut, pour avoir l'arc de distance compris entre les centres des disques, connaître, en arc de grand cercle, le demi-diamètre apparent de chacun d'eux, dans la direction suivant laquelle la distance des bords a été mesurée. Or, outre les variations occasionnelles de grandeur que le disque éprouve par les causes indiquées page 11, l'égalité de ses diamètres est quelque peu altérée, selon leur obliquité à l'horizon, parce que le centre du disque et le point de son contour où ils se terminent, ayant d'inégales hauteurs, la réfraction atmosphérique les élève inégalement dans leurs verticaux propres, qui convergent au zénith. Cela rend les diamètres apparents obliques toujours moindres que le diamètre vrai, dans des proportions dépendantes de leur obliquité actuelle, et ôte aux disques leur circularité. Pour envisager ce problème d'une manière générale, soient, *fig.* 5, O le centre d'observation et de la sphère celeste, OZ la verticale, Z le zénith, H′ H″ H le grand cercle de l'horizon, et ZH′, ZH″ deux verticaux dans lesquels se trouvent les lieux vrais de deux points lumineux Σ′, Σ″. Menons l'arc de grand cercle Σ″Σ′ qui mesure leur distance angulaire vraie, et nom-

SECTION III. — *Mensuration par une triangulation continue. Formation des réseaux des triangles sphériques établis consécutivement sur la surface terrestre, dans le sens d'un même méridien. Calcul de la longueur de l'arc méridien qui les traverse.*

101. Dans la section précédente, nous avons constaté que si, en un point donné de la surface terrestre régularisée, c'est-à-dire ramenée à la courbure uniforme des mers, on conçoit une sphère qui lui soit osculatrice, n'importe dans quel sens, il y aura toujours, autour du point de contact, un petit espace, dans lequel cette surface se confondra d'assez près, avec la sphère qui l'oscule, pour que les points qui y seront compris ne diffèrent de ceux qui sont situés sur les mêmes sécantes de la sphère que par des quantités négligeables. Alors, si l'on forme entre trois de ces derniers points un triangle sphérique composé d'arcs de grands cercles de la sphère osculatrice, lequel devra être censé commun aux deux surfaces, nous avons prouvé que les angles dièdres de ce triangle peuvent, sans erreur appréciable, être déterminés par des observations faites autour des normales réelles menées aux stations terrestres qui aboutissent aux mêmes sécantes. Ensuite, ces angles étant supposés connus, nous avons établi les méthodes les plus convenables pour en déduire les rapports de longueur des côtés du triangle ainsi constitué.

Nous allons maintenant considérer un réseau de triangles pareils, formés consécutivement dans le sens d'un même méridien terrestre, et s'appuyant, ou pouvant être censés s'appuyer les uns sur les autres, par des côtés communs, comme le représente la *fig.* 18. C'est ce qu'on appelle *les triangles principaux* d'une opération géodésique. Je leur conserverai cette dénomination. Mais, pour appliquer légitimement une telle construction, avec la continuité d'enchaînement qu'on lui attribue, il faut spécifier, dans ses particularités, ce qu'elle a d'exact et ce qui n'y est qu'approximatif (*).

(*) Pour éviter tout malentendu, je crois devoir prévenir que, dans cette

J'introduis ces expressions dans la première de nos deux équations, et elle devient

$$\sin^2\tfrac{1}{2}D = \sin^2\tfrac{1}{2}(z''-z'+r''-r') + \sin(z''+r'')\sin(z'+r')\sin^2\tfrac{1}{2}a;$$

alors j'élimine $\sin^2\frac{1}{2}a$ entre elle et l'autre, puis je dégage $\sin^2\frac{1}{2}D'$. J'obtiens ainsi

$$(1)\quad \begin{cases} \sin^2\tfrac{1}{2}D' = \sin^2\tfrac{1}{2}(z''-z') \\ \qquad +[\sin^2\tfrac{1}{2}D - \sin^2\tfrac{1}{2}(z''-z'+r''-r')]\dfrac{\sin z''\sin z'}{\sin(z''+r'')\sin(z'+r')}. \end{cases}$$

22. Le rapport de sinus qui multiplie le dernier terme du second membre est susceptible d'une transformation qui est très-propre à montrer le mode de variation de ses valeurs. Pour l'opérer, je prends un quelconque de ses deux facteurs sous la forme générale $\frac{\sin z}{\sin(z+r)}$. Afin de faciliter la division, je change le z du numérateur en $(z+r)-r$; et, le considérant comme formé de la différence de ces deux arcs, je développe l'expression de son sinus, où je remplace $\cos r$ par sa valeur équivalente $1-2\sin^2\frac{1}{2}r$. J'obtiens ainsi

$$\frac{\sin z}{\sin(z+r)} = 1 - \frac{\sin r\cos(z+r)}{\sin(z+r)} - 2\sin^2\tfrac{1}{2}r;$$

alors je change le facteur $\sin r$ du second terme en $2\sin\frac{1}{2}r\cos\frac{1}{2}r$, ce qui lui donne un facteur commun avec le suivant. Cela permet de l'y réunir, et, en le faisant, on a pour résultat

$$\frac{\sin z}{\sin(z+r)} = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}r\,\frac{\cos(z+\frac{1}{2}r)}{\sin(z+r)}.$$

On voit par là qu'un rapport pareil ne diffère de l'unité que par un terme de l'ordre de la réfraction r qui se trouve actuellement affecter la distance apparente z. Or, ce terme change non-seulement de valeur, mais même de signe, à d'inégales distances de l'horizon.

En effet, considérons-le d'abord à l'horizon même, où z sera 90°; alors $\cos(z+\frac{1}{2}r)$ deviendra $-\sin\frac{1}{2}r$, et $\sin(z+r)$ deviendra $\cos r$. Le second membre aura donc pour valeur

$$1 + \frac{2\sin^2\frac{1}{2}r}{\cos r}.$$

Cela équivaut à $\frac{1}{\cos r}$, comme on aurait pu le voir directement sur l'expression non développée du rapport $\frac{\sin z}{\sin(z+r)}$. Dans ce cas donc, le terme associé à l'unité se trouve positif.

Pour apprécier sa valeur numérique dans cette circonstance, supposons que, dans la couche d'air où est placé l'observateur, la température soit celle de 10 degrés centésimaux, et la pression $0^m,760$; alors la Table de réfraction

insérée dans le tome I, page 221, donnera, pour 90° de distance zénithale, r égal à 33′46″,3. De là on tire

$$\log\left(\frac{2\sin^2\frac{1}{2}r}{\cos r}\right) = 5,6844018,$$

conséquemment

$$\frac{2\sin^2\frac{1}{2}r}{\cos r} = 0,0000483506;$$

telle est donc alors la valeur du terme qui s'ajoute numériquement à l'unité dans l'expression de $\frac{\sin z}{\sin z + r}$.

A partir de cette limite, z et r diminuant à la fois, ce terme commence par s'affaiblir, en conservant, dans son expression algébrique, le signe négatif, ce qui continue de le rendre numériquement additif à l'unité; mais il devient nul lorsqu'on a

$$\cos\left(z + \tfrac{1}{2}r\right) = 0,$$

ce qui donne pour condition

$$z = 90^\circ - \tfrac{1}{2}r.$$

Si l'on consulte la Table numérique des réfractions insérée dans la tome I, pages 220 et 221, Table qui est calculée, d'après la théorie de Laplace, pour le cas où le thermomètre marque 10° et le baromètre 0^m,760 dans la couche d'air où l'observateur est placé, on trouve que la condition dont il s'agit a lieu lorsque la distance zénithale apparente z est 89°44′31″,586. En effet, pour cette distance, la Table donne, par proportionnalité,

$$r = 0^\circ 30' 56'',828;$$

de là on tire

$$\tfrac{1}{2}r = 0^\circ 15' 28'',414,$$

et par suite

$$90^\circ - \tfrac{1}{2}r = 89^\circ 44' 31'',586.$$

[redacted]

α est un très-petit angle qui varie proportionnellement à la densité de l'air dans la couche atmosphérique où l'observateur est placé; m et n sont des nombres positifs sensiblement constants, ou qui n'éprouvent que des variations négligeables dans un même lieu. Pour le cas où la température, dans la couche d'observation, est celle de la glace fondante et la pression $0^m,76$ de mercure à 0°, on a

$$\alpha = 60'',666, \qquad m = 0,99918\,761, \qquad n = 0,00110\,5823.$$

Le coefficient n étant fort petit relativement à m, l'influence du terme affecté de $\tang^2 z$ est toujours beaucoup moindre que celle du terme en $\tang z$, dans les limites de distances zénithales auxquelles la formule est adaptée; et, quand z devient moindre que 45°, ce qui rend $\tang z$ une fraction de l'unité, l'effet de ce terme est bientôt presque négligeable. Dans tous les cas, il tend à affaiblir, par l'opposition de son signe, l'effet du terme $m \tang z$; c'est pourquoi, voulant assigner la limite de grandeur que prend le produit algébrique

$$\frac{2\sin^2 \frac{1}{2} r \cos(z + \frac{1}{2} r)}{\sin(z + r)},$$

j'y remplacerai r, dans le facteur $\sin \frac{1}{2} r$, par la valeur qui résulterait du seul premier terme de son expression complète; car cette valeur, étant toujours plus forte que la véritable, nous donnera une limite d'évaluation plutôt trop forte que trop faible, si ce n'est au zénith même, où le terme en $\tang^2 z$, que nous aurons omis, devient rigoureusement nul avec la distance zénithale z.

L'expression théorique de r, ainsi réduite à son premier terme, peut, sans erreur appréciable, être mise sous la forme suivante

$$\sin \tfrac{1}{2} r = \tfrac{1}{2} m \sin \alpha \tang z;$$

cela revient à considérer les petits arcs α, r comme sensiblement proportionnels à leurs sinus. J'ai déjà rapporté la valeur de α; quant à celle de r, on peut voir que, même à 80° de distance du zénith, notre Table de réfraction, construite pour la température de 10°, la donne seulement de $5'19'',8$, qu'il faut élever à $5'32'',4$ pour la ramener aussi à la température de la glace fondante, d'après le mode suivant lequel cette Table a été calculée (*). Or, si l'on déduit le sinus de pareils arcs de celui de l'un d'eux, par proportionnalité, on ne lui trouve pas avec le sinus exact une différence qui réponde à une fraction de seconde appréciable. Usant donc de cette trans-

(*) Les facteurs nécessaires pour transporter ainsi les réfractions de la température de 10° et de la pression $0^m,760$ à toute autre circonstance météorologique quelconque, sont donnés sous forme logarithmique dans le recueil des Tables publiées par le Bureau des Longitudes, et on les reproduit en nombres dans la *Connaissance des Temps* de chaque année. Ici le facteur de conversion est 1,0295 pour transporter les réfractions de la Table de 0° à 10°, la pression restant toujours $0^m,760$, mais la température du mercure dans le baromètre étant aussi supposée descendre de 10° à 0°, comme dans notre valeur de α.

précédentes. Dans une telle configuration, si l'on trace sur notre *fig.* 18, la courbe PSM_n, pour désigner l'arc méridien mené par le premier sommet S, à travers le réseau des triangles, ce sera un arc de l'ellipse génératrice. Toutes les normales, menées au sphéroïde, en divers points de cet arc, seront comprises dans un même plan contenant l'axe polaire; et toutes les sphères, qui seront transversalement osculatrices au méridien considéré, auront leurs centres répartis, sur cet axe, à une très-petite distance autour du centre du sphéroïde, avec leurs rayons R extrêmement peu différents entre eux, comme on en peut juger par leurs valeurs extrêmes que j'ai présentées par avance page 109. Employons ce système de sphères pour y placer les divers triangles discontigus, dont se compose notre réseau, et considérons-y spécialement les deux premiers désignés par les n°s 1 et 2. Pour faire bien sentir ce qu'ils ont de différent et de commun, je les reproduis séparément *fig.* 19, avec des conditions de discontiguïté monstrueusement exagérées. Dans le n° 1, je suppose que la sphère locale sera osculatrice en S, et aura pour rayon R. Ainsi ce sommet sera un point de la surface terrestre régularisée. Σ_1, Σ_2 désignent les deux autres points, distincts, mais toujours très-peu distants de cette surface, où l'on a observé les angles autour des normales réelles. La sphère s'en écarte, et les sécantes menées de son centre à ces points vont percer sa superficie en S_1, S_2, en formant, avec ces normales, des angles extrêmement petits. D'après cela, on transporte aux points S_1, S_2 de la sphère les angles dièdres observés en Σ_1, Σ_2, et on les applique au triangle sphérique SS_1S_2 ainsi construit. Passant au triangle n° 2, l'osculation s'y fera, en un point quelconque de sa superficie, par une autre sphère du rayon R′, quelque peu différente de la première, tant pour la position de son centre sur l'axe polaire que pour la longueur de son rayon. Les sécantes menées de ce centre aux mêmes points précédents Σ_1, Σ_2 déterminent, sur la deuxième sphère, les points S'_1, S'_2 qui, joints entre eux et à S_3 par des arcs de grands cercles tracés sur sa superficie propre, y forment le triangle sphérique n° 2, dont le côté $S'_1S'_2$ est nécessairement discontigu avec S_1S_2. Cette discontiguïté n'est même pas détruite par la supposition commune aux deux triangles, que leurs sommets propres

s'écartent à peine des points Σ_1, Σ_2, puisque leurs côtés ne laissent pas, pour cela, d'appartenir à des sphères distinctes. Mais, sans qu'elle cessât d'exister mathématiquement, on pourrait se dispenser d'en tenir compte, si les étendues des deux triangles étaient tellement restreintes, que la petitesse de l'intervalle compris sur l'axe polaire entre les centres des sphères qui leur sont respectivement osculatrices, et l'égalité presque exacte des rayons de ces sphères qui en serait la conséquence, rendissent le défaut de coïncidence des deux côtés S_1S_2, $S'_1S'_2$, insensible aux observations; en sorte que l'on pût, sans erreur appréciable, considérer la distance qui les sépare comme nulle, et attribuer des valeurs communes aux angles, ainsi qu'aux arcs, appartenant à leurs sommets distincts. Alors le résultat apparent de ces circonstances serait le même que si les deux points S_1 et S'_1, S_2 et S'_2, auxquels ces sommets distincts correspondent, pouvaient être censés compris sur une même sphère osculatrice. Or, puisqu'un même réseau de triangles peut déjà, presque sans erreur, être calculé, comme s'il était appliqué tout entier sur une sphère osculatrice unique, à plus forte raison peut-on, sans crainte, négliger la différence première des rayons, et des positions des centres de ces sphères, pour deux triangles consécutifs très-petits, sauf à reporter idéalement le côté de jonction de ces triangles, d'abord sur la sphère qui précède, puis sur la sphère qui suit immédiatement, sans étendre l'assimilation plus loin. Cette tolérance étant admise, un même réseau, quoique composé de triangles physiquement discontigus, pourra être calculé par les mêmes déductions que le réseau

Depuis cette limite jusqu'au zénith, on aura donc

$$D' = D - mD \sin \alpha ;$$

or, d'après les valeurs de m et de α données plus haut, on trouve

$$\log (m \sin \alpha) = \bar{4},46816_73, \qquad m \sin \alpha = 0,00029\,3878.$$

Si l'on prend le demi-diamètre D égal à 15 minutes ou 900 secondes, il en résultera, par multiplication, dans les circonstances de pression et de température assignées,

$$D' = 15' - 0'',264.$$

27. Ces variations du facteur f sont, en apparence, très-singulières, et l'on ne conçoit pas, au premier coup d'œil, comment, à l'horizon par exemple, le demi-diamètre horizontal peut être augmenté par la réfraction. Il est cependant facile de s'en rendre compte : en effet, quand le centre du disque paraît à l'horizon, le disque vrai est réellement abaissé au-dessous de ce plan d'une quantité angulaire égale à la réfraction horizontale calculée pour la distance apparente 90°. Cet abaissement, qui le rapproche du zénith inférieur, écarte les verticaux qui le contiennent plus que s'il se trouvait à l'horizon vrai ; alors son diamètre réfracté occupe l'intervalle de ces verticaux à l'horizon même où leur écart en arc est le plus considérable. De là l'augmentation relative du diamètre horizontal apparent ainsi observé.

Le cas d'anéantissement du facteur f'' s'explique par des considérations analogues. Lorsque l'astre est vu à la distance apparente z'' égal à $90° - \frac{1}{2} r''$, le disque vrai est abaissé sous l'horizon autant que le disque apparent est élevé au-dessus ; ils se trouvent donc à des distances égales de leurs zéniths propres. Ainsi leurs diamètres mesurés parallèlement à l'horizon doivent être égaux, puisque tous deux doivent être compris à égales hauteurs, entre les mêmes cercles verticaux prolongés.

28. Il ne me reste plus qu'à introduire, dans notre formule restreinte aux petits angles, l'obliquité du demi-diamètre que l'on veut spécialement évaluer. Pour cela, considérons, dans la *fig.* 6, le disque réfracté comme un petit espace terminé par une courbe ovoïde de forme quelconque, dont l'éten-

angles dièdres que pour la continuité de leur connexion. L'accord que l'on trouvera ainsi par déduction, entre les deux bases extrêmes, comme entre celles-ci et d'autres rapportées à des côtés intermédiaires de la chaîne, prouvera donc que ces conditions ont été suffisamment remplies. Or c'est ce qui est arrivé dans toutes les grandes opérations géodésiques effectuées depuis un demi-siècle, en diverses régions de la terre, avec les soins que la perfection des instruments et des méthodes d'observations a permis d'y apporter.

107. Mais on a encore une autre vérification de ce fait qui peut s'appliquer en particulier à chaque triangle. Je prends pour exemple le premier SS_1S_2 de la *fig.* 18, et je suppose que la longueur de son côté SS_2 a été conclue de la triangulation qui le rattache à la base BB_1. On a obtenu, par observation, les trois angles sphériques en S, S_1, S_2 : ils ont été conclus, sans réductions, des mesures angulaires faites autour des normales réelles, menées aux trois points de la surface terrestre, situés sur le prolongement des sécantes menées du centre de la sphère osculatrice locale, jusqu'à ces mêmes points. Je nomme ces angles A, A_1, A_2, en leur donnant l'indice du sommet auquel chacun d'eux appartient. Maintenant je prends pour uniques données les angles A, A_2, et la longueur connue du côté SS_2, qui sera C_1. Si l'on considère le triangle SS_1S_2 comme rectiligne, on pourra avec ces éléments calculer sa surface s' ; et, en la divisant par le carré du rayon R propre à la sphère osculatrice locale, ou même à toute autre quelconque de ces sphères, telle que celle que nous avons conclue par mensuration directe de l'arc de Pensylvanie, on obtiendra le nombre de

C'est par cette formule réduite que Delambre a calculé la Table des demi-diamètres obliques de la lune et du soleil qu'il a insérée à la fin des Tables de la lune de Bürg, publiées par le Bureau des Longitudes. Seulement il n'y a pas compris le facteur $m \sin \alpha \cos^2 i$, ayant pris, au lieu de D, le demi-diamètre apparent horizontal déjà accourci par le facteur $1 - m \sin \alpha$. En outre, il a calculé sa Table pour la température de 10°, ce qui réduit $m \sin \alpha$ à 0,00027678 1, et revient à faire $m\alpha$ égal à 57",12.

30. Sous la forme réduite (4), et même sous la forme plus générale (2) qui s'applique à toutes les distances zénithales, on peut reconnaître que la figure apparente du disque représentée *fig.* 6 est une ellipse dont le grand axe est horizontal. En effet, prenons un moment cette figure comme type d'une ellipse dont le grand axe soit $2a$, le petit $2b$, et rapportons les points de son contour à un système de coordonnées rectangulaires x, y, respectivement parallèles à ces axes. Son équation sera

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Représentons par e le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, ce qui donnera

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2};$$

en chassant b^2 par cette expression, l'équation deviendra

$$y^2 + (1 - e^2) x^2 = a^2 (1 - e^2).$$

Prenons maintenant pour nouvelles coordonnées le rayon vecteur D' mené du centre, et l'angle i qu'il forme avec l'axe $2a$; cela donnera

$$y = D' \sin i, \qquad x = D' \cos i;$$

et, en chassant x, y par ces valeurs, l'équation entre D' et i prendra cette forme

$$D'^2 (1 - e^2 \cos^2 i) = a^2 (1 - e^2),$$

que l'on peut encore changer en

valeur $180^\circ + \varepsilon'' - i - A_2$. Alors, avec le côté SS_2, qui est connu, le théorème de Legendre donnera les deux autres côtés de ce triangle partiel. L'un, Sm_1, sera la portion du méridien de S qui est interceptée dans le premier triangle principal SS_1S_2. L'autre, S_2m_1, sera un des segments dans lesquels il subdivise le côté S_1S_2 opposé à S; et l'on en conclura la longueur du segment complémentaire m_1S_1, puisque S_1S_2 est connu. On aura aussi l'angle Sm_1S_1 supplément de Sm_1S_2, et sa valeur sera $i + A_2 - \varepsilon''$.

110. Passons de là au deuxième triangle principal $S_1S_2S_3$. Pour avoir la portion du méridien de S qui s'y trouve pareillement interceptée, je considère d'abord ce méridien comme plan. Cette supposition serait rigoureuse si la terre avait une forme exactement sphérique; elle l'est encore si sa surface est de révolution autour de l'axe polaire de la sphère céleste, ce qui se trouve être la condition définitive de la forme à laquelle on peut l'assimiler. Mais, sans admettre par anticipation ce dernier résultat, il suffit qu'elle soit incontestablement très-peu différente d'une sphère exacte, pour que, dans la petite étendue de longueur méridienne qu'un même réseau trigonométrique embrasse, ses méridiens puissent être supposés plans, avec une approximation dont l'erreur possible se décelera par les erreurs mêmes que les conséquences de cette hypothèse pourraient présenter ultérieurement, lorsqu'on les comparera avec les réalités aux deux extrémités d'une très-longue chaîne, dont les portions consécutives auront été ainsi évaluées. Admettant donc que la seconde portion d'arc méridien m_1m_2, interceptée ici dans notre second triangle, doit être l'intersection de celui-ci par le pro-

couper le côté $S_1 S_2$ du triangle n° 1 de la *fig.* 18. De ce point je mène une nouvelle normale $m_1 c_1$, qui perce l'ellipsoïde au point μ_1, distinct du premier, mais qui en est assez peu distant pour que l'on puisse considérer comme nul l'intervalle qui les sépare. $c_1 \mu_1$ sera le rayon de la seconde sphère, transversalement osculatrice au méridien en μ_1; et l'arc $\mu_1 m_2$, compris de même dans le plan de la figure, représentera l'élément de l'arc méridien prolongé sur sa surface, élement dont nous voulons déterminer la direction dans le deuxième triangle de la *fig.* 18. Pour cela, par les points m_1, μ_1, considérés comme coïncidents, menez deux droites indéfinies, $m_1 t_1$, $\mu_1 \theta_1$, l'une tangente au premier arc, l'autre au second. Le plan qui contiendra ces deux tangentes tracera sur la seconde sphère la direction de l'arc méridien $\mu_1 m_2$, et y déterminera l'angle azimutal $\theta_1 \mu_1 S_2$, ou $m_2 m_1 S_2$, qu'il doit former dans la *fig.* 18 avec le segment $m_1 S_2$, supposé commun aux deux sphères. Or, les angles formés ainsi par les deux tangentes avec ce segment commun ne différeront entre eux que par une réduction à l'horizon, qui, en restreignant suffisamment les triangles, pourra être rendue négligeable, comme étant proportionnelle au carré du sinus de l'angle cm_1c_1, compris, dans la *fig.* 20, entre les droites menées de m_1 ou de μ_1 aux centres des deux sphères. Ainsi on aura le droit de la supposer telle, en prenant les précautions nécessaires pour que cette condition soit remplie, et constatant son accomplissement par des vérifications ultérieures. Ceci admis, reprenons la *fig.* 18. La première tangente, menée extérieurement en m_1 à l'arc Sm_1, forme avec le segment $m_1 S_2$ un angle $S_2 m_1 t_1$ égal à son opposé $Sm_1 S_1$, du premier triangle. Donc la seconde tangente menée de ce même point m_1 à l'arc $m_1 m_2$, devra former avec ce même segment un angle sensiblement égal, précisément comme si le premier arc Sm_1 était prolongé directement sur une même sphère. Cette condition d'égalité donnera l'azimut $m_2 m_1 S_2$, ou i', que le segment $S_2 m_1$ du premier triangle principal forme avec la direction du méridien $m_1 m_2$, dans le second triangle, auquel ce même segment peut être censé aussi appartenir, comme nous l'avons prouvé. On sera donc ici exactement dans les mêmes conditions où l'on était pour le premier triangle principal quand on a entrepris de déterminer

la portion d'arc méridien Sm_1 qui s'y trouvait interceptée. En opérant absolument de la même manière pour le cas actuel, on déterminera : 1° la portion d'arc méridien $m_1 m_2$, interceptée dans le triangle n° 2, entre le premier point de rencontre m_1 et le second point de rencontre m_2, que l'on appelle *des nœuds;* 2° on aura par différence les segments $S_1 m_2$, $m_2 S_3$; 3° enfin on obtiendra l'angle sphérique $m_1 m_2 S_2$ et son supplément $m_1 m_2 S_3$. Cela donnera, par égalité, leurs opposés $S_3 m_2 m_3$, $S_2 m_2 m_3$, qui seront les azimuts des deux segments, sur l'horizon de m_2, autour de $m_2 m_3$, prolongement du méridien primitif dans la partie ultérieure du réseau.

111. Maintenant je ne suppose plus que le méridien terrestre qui passe par le sommet S doive être plan; et, sans rien préjuger sur sa forme, j'emploie la construction précédente pour tracer sur le sphéroïde, quel qu'il puisse être, une ligne qui, partant de S, avec la même direction méridienne initiale, se prolonge à travers le réseau des triangles avec la même condition d'égalité azimutale entre les angles tangentiels opposés de chaque nœud. Considérant d'abord les deux premiers éléments Sm_1, $m_1 m_2$, en leur seule qualité de grands cercles tracés sur les deux sphères osculatrices consécutives, ils seront sur chacune de ces sphères les lignes de plus courte distance qui puissent être menées entre les points qui les terminent; et, si l'on suppose leur étendue individuelle suffisamment restreinte, la même propriété aura lieu sur le sphéroïde pour les arcs qui en seront les projections. Maintenant, d'après l'égalité azimutale établie en m_1, si l'on conçoit ces deux segments repliés dans le plan tangent à ce point, ils se trouveront y consti-

mener sur le sphéroïde, entre deux points quelconques pris à volonté sur sa direction.

112. Ayant établi cette conception générale, je reviens au cas réel où cette ligne, bornée à une étendue suffisamment restreinte, se trouve coïncider, sans écart appréciable, avec les méridiens apparents des points qui la composent, ce qui revient à supposer les méridiens terrestres sensiblement plans sur la petite amplitude qu'elle embrasse; et je vais chercher à déterminer trigonométriquement les longueurs de ses éléments successifs, à travers le réseau total des triangles qu'elle doit traverser.

La *fig.* 18 représente le triangle principal n° 3, comme ne coupant plus le méridien prolongé de S. Cela a été fait à dessein, afin d'en prendre occasion de considérer un tel cas. Suivant donc les particularités qu'il présente, je prolonge idéalement l'arc de grand cercle S_1S_2, jusqu'à sa rencontre en m_3 avec la méridienne de m_2 dont nous venons de tracer le prolongement. Alors, considérant le triangle sphérique $S_3m_2m_3$, on y connaîtra, par ce qui précède, le côté m_2S_3 et l'angle $S_3m_2m_3$. On pourra avoir aussi l'angle $m_2S_3m_3$, puisqu'il est le supplément de $S_2S_3S_1$ dans le triangle principal précédent. On en déduira donc, 1° la portion d'arc méridien m_2m_3; 2° le segment S_3m_3; 3° l'angle $S_3m_3m_2$ dont le supplément à 180 degrés sera l'angle $S_3m_3m_4$, formé par ce même segment avec la direction de la méridienne m_2m_3, prolongée sur la sphère osculatrice suivante.

Arrivés ainsi au point m_3, notre *fig.* 18 nous présente un quadrilatère sphérique $m_3S_3S_5m_5$, où nous connaissons deux côtés S_3m_3, S_3S_5, avec les trois angles en m_3, S_3, S_5, que l'on peut déduire des résultats précédents. Alors on traversera ce quadrilatère par un arc de grand cercle auxiliaire S_5m_3, ce qui le partagera en deux triangles sphériques. Le premier $m_3S_3S_5$ pourra d'abord se résoudre, puisqu'on y connaîtra les deux côtés S_3m_3, S_3S_5 avec l'angle compris en S_3. On obtiendra donc ainsi le côté m_3S_5, et les deux angles adjacents intérieurs. Ceux-ci étant retranchés des angles $S_3m_3m_4$, $S_3S_5m_5$, qui sont connus par les calculs précédents, ou peuvent s'en déduire, on aura, dans le second triangle $m_3S_5m_5$, le côté m_3S_5 avec les deux angles adjacents. On pourra donc encore

résoudre ce triangle, et trouver ses deux autres angles ainsi que la portion de l'arc méridien m_3m_5, située sur le prolongement de Sm_3. Par des combinaisons pareilles ou analogues, convenablement appropriées à la disposition du réseau de triangles que l'on considère, on obtiendra finalement toutes les portions de l'arc méridien qui s'étendent depuis la première station S, jusqu'au point m_n où cet arc est coupé par le côté le plus austral du dernier triangle, que je désigne par S_nS_{n-1} dans notre figure, S_n étant la station la plus australe de ce même côté. On pourra utilement, dans le cours de ce calcul, varier les combinaisons géométriques qui sont propres à donner diversement les portions successives de l'arc total, ce qui servira pour vérifier l'exactitude de son évaluation. C'est ce que j'ai indiqué ici, en formant le nœud intermédiaire m_4 par le prolongement circulaire du côté S_6S_5. Mais il faudra éviter celles de ces combinaisons qui donneraient des triangles dont les côtés auraient des longueurs trop exagérées.

115. Quand on est arrivé au dernier sommet S_n, on se place à la station située sur sa normale, et l'on y mesure astronomiquement la distance du pôle au zénith, comme on l'a déjà fait en S. Je la désigne par d'. Du point S_n on conçoit un arc de grand cercle S_nN, mené perpendiculairement au méridien primitif. Cela forme le triangle sphérique S_nm_nN, rectangle en N. On connaît déjà, par les opérations précédentes, le point d'intersection m_n du dernier côté S_nS_{n-1} avec la méridienne prolongée, qui est contenue dans ce même méridien. On a aussi la longueur du segment S_nm_n que je nommerai A, et, en outre, l'angle S_nm_nN qu'il

fractions de degré, de la graduation du cercle. Le quotient sera le degré moyen $D^{(o)}$ résultant de l'arc total ainsi mesuré. Si cet arc est assez grand pour que les variations des degrés terrestres puissent y être sensibles, ou si l'on veut seulement y constater leur caractère, soit de constance, soit de variabilité, on mesurera la distance du pôle au zénith dans plusieurs stations intermédiaires entre les extrêmes; et l'on comparera les valeurs des degrés $D^{(o)}$ qui correspondent aux divers intervalles de leurs parallèles consécutifs. C'est ce qu'on a fait dans la grande opération de France et d'Espagne; et nous rapporterons bientôt les résultats que cette subdivision de l'arc total y fournit.

114. On peut faire, au dernier sommet S_n, une vérification très-importante. La construction que nous avons employée pour prolonger la ligne méridienne du premier sommet S, à travers le réseau des triangles, suppose les méridiens terrestres plans. Mais, d'après la définition générale donnée page 34, ils pourraient ne pas l'être; c'est-à-dire que les points de la surface terrestre dont les méridiens propres sont parallèles à un même méridien céleste, étant considérés consécutivement, au lieu de former sur la surface du sphéroïde une ligne plane, pourraient y être répartis suivant

---

tre. Le premier terme de cette expression a été jusqu'ici le seul qu'on ait employé pour évaluer l'arc M_nN ou *la distance du parallèle à la perpendiculaire*, et il a paru suffire. Mais le second deviendrait peut-être sensible dans des réseaux de triangles où la station S_n serait rapprochée du pôle, ce qui affaiblirait la valeur de d', et par suite de tang d', qui entre ici en dénominateur. Delambre, et après lui la plupart des auteurs qui ont rapporté ou employé cette formule, y ont introduit, au lieu de d', son complément $90^\circ - d'$, qui est la latitude géographique du sommet S_n, et ils l'ont désignée par L'; en outre, ils ont remplacé le rayon R de la sphère osculatrice par la normale N comprise entre le sommet S_n et l'axe polaire réel de la terre, normale qui, dans un sphéroïde de révolution, est, en effet, la longueur du rayon des sphères osculatrices dont le centre est situé sur l'axe passant par les pôles. Alors l'expression M_nN prend cette forme

$$M_nN = \frac{\Delta^2}{2N} \operatorname{tang} L' + \tfrac{1}{4} \operatorname{tang} L' (1 + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang}^2 L') \frac{\Delta^4}{N^3}.$$

C'est ainsi, mais en se bornant au premier terme, qu'on l'a généralement appliquée. Je rapporte cette forme, qu'on lui donne habituellement, pour faire sentir l'identité réelle des deux expressions.

une courbe à double courbure. Dans un pareil cas, le premier élément Sm_1, tracé dans notre *fig.* 18, sur la première sphère osculatrice, y suivrait encore la ligne méridienne locale propre au sommet S, puisque sa direction a été déterminée astronomiquement par cette condition. Mais son prolongement dans le second triangle, tel que nous l'y avons introduit par notre construction fondée sur l'égalité d'opposition azimutale, ne coïnciderait pas avec la ligne méridienne propre de m_2. Ce second élément, prolongé de la même manière, s'écarterait pareillement du méridien propre au nœud suivant m_3; et le tracé étant prolongé jusqu'au dernier nœud m_n, suivant la même loi, il pourrait arriver que le méridien propre de ce point extrême formât avec le segment $S_n m_n$, un angle azimutal assez différent de celui qui est donné par notre construction, pour qu'en déterminant sa valeur locale vraie, par des observations astronomiques, le défaut d'identité devînt appréciable. A la vérité, cette comparaison ne peut pas s'effectuer au point m_n même, puisqu'il n'est pas marqué sur la surface terrestre; mais on peut atteindre le même but par des observations faites à la dernière station Σ_n, à laquelle il est lié trigonométriquement. L'épreuve ainsi transportée nécessite, pour quelques-uns de ses détails, une connaissance déjà assez exacte de la figure générale de la terre. Mais je puis exposer le principe de la méthode, en me bornant à signaler, parmi les éléments d'application qu'elle suppose, ceux qui devront être obtenus ultérieurement.

115. On détermine d'abord avec toute la précision possible la direction vraie du méridien au sommet S_n, *fig.* 18. Cela se peut faire

avec beaucoup de soin l'angle plan a, compris entre elle et le signal S_{n-1} ou Σ_{n-1}. On mesure aussi les distances zénithales des deux branches de cet angle. De là, par les formules de la page 95, on déduit l'angle dièdre i' formé autour de la normale de S_n, entre le méridien propre à ce sommet et le plan central qui contient le dernier côté $S_n S_{n-1}$ de la chaîne. C'est l'*azimut vrai* de ce dernier côté sur l'horizon de S_n. L'opération qui le donne, et que je viens de décrire, est exactement pareille à celle que l'on a dû faire au premier sommet S pour obtenir l'azimut d'un des côtés SS_2 du premier triangle autour du méridien de ce sommet.

Si l'on négligeait l'angle dièdre que le méridien de S_n, *fig.* 18, forme en convergeant vers le pôle, avec celui de S prolongé à travers le réseau des triangles, angle qui est toujours fort petit dans les applications, l'azimut du côté $S_n S_{n-1}$, vu ainsi de S_n, serait évidemment égal à l'angle $S_n m_n N$, ou i, déjà calculé d'après les éléments géodésiques. Mais, à cause de cette convergence, il doit différer quelque peu de i, même en supposant les méridiens plans. Or, on va voir tout à l'heure que, dans cette supposition, sa valeur exacte peut se déduire des éléments du réseau combinés avec l'angle connu i. Comparant donc cette valeur calculée avec celle que donnent les opérations faites dans la verticale S_n, on devra, si les méridiens sont plans, les trouver égales entre elles, dans les étroites limites d'erreur que les éléments de cette comparaison peuvent comporter. Et si leur inégalité sort de ces limites supposables, on en devra conclure que la forme des méridiens terrestres diffère sensiblement d'un plan parfait, même dans l'étendue, toujours très-restreinte, que le réseau des triangles a pu embrasser.

116. Il reste à exposer la déduction trigonométrique. Pour en développer le calcul avec netteté, j'extrais de la *fig.* 18 les éléments dont il dépend, et je les représente à part dans la *fig.* 22, que j'établis tout entière sur la sphère locale, qui est osculatrice en S_n, dans le sens transversal au méridien propre de ce sommet. Sur cette même sphère, je place le segment $S_n m_n$ du dernier côté de notre réseau, qui se termine en m_n à la ligne méridienne du sommet S, prolongée trigonométriquement jusque-là, en supposant les méridiens plans; et j'y trace le dernier élément $m_n M_n$ de cette

ligne, qui rejoint en M_n le parallèle propre de S_n. Enfin, je décris, toujours sur la même sphère, l'intersection du méridien plan de S_n, que j'y conduis jusqu'à son pôle P, situé sur le rayon central parallèle à l'axe polaire céleste, et j'y fais rétrograder l'élément méridien $m_n M_n$ jusqu'à ce même pôle. En considérant la terre comme un sphéroïde régulier, de révolution autour de ce même axe céleste, ce qui est le complément final de l'hypothèse que je veux suivre, le centre de notre sphère sera situé sur l'axe physique du sphéroïde, d'après le sens d'osculation transversal que nous lui avons attribué; et son rayon polaire coïncidera aussi entièrement avec la direction de cet axe. Conséquemment le pôle P s'y trouvera placé; et, par suite, les plans diamétraux qui contiennent les arcs S_nP, m_nP coïncideront avec les plans méridiens du sphéroïde menés par les mêmes points S_n, m_n.

117. Cela posé, le calcul des triangles précédents nous a déjà fait connaître : 1° la longueur du segment $S_n m_n$; je la désigne par A; 2° l'élément d'arc méridien $m_n M_n$ compris entre le point m_n et le parallèle de S_n; je le nomme U; 3° enfin, l'angle azimutal $M_n m_n S_n$, ou i, que cet élément forme en m_n, vers le sud, avec le segment $m_n S_n$. On a mesuré astronomiquement en S_n, ou sur la verticale de S_n, la distance angulaire du pôle au zénith; elle est obtenue en degrés, minutes et secondes. Je la représente par l'arc d', qu'elle soutendrait au centre d'un cercle décrit avec un rayon égal à l'unité de longueur. Cela revient à diviser sa valeur angulaire par R″. L'ayant mise sous cette forme, si on la multiplie par le rayon R de notre sphère osculatrice, exprimé dans la même espèce

nécessaire pour calculer, dans ce même triangle, l'angle intérieur en S_n, que je désigne par i'. Cela permettra donc de choisir les combinaisons qui détermineront sa valeur de la manière la plus favorable; après quoi il restera à examiner jusqu'à quel point elle peut être identifiée avec l'angle azimutal correspondant, observé en S_n, *sur le sphéroïde réel*.

Pour effectuer ce calcul, je rapporte tous nos arcs terrestres à la sphère qui serait décrite du même centre, avec un rayon égal à l'unité de longueur; et désignant par d', α, u, d les arcs de cette sphère, qui sont respectivement homologues à D', A, U, D, j'obtiens évidemment

$$D' = Rd'; \quad A = R\alpha; \quad U = Ru; \quad D = Rd; \quad d = d' - u.$$

Le triangle sphérique homologue à Pm_nS_n, sur la sphère centrale y sera ainsi semblablement déterminé par ses arcs correspondants, associés aux mêmes angles dièdres $180° - i$ et i'. Pour y calculer celui-ci, je pose la condition générale qui, dans tout triangle sphérique, rend les sinus des angles proportionnels aux sinus des côtés opposés, et je pose aussi les équations qui donneraient à volonté les côtés d ou d' en fonction des deux côtés opposés et de l'angle compris entre eux. J'ai ainsi les trois relations suivantes :

$$(1) \qquad \sin i' \sin d' = \sin i \sin d;$$

$$(2) \qquad \cos d' = -\sin d \sin \alpha \cos i + \cos d \cos \alpha;$$

$$(3) \qquad \cos d = +\sin d' \sin \alpha \cos i' + \cos d' \cos \alpha.$$

L'arc α étant toujours fort petit dans nos opérations, $i - i'$ sera toujours un très-petit angle, et c'est, par conséquent, cette différence qu'il faut chercher à évaluer. Pour cela, le premier moyen qui se présente à l'esprit serait de l'introduire directement comme inconnue dans quelqu'une de ces équations, et de la dégager par les séries générales dont nous avons exposé la formation dans la note de la page 87. Mais on arrive ainsi à des séries particulières dont le calcul numérique est fort pénible, et qui même ne sont pas toujours convergentes. Ce fait est facile à constater, et l'on peut voir, dans le tome III de la *Base du système métrique*, que

Delambre ne l'a éludé qu'en limitant l'approximation par des restrictions qui ne sont qu'incomplétement justifiables. Or, on évite tous ces inconvénients, par une combinaison de nos trois équations, qui donne directement $\sin(i-i')$ par une expression finie, rigoureusement exacte, et toujours très-aisée à réduire en nombres. Pour cela, je déduis d'abord des équations (2) et (3) les deux suivantes :

$$\sin d \sin\alpha \cos i = -\cos d' + \cos d - 2\cos d \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha;$$
$$\sin d' \sin\alpha \cos i' = +\cos d - \cos d' + 2\cos d' \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Retranchant la première de la seconde, j'obtiens

$$(\sin d' \cos i' - \sin d \cos i) \sin\alpha = 2(\cos d + \cos d') \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Or, on a identiquement

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha \cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

et

$$\cos d + \cos d' = 2\cos\tfrac{1}{2}(d' + d)\cos\tfrac{1}{2}(d' - d).$$

En vertu de la première, $2\sin\frac{1}{2}\alpha$ disparaît une fois des deux membres, comme facteur commun ; et, en divisant le résidu par $\cos\frac{1}{2}\alpha \sin d'$, on a

$$\cos i' - \frac{\sin d}{\sin d'}\cos i = \frac{2\cos\frac{1}{2}(d'+d)\cos\frac{1}{2}(d'-d)}{\sin d'}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Or, en vertu de l'équation (1), le rapport $\frac{\sin d}{\sin d'}$ est égal à $\frac{\sin i'}{\sin i}$;

un usage légitime de cette valeur, il faut préalablement examiner le degré de précision que pourront présenter les éléments numériques d'où l'on déduit la différence μ.

118. μ est un angle que notre formule donnera en parties de la graduation du cercle. C'est la forme sous laquelle l'angle i', qui en résulte, devra être comparé aux observations azimutales faites en S_n. Mais pour l'obtenir ainsi exprimé, il faudra d'abord avoir l'arc α exprimé de la même manière. La valeur de celui-ci, déduite de l'arc A, est $\frac{A}{R}R''$. Cette conversion exigera donc déjà que l'on connaisse le rayon R de la sphère qui est localement osculatrice au sphéroïde en S_n, dans le sens transversal au méridien, et qu'on le connaisse avec assez de précision pour que la réduction de A en secondes de degré ne puisse comporter que des erreurs négligeables, ou au moins du même ordre que celles qu'on est forcé de tolérer dans les mesures pratiques les plus précises. On ne saurait évidemment obtenir cette certitude qu'après une discussion générale de la figure de la terre. Ainsi, par nécessité, l'application de la formule à la vérification délicate que nous nous sommes proposée, devra être reculée jusque-là. On voit en outre qu'on accroîtra la probabilité de son exactitude, si l'on dispose les derniers triangles du réseau de manière que le segment $S_n m_n$, *fig.* 18, approche d'être perpendiculaire au dernier élément $m_n M_n$ du méridien primitif. Car alors il s'en faudra de peu qu'il ne le soit aussi au méridien $S_n P$ de la station S_n. Et cette circonstance l'assimilera de plus près à la surface terrestre, en l'écartant moins du sens d'osculation transversal que nous avons adopté.

La connaissance du rayon R sera nécessaire encore pour convertir en secondes de degré l'élément de l'arc méridien $m_n M_n$, ou U, qui, ainsi exprimé, donnera u égal à $\frac{U}{R}R''$; d'où l'on déduira, sous la même forme, l'angle d, égal à $d'-u$. Ici le sens d'osculation transversal attribué à la sphère locale semble avoir un inconvénient grave, puisque l'élément $m_n M_n$ appartiendrait de plus près à la surface réelle, s'il était appliqué sur une sphère osculatrice suivant le méridien même. Mais cet inconvénient sera considérablement affaibli par la précaution ci-dessus recommandée, de rendre le seg-

ment $S_n m_n$ presque perpendiculaire à cette dernière direction. Car alors, U ou $m_n M_n$ devenant fort petit, l'impropriété du sens d'osculation de la sphère sur laquelle on l'applique produira évidemment un effet absolu moindre, dans la valeur totale de d que u complète. Et comme les deux rayons d'osculation extrêmes, situés sur une même normale, ont toujours des longueurs très-peu différentes dans l'ellipsoïde terrestre, comme nous le constaterons plus tard, leur inégalité pourra n'avoir qu'une influence insensible sur l'évaluation angulaire du petit élément $m_n M_n$ ainsi atténué.

119. Les précautions précédentes étant admises, la différence $i - i'$ sera réductible en nombres, puisque les autres éléments angulaires i, d', sont donnés immédiatement par l'observation, en parties de la graduation du cercle; et la valeur de i' qu'on en déduira, présentera toutes les chances présumables d'exactitude. Mais, pour la pouvoir comparer au relèvement azimutal du segment $S_n m_n$, il faut examiner si ces deux angles i', l'un observé, l'autre déduit des triangles sphériques, devront ici présenter des valeurs mathématiquement égales, ou ne différant de l'égalité que par des quantités insensibles dans l'hypothèse des méridiens plans que nous considérons. Or, d'abord, la branche qui les limite dans le sens du méridien sera commune, puisque la sphère, qui est osculatrice transversalement à ce plan en S_n, est tangente au sphéroïde dans tous les autres sens; de sorte que la droite qui touche la section du méridien vrai en ce point, y touche aussi le cercle méridien de la sphère. L'autre côté de l'angle *ob-*

du point d'osculation. Mais il est facile de prévoir que les différences de longueur ainsi que de direction, produites par cette circonstance sur un sphéroïde presque sphérique, y deviendront insensibles, si l'arc considéré est suffisamment restreint. Il y aurait plus d'incertitude à craindre dans la longueur attribuée, sur cet arc, au segment $S_n m_n$, et dans l'évaluation de l'angle azimutal i, qui entrent tous deux dans le calcul de l'angle i'; car ces deux éléments sont affectés par les erreurs de toutes les osculations antérieures qui y conduisent. Mais l'effet de cette transmission devra encore être très-faible lorsque, comme dans nos opérations, le sphéroïde sera si peu différent d'une sphère, et le réseau des triangles comparativement si restreint, que l'on puisse déjà, presque sans erreur, le calculer tout entier comme appliqué sur une sphère osculatrice commune, auquel cas toutes les coïncidences supposées deviendraient rigoureuses. Ces conditions étant admises, les valeurs calculées et observées de l'angle azimutal i' devront se trouver égales entre elles, ou à peine différentes dans les limites d'erreurs que les observations même comportent, si les méridiens terrestres sont des lignes exactement planes, ou si leur double courbure est inappréciable dans la portion de leur longueur que le réseau des triangles a embrassée; et l'expression rigoureuse que nous avons donnée de $\sin(i - i')$ servira pour décider cette alternative.

120. Dans les applications l'arc α ou $\frac{A}{R} R''$ n'atteindra jamais 2° de la graduation sexagésimale du cercle. En conséquence, comme la comparaison à laquelle on veut ici l'employer doit être très-précise, au lieu de le mettre sous cette dernière forme, pour prendre le logarithme de tang $\frac{1}{2}\alpha$ dans les Tables usuelles, il vaudra mieux calculer directement ce logarithme par les séries de la page 61, qui, étant restreintes à leurs deux premiers termes, donneront ici

$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = \log\left(\frac{1}{2}\frac{A}{R}\right) + \frac{k}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{A}{R}\right)^2,$$

k étant le module direct des Tables logarithmiques ordinaires pour lequel on a

$$\log k = 1,6377843113$$

Alors, quand on aura obtenu, par la formule, le logarithme de $\sin(i-i')$, comme l'arc $i-i'$ est aussi toujours très-petit, on le conclura immédiatement en secondes de degré, par les mêmes séries, qui donneront, comme dans la page 64,

$$\log(i-i')'' = \log R'' + \log\sin(i-i') + \frac{k}{6}\sin^2(i-i'),$$

où l'on a $\log R'' = 5,3144251.$

On voit que le rayon R de la sphère osculatrice entre, par nécessité, dans la première de ces expressions, et que son influence subsiste tout entière dans l'expression angulaire de $(i-i')$. Mais on constatera plus loin que, dans l'état actuel de la géodésie, ce rayon local R peut toujours être évalué avec une approximation suffisante pour le calcul de $i-i'$.

121. Pour n'avoir plus à revenir sur cette formule, je ferai remarquer que l'expression de $\sin(i-i')$ ne contient les arcs $\frac{1}{2}(d'+d)$, $\frac{1}{2}(d'-d)$ que sous des signes de cosinus. Elle donne donc toujours $i-i'$ positif, soit que le sommet S_n, extérieur au méridien primitif, auquel appartient l'azimut i', se trouve plus éloigné du pôle que le point m_n auquel appartient l'azimut i, comme le représente la *fig.* 22, qui nous a servi de type, soit qu'il s'en trouve le plus rapproché, comme le représente la *fig.* 23. Cela tient à ce que, dans les deux cas, l'angle extérieur i, compte à partir du prolongement du méridien primitif, est toujours plus grand que son opposé intérieur i', à cause de l'angle également intérieur p qui ferme le triangle polaire auquel appartiennent ces

vateur, présentaient des différences s'élevant jusqu'à 40 et 50 secondes de degré; de sorte qu'une répétition excessive de résultats individuellement si imparfaits pouvait à peine faire espérer qu'ils se rectifiassent suffisamment par des compensations mutuelles. Néanmoins, les incertitudes finales que l'on peut supposer dans les déterminations ainsi obtenues ne semblent pas assez fortes pour expliquer les écarts d'un ordre, parfois presque égal, et dépourvu de toute loi, que l'on découvre sur plusieurs points de ce grand arc entre les azimuts i' calculés et déduits. C'est ce qu'a fait remarquer Delambre, en rapportant les éléments de cette comparaison dans son ouvrage intitulé : *Base du système métrique décimal*, tome III, page 85. Il est difficile de ne pas croire, avec lui, que des discordances, à la fois si fortes et si capricieuses, ne résultent pas, au moins en partie, d'irrégularités locales réellement existantes dans la configuration du sphéroïde terrestre. Cette conséquence a été confirmée par les écarts du même ordre que d'autres observateurs ont constatés dans des opérations géodésiques faites avec toutes les précautions imaginables, où les azimuts ont été observés avec des instruments de passage soigneusement réglés; et l'on verra plus loin que les longueurs des degrés du méridien présentent aussi des anomalies pareilles dont la réalité ne saurait être mise en doute.

123. La formule [2], que nous venons d'établir page 148, peut servir généralement pour calculer, par déduction, les azimuts de tous les côtés d'un réseau de triangles, autour du méridien de la station qui constitue chaque sommet. Et, en la combinant avec celles que nous avons formées dans la page 108, pour la résolution directe des triangles sphériques par approximation, on peut en conclure immédiatement toutes les portions successives de l'arc méridien qui traverse un même réseau de triangles, sans avoir besoin de décomposer ce reseau en triangles partiels, comme nous l'avons jusqu'ici supposé. Avant d'exposer cette importante application, je simplifierai l'énoncé de toutes les questions analogues que nous aurons à résoudre, par un changement de dénomination que je n'ai pas cru devoir y introduire plus tôt. En considérant les sommets S, S_1, S_2, .., S_n de nos triangles sphériques établis sur le sphéroïde terrestre

régularisé, je les ai toujours soigneusement distingues des stations Σ, Σ_1, Σ_2,..., Σ_n situées sur le prolongement des mêmes normales ou des mêmes sécantes sphériques, dans lesquelles l'observateur a dû effectivement établir ses instruments pour mesurer les angles dièdres, et les distances du pôle au zénith, que l'on transporte à ces sommets. Mais maintenant que cette distinction doit être suffisamment comprise, je me bornerai à la sous-entendre, comme on a coutume de le faire dans tous les ouvrages qui traitent des opérations géodésiques; et, conformément à l'usage, je donnerai indifféremment aux sommets S, S', S'',..., $S^{(n)}$, le nom de *stations*, comme si les éléments d'observation qu'on y transporte y avaient été effectivement obtenus. De sorte que les points ainsi désignés devront toujours être censés situés sur la surface régularisée qui coïncide avec le prolongement continu des mers.

124. Cette convention étant admise, je considère dans la *fig.* 24 deux stations pareilles S, S', jointes par l'arc de grand cercle SS', appartenant à une sphère du rayon R, qui est osculatrice en S, dans le sens transversal au méridien de ce point, lequel est représenté par l'arc PSM' de cette même sphère. Le centre de celle-ci est placé sur l'axe même du sphéroïde, que l'on suppose presque sphérique et de révolution autour de la droite passant par les pôles célestes, comme précédemment. Alors le plan diamétral qui contient l'arc PSM' coïncide avec le plan méridien réel mené dans le sphéroïde par le même point S. On est supposé connaître la distance angulaire d du pôle au zénith en S, soit qu'elle ait été obtenue par l'ob-

je dis que, d'après la condition de petitesse attribuée à l'arc A, l'observation immédiate de d' n'est pas nécessaire pour obtenir l'angle i'. Car, en restant dans les limites d'approximation permises par cette circonstance, nous pouvons, avec les seules données d, A, i, calculer l'angle i', ainsi que la portion SM′ d'arc méridien comprise sur notre sphère, entre le point S et l'arc de parallèle S′M′, mené par la station S′.

124. A cet effet, il nous suffira de reproduire un calcul que nous avons déjà fait précédemment, avec la seule précaution d'en rassembler les résultats sous une forme plus explicite. Par la station S′ je mène d'abord un arc de grand cercle S′N perpendiculaire au méridien primitif. Je forme ainsi un triangle sphérique SS′N, rectangle en N, dans lequel on connaît l'hypoténuse SS′ ou A et l'angle i. On peut donc en conclure, 1° le côté SN, projection de A sur la méridienne primitive; je le nomme A′; 2° l'arc perpendiculaire S′N; je le nomme Δ. Nous avons déjà fait un calcul pareil, page 71, à propos de l'opération de Pensylvanie; et je l'ai reproduit, sous une forme générale, dans la note de la page 141. Transportons donc nos calculs trigonométriques sur la sphère centrale, dont le rayon est 1, comme nous l'avons fait alors. Nous y construirons un système d'arcs, semblable à celui que la *fig.* 24 nous représente sur la sphère transversalement osculatrice, à la surface terrestre, dans la région S′SM′; et, les y désignant par des lettres analogues, conformément à la notation dont nous avons toujours fait usage, leur proportionnalité avec ceux qui y correspondent sur la sphère réelle dont le rayon est R donnera respectivement

$$D = Rd, \quad D' = Rd'; \quad A = R\alpha; \quad A' = R\alpha'; \quad \Delta = R\delta.$$

Alors dans le triangle central, homologue à S′SN, on aura rigoureusement, comme dans la page 73,

$$\tang \alpha' = \tang \alpha \cos i; \qquad \sin \delta = \sin \alpha \sin i.$$

Ce sont les mêmes équations que nous avons déjà employées dans cette première application. En les développant en séries, fondées sur la petitesse de l'arc α, nous en tirerons, comme nous

miné la position de la pyramide de Montmartre, sur la direction de la ligne méridienne tracée dans la grande salle du même édifice. Cette ligne étant prolongée, vers le nord, de 6000 mètres, passerait dans l'axe de la pyramide. Concevez deux points encore plus distants, marqués, de même, dans une direction horizontale, P′, P″, l'un au nord, l'autre au sud de la lunette de l'instrument des passages, ils détermineraient, sur une étendue encore plus grande, la direction de l'arc méridien supposé plan. On pourrait aisément, si on le jugeait nécessaire, subdiviser l'intervalle des points P′, P″, sans sortir du même méridien terrestre. Car, puisque nous le supposons contenu dans un même plan, on n'aura qu'à établir, dans quelque point intermédiaire, un cercle portatif à limbe vertical, que l'on placera de manière que l'axe optique de sa lunette, rendu préalablement parallèle au plan de ce limbe, s'aligne exactement, sur eux, dans sa rotation. Quand cette condition sera remplie, on fera placer, de distance en distance, d'autres jalons verticaux, portant des mires, que l'on dressera d'abord approximativement à vue, sur cette direction. Lorsqu'ils en seront assez proches pour que les divisions des mires se voient dans le champ de la lunette, toujours alignée sur les signaux extrêmes, on notera celle des divisions qui se trouve sous le fil, et l'on marquera, comme précédemment, sur une plaque fixée au niveau du sol, le pied de la verticale correspondante. Le même procédé servira pour prolonger, au delà de l'intervalle P′P″, le plan vertical, conséquemment l'arc méridien qui passe par ces points. Cela sera plus simple que de transporter, pour le même but, l'instrument des passages, qui est plus difficile à établir; et l'on pourrait concevoir la ligne méridienne d'une première station continuée ainsi d'un bout à l'autre d'un continent, sur son prolongement primitif, après qu'elle aurait été déterminée par des passages d'étoiles circompolaires dans cette seule station.

31. Toutefois, dans ce cas idéal d'une si longue extension, qui sortirait des conditions restreintes auxquelles nous supposons les opérations réelles assujetties, il y aurait un grand intérêt à établir de nouveau l'instrument des passages au dernier point de la ligne ainsi tracée, et même en d'autres points intermédiaires, pour y

déterminer immédiatement, par des observations astronomiques, la direction du méridien local. Car, si les méridiens terrestres, tels que nous les avons généralement définis, page 34, n'étaient pas des courbes planes, le méridien réel, ainsi astronomiquement fixé, s'écarterait de la direction du signal précédent, et cette déviation azimutale décélerait le fait lui-même, par un caractère incontestable. Malheureusement, on ne saurait espérer de trouver une localité où le tracé direct puisse être prolongé assez loin pour qu'on pût le faire servir à une pareille épreuve. C'est pourquoi on tâche d'y suppléer, dans les grandes opérations modernes, par une autre détermination équivalente, comme je l'expliquerai plus tard. Mais, malgré la grande longueur des chaînes de triangles auxquelles on a pu l'appliquer, on n'a trouvé que des déviations finales si petites, qu'elles se confondent avec les résultats des erreurs que les observations comportent, ou qu'on y peut, tout au plus, reconnaître des indices d'accidents locaux, dont l'influence ne se fait pas sentir d'une manière suivie; de sorte que, jusqu'à présent, rien n'autoriserait à affirmer que les méridiens terrestres, dans ce qu'ils ont de régulier, ne sont pas des courbes planes. D'après cela, leur double courbure, si elle existe, doit certainement être insensible sur un arc d'un petit nombre de degrés, tel que pourrait tout au plus l'embrasser un tracé direct, comme celui que j'ai tout à l'heure décrit.

32. Même, en le restreignant à ces limites, il faudrait, pour qu'il fût exécutable sans rectification, supposer que la surface du terrain où l'on opère est partout exactement horizontale, c'est-à-

la température à laquelle la comparaison est effectuée. Et, quand on s'en sert à une autre température, on les ramène toujours à cette longueur primitive, d'après la dilatation connue de la matière dont elles sont faites. Afin que ces règles, ou ces chaînes, quoique rectilignes, puissent s'adapter à la convexité de la surface terrestre par des applications successives, avec une suffisante approximation, il faut que leur longueur n'excède pas quelques toises des anciennes mesures de Paris, ou un nombre semblablement restreint de mètres. Elles sont étendues sur des plans inflexibles, dont les supports sont pourvus de mouvements de rappels verticaux qui permettent de les amener à une exacte horizontalité, quand le sol sur lequel on opère n'est que peu inégal. Mais, comme des accidents de localité, trop ordinaires, rendraient souvent difficile, ou même impossible d'opérer matériellement un grand nombre de contacts successifs dans cette condition unique, on y ramène, par le calcul, les contacts quelque peu obliques, d'après l'angle actuel d'inclinaison mesuré par un niveau divisé, qui est fixé au plan rigide sur lequel la règle ou la chaîne repose. Chaque système partiel, ainsi constitué, est recouvert par un toit en bois qui l'abrite contre la radiation solaire. On les peint extérieurement de couleurs différentes, pour les distinguer les uns des autres, quand on les transporte successivement pour continuer leur apposition; et des pointes métalliques, fixées verticalement aux extrémités des sommets de ces toits, servent de viseurs pour aligner les règles intérieures sur les jalons dressés aux différents points P′, P″,... que l'on a marqués sur le sol dans la direction de la ligne à mesurer. Peut-être cet alignement se jugerait mieux à travers de petites lunettes munies de réticules, dont l'axe optique physique coïnciderait avec l'axe des règles, et qui seraient fixées aux deux bouts de chaque toit, à des hauteurs tant soit peu différentes. Mais une très-petite erreur dans l'alignement de chaque règle n'a presque pas d'importance, parce que la longueur oblique diffère alors extrêmement peu de sa projection sur la ligne directe. Toutefois, la somme de ces écarts donne nécessairement une mesure totale plus longue que la véritable d'une quantité qui peut s'apprécier, en supposant, dans chaque posage, la plus grande erreur que l'on

alors remplacer les expressions abstraites des arcs par les rapports $\frac{d}{R''}$, $\frac{d'}{R''}$, $\frac{\alpha}{R''}$, dans les termes qui les contiennent explicitement. Cela rendra la première puissance du facteur $\frac{1}{R''}$ commune à tous ces termes, et, après l'avoir fait disparaître, il restera

$$[1]\quad (d'-d)''=\alpha''\cos i+\frac{1}{2}\frac{\alpha''^2}{R''}\frac{\sin^2 i}{\tang d}-\frac{1}{6}\frac{\alpha''^3}{R''^2}\left(1+\frac{3}{\tang^2 d}\right)\cos i\sin^2 i.$$

Il faut se rappeler que, selon l'évaluation rapportée page 62, on a, en se bornant à sept décimales,

$$\log R''=5{,}3144251\text{ ; conséquemment, }\log\left(\frac{1}{R''}\right)=\bar{6}{,}6855749.$$

Si, au contraire, on veut obtenir la relation semblable qui existe entre les arcs D, D', A de la sphère terrestre, il faudra éliminer les arcs d, d', α de la sphère centrale par leurs rapports de proportionnalité avec ceux-là, c'est-à-dire les remplacer par leurs valeurs équivalentes $\frac{D}{R}$, $\frac{D'}{R}$, $\frac{A}{R}$, dans les termes où ils se trouvent explicitement. Alors une des puissances de $\frac{1}{R}$ disparaît encore comme facteur commun, et il reste

$$[1]\quad D'-D=A\cos i+\frac{1}{2}\frac{A^2}{R}\frac{\sin^2 i}{\tang d}-\frac{1}{6}\frac{A^3}{R^2}\left(1+\frac{3}{\tang^2 d}\right)\cos i\sin^2 i.$$

L'arc terrestre D'—D, ou SM', *fig.* 24, sera ainsi connu en unités de longueur de la même espèce que celles que l'on aura employées pour exprimer l'arc A ; et le rayon local R, qui devra être exprimé aussi dans cette même espèce d'unités, n'entrera que dans l'évaluation des termes correctifs associés à la partie principale A cos i. Ainsi, en raison de leur petitesse, il n'aura besoin d'être connu qu'approximativement, comme nous l'avons prouvé page 110. Pour obtenir commodément et avec exactitude la valeur du produit A cos i, il conviendra de remplacer le second facteur par son expression équivalente $1-2\sin^2\frac{1}{2}i$, ce qui le changera en

53. Si l'opération que je viens de décrire est faite sur une plage sablonneuse, longeant le bord de la mer, les règles apposées ainsi horizontalement, ou plus généralement leurs projections horizontales, calculées d'après les indications de leur niveau, si elles sont quelque peu obliques aux verticales successives, représenteront autant de petites droites consécutivement tangentes à l'arc méridien, au milieu de leur longueur. Or, dans un cercle, la différence entre un petit arc et sa tangente est moindre que le tiers du cube de cette même tangente divisé par le carré du rayon du cercle. On peut donc penser qu'en restreignant les longueurs de nos règles comme nous l'avons fait, elles seront si petites, comparativement au rayon de la terre, que leur différence avec l'arc qu'elles touchent sera négligeable; et cela peut du moins être admis dans un premier calcul approximatif. Mais, quand le rayon de la terre nous deviendra connu par cette première évaluation, nous pourrons nous assurer que la différence dont il s'agit sera en effet insensible pour chacune de nos règles, dans les bornes de longueur auxquelles nous les avons restreintes; et même la somme des différences ainsi accumulées dans une mensuration de 300000 ou 400000 mètres ne formerait pas une fraction de millimètre appréciable par les appareils physiques les plus précis.

54. Supposons maintenant que la mensuration n'ait pas été faite au bord de la mer, mais dans une vaste plaine située à l'intérieur d'un continent; et, pour nous adapter entièrement aux réalités les plus ordinaires, donnons à cette plaine une faible pente continue sur sa verticale moyenne. Quand toutes les règles apposées auront été réduites, par le calcul, à l'horizontalité sur leurs ver-

---

cessive. Les détails varient selon la disposition des appareils employés. J'ai pris principalement pour type ceux qui ont été appliqués, d'après les idées de Borda, à la mesure des bases de la grande triangulation effectuée en France par Méchain et Delambre. On en trouvera l'exposition précise dans l'ouvrage de ce dernier, intitulé : *Mesure de la Méridienne*, tome II. Les procédés employés en Angleterre pour une opération analogue ont été exposés par le général Roy, dans les *Transactions philosophiques de la Société royale de Londres*, et ils ont été rassemblés, par le général Mudge, dans un ouvrage spécial intitulé : *An account of the operations carried on for accomplishing a trigonometrical Survey of England and Wales*, 1 vol. Londres, 1799.

menées de S′ à la courbe du méridien réel, et au cercle S′P. Or, les angles formés par ces deux tangentes avec l'arc S′S, supposé commun au sphéroïde et à la sphère, constituent l'azimut vrai et l'azimut sphérique i' de cet arc, lesquels ont ainsi mathématiquement d'inégales valeurs. Mais, quand nous aurons étudié l'ensemble du sphéroïde terrestre, on verra qu'en vertu de la petitesse des arcs A, et de la sphéricité presque exacte de la terre, l'angle compris entre les deux tangentes que nous venons de considérer est toujours restreint à un petit nombre de secondes; de sorte que l'azimut vrai i' rapporté à l'horizon du sphéroïde, et l'azimut analogue du même arc rapporté à l'horizon de la sphère, ne peuvent différer entre eux que par des quantités angulaires inappréciables, en vertu de la formule de réduction démontrée page 96. On pourra donc toujours, dans de telles circonstances, employer ces azimuts comme égaux entre eux sans aucune réduction.

Ceci étant admis, l'équation [2] se réduira en nombres, soit immédiatement par les Tables de sinus, soit par le détour arithmétique expliqué dans la page 64; ce qui exigera de même la connaissance suffisamment exacte du rayon osculateur R pour calculer le rapport α ou $\frac{A}{R}$ qui est un de ses éléments.

128. La petitesse habituelle de l'angle $i - i'$ peut faire souvent désirer de l'obtenir par les séries. Cela sera très-facile; car, en supposant, par abréviation,

$$c = \frac{\cos\frac{1}{2}(d'+d)\cos\frac{1}{2}(d'-d)}{\sin d'}\sin i,$$

elle deviendrait

$$\sin(i - i') = 2c\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Alors, la petitesse de l'arc α permettrait de la traiter comme nous avons fait pour une équation analogue, page 73, § 66. Ainsi, en se bornant aux troisièmes puissances de l'arc α, qui sont la limite suffisante de toutes nos approximations, on en tirerait d'abord, par les développements de la page 60,

$$i - i' = 2c\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{4}{3}c^3\,\mathrm{tang}^3\,\tfrac{1}{2}\alpha;$$

et, en outre,

$$\tang \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{24}\alpha^3.$$

Remplaçant donc, dans la première expression, $\tang \frac{1}{2}\alpha$ par la valeur tirée de la seconde, et se restreignant aux α^3, il en résultera

$$i - i' = c\alpha + \tfrac{1}{12}c\left(2c^2 + 1\right)\alpha^3.$$

Les arcs $i - i'$ et α sont censés ici exprimés en parties du rayon du cercle pris pour unité de longueur. Si l'on veut les exprimer en secondes de degré, il faudra remplacer les lettres qui les désignent par les rapports $\frac{(i-i')''}{R''}$, $\frac{\alpha''}{R''}$, R'' étant le nombre de secondes que contient le rayon plié en arc. On aura donc ainsi

$$(i - i')'' = c\alpha'' + \tfrac{1}{12}c\left(2c^2 + 1\right)\frac{\alpha''^3}{R''^2},$$

en prenant

$$\log R'' = 5{,}31442513.$$

Nous apprécierons plus loin le degré d'exactitude de cette approximation par un exemple, en la comparant à l'évaluation rigoureuse.

129. L'angle i', ainsi obtenu, sera, dans notre *fig.* 24, l'azimut réciproque de S vu de S', en comptant cet azimut à partir du pôle vers S; au lieu que l'angle i, azimut de S', vu de S, avait été donné comme compté du point sud vers S'. Dans une triangulation continue, il convient d'exprimer tous les azimuts par un mode de numération similaire, qui procède toujours, depuis 0° jusqu'à 360°, dans un sens convenu, par exemple en allant du sud vers l'est autour

écrire,

$$\text{Azimut de S' vu de S} \ldots\ldots \quad Z = 360^\circ - i;$$
$$\text{Azimut de S vu de S'} \ldots\ldots \quad Z' = 180^\circ - i'.$$

D'après cela, quand l'azimut Z sera donné selon ces conventions, s'il est moindre que 180°, il faudra faire, dans notre formule [2], $\sin i = +\sin Z$, et appliquer la valeur résultante de i' à la première combinaison pour avoir Z'. Mais si Z surpasse 180°, il faudra faire $\sin i = -\sin Z$, et appliquer la valeur de i' à la seconde forme de Z'. Dans tous les cas, ce seront ces valeurs, ainsi déduites du premier azimut de la chaîne des triangles, qu'on devra comparer aux azimuts qui auraient été déterminés astronomiquement, dans une ou plusieurs des stations suivantes.

On obtiendrait des formules analogues si l'on voulait compter les azimuts en allant du sud vers l'ouest, comme on le fait souvent. Alors, en les désignant par [Z], [Z]', on aurait généralement

$$[Z] = 360^\circ - Z, \qquad [Z]' = 360^\circ - Z';$$

ce qui donnerait

fig. 25 : $\quad [Z] = 360^\circ - i, \qquad [Z]' = 180^\circ - i';$

fig. 26 : $\quad [Z] = i, \qquad [Z]' = 180^\circ + i'.$

130. Enfin, après qu'on aura obtenu ces résultats, on pourra trouver directement l'angle au pôle p, par la proportionnalité des sinus des angles aux sinus des côtés opposés, ce qui, en revenant à la *fig.* 24, donnera, pour $\sin p$, ces deux expressions équivalentes :

$$[3] \qquad \sin p = \frac{\sin i}{\sin d'} \sin \alpha, \quad \text{ou encore,} \quad \sin p = \frac{\sin i'}{\sin d} \sin \alpha.$$

On réduira donc ces équations en nombres, soit immédiatement, par les Tables de sinus, soit en faisant usage de l'artifice auxiliaire, dont j'ai rappelé l'application à l'équation [2]. On obtiendra ainsi deux valeurs de p qui devront se trouver identiques; et leur accord servira de preuve pour assurer l'exactitude des calculs arithmétiques par lesquels on aura déterminé d' et i'. L'angle dièdre p, ainsi calculé, sera commun au sphéroïde et à la sphère osculatrice, puisque, par les conditions de construction assi-

pôle P comme centre, on pourra bien transporter idéalement l'arc SS_1, en MM_1, sur le méridien de S_2, sans altérer sa longueur, puisque tous les méridiens sphériques sont pareils. Mais il faudra ensuite trouver l'arc M_1S_2 qui le complète sur ce même méridien, pour pouvoir l'ajouter à MM_1 comme prolongement; et cet arc M_1S_2 doit être évidemment moindre que l'oblique S_1S_2 que l'on a mesurée. Nous calculerons, plus loin, cette réduction exactement, et nous la trouverons égale à $932^{pds},45$, dont il faut diminuer l'arc S_1S_2 pour avoir M_1S_2, ce qui donnera celui-ci égal à $433079^{pds},15$. Mais, déjà, la petitesse de l'angle $S_1S_2M_1$ montre qu'on obtiendrait une valeur très-approchée de M_1S_2 en considérant $S_1M_1S_2$ comme un triangle rectiligne, rectangle en M_1, dont S_1S_2 serait l'hypoténuse; auquel cas on aurait M_1S_2 égal à $S_1S_2 \cos S_1S_2M_1$, ce qui donnerait pour sa valeur $433094^{pds},69$, excédant seulement de $15^{pds},54$ sa valeur exacte. On pourrait donc employer ce résultat comme une première évaluation approximative, qui servirait à trouver l'arc méridien total MS_2, compris entre les parallèles des stations extrêmes, et par suite le rayon de la sphère osculatrice locale; résultats que l'on corrigerait ultérieurement par un second calcul, fondé sur la valeur ainsi obtenue de ce rayon. Pour éviter ce détour, j'emploierai de prime abord les résultats définitifs, avec la petite réduction de $15^{pds},54$ due à la courbure sphérique du triangle $S_1M_1S_2$, sauf à prouver plus tard que la longueur approximative du rayon terrestre qu'on obtiendrait sans en tenir compte suffirait pour calculer très-exactement sa valeur (*). L'arc oblique M_1S_2 ainsi réduit

(*) Pour apprécier l'exactitude de ce raisonnement, il n'y a qu'à effectuer le calcul du degré avec la valeur de MS_2 supposée égale à $433094^{pds},69$ au lieu de $433079^{pds},15$. En l'ajoutant de même à SS_1 ou à son égale MM_1, qui est $104988^{pds},4$, l'arc méridien total compris entre les parallèles de S et de S_2 sera $538067^{pds},55 + 15^{pds},54$. Il faudra encore l'augmenter de $10^{pds},84$ pour réduire le mesurage à la température de $16^{\circ},25$, ce qui donnera $538078^{pds},39 + 15^{pds},54$. En divisant cette somme par l'angle $1^{\circ}28'45''$, compris entre les verticales extrêmes, la longueur du degré sexagésimal donnée par cette première approximation sera

$$\frac{1^{\circ}.538078^{pds},39}{1^{\circ}28'45''} + \frac{1^{\circ}.15^{pds},54}{1^{\circ}28'45''} = 363771^{pds},3 + 10^{pds},51 = 363781^{pds},81.$$

Or, on verra plus tard que cette première évaluation, malgré la petite circon

les transformations analogues que nous avons eu déjà l'occasion d'effectuer, j'ai cru devoir les exposer en détail pour faire bien sentir la double acception que prend le rapport $\frac{A}{R}$, dans le second membre, selon que l'on veut obtenir l'angle p exprimé par un arc de la sphère centrale dont le rayon est 1, ou en secondes de la graduation sexagésimale du cercle.

132. Revenant à la première forme, si l'on suppose le rapport α ou $\frac{A}{R}$ assez petit pour que l'on puisse négliger les α^3, la première des équations (3) donnera

$$p = \alpha \frac{\sin i}{\sin d'}.$$

Or, le développement qui donne $i - i'$ étant restreint de même, se réduit à

$$i - i' = \alpha \frac{\cos \frac{1}{2}(d' + d) \cos \frac{1}{2}(d' - d)}{\sin d'} \sin i.$$

Prenant le facteur $\frac{\alpha \sin i}{\sin d'}$ dans la première, celle-ci devient

$$i - i' = p \cos \tfrac{1}{2}(d' + d) \cos \tfrac{1}{2}(d' - d).$$

Multipliez le second membre par l'unité mise sous la forme $\frac{\cos \frac{1}{2}(d' - d)}{\cos \frac{1}{2}(d' - d)}$, cela donnera au numérateur le facteur $\cos^2 \frac{1}{2}(d' - d)$, ou $1 - \sin^2 \frac{1}{2}(d' - d)$, qui pourra être réduit à l'unité, à cause de la petitesse de $d' - d$ qui rendra le produit $p \sin^2 \frac{1}{2}(d' - d)$ toujours négligeable, l'angle p étant déjà supposé très-petit par lui-même. Il en résulterait donc

$$i - i' = p \frac{\cos \frac{1}{2}(d' + d)}{\cos \frac{1}{2}(d' - d)}.$$

Je rapporte cette expression parce qu'elle a été présentée dans des ouvrages très-répandus, et qu'elle a été aussi fort généralement appliquée. Mais elle ne me paraît avoir aucun avantage sur les expressions plus directes que j'ai rapportées; et elle me semble même

conserver inutilement, à son dénominateur, $\cos\frac{1}{2}(d'-d)$, qui ne diffère de l'unité que par des quantités de l'ordre $\sin^2\frac{1}{2}(d'-d)$ qu'on a déjà supposées négligeables précédemment.

133. Lorsqu'on a trouvé, comme nous venons de le dire, l'angle au pôle p, compris entre les méridiens sphériques des deux stations S, S', ainsi que le distance polaire d' de cette dernière, on peut aisément calculer l'arc de parallèle SΠ, *fig.* 27, qui, partant de S, est compris entre ces mêmes méridiens. Pour cela, reportons notre triangle sphérique PSS' sur la sphère complète POEE', *fig.* 28, dont O est le centre, OP ou R le rayon polaire, EE' le grand cercle équatorial décrit du même centre, avec le même rayon R, dans un plan perpendiculaire à OP. Si, par la station S, on conçoit un plan SO'Π, également perpendiculaire à OP, la section sera un cercle parallèle au cercle équatorial, mais décrit du centre O' avec un rayon r moindre que R, et dont la longueur sera $R\sin d$, d étant la distance polaire POS de la station S. La portion SΠ de ce cercle comprise entre les deux méridiens PS, PS', est l'arc de parallèle que nous voulons évaluer, et il soutend au centre O' le même angle dièdre p que nous venons d'obtenir. Or, cet angle exprimé en α représente l'arc équatorial ee' de la sphère centrale décrite du rayon 1, qui est intercepté entre les plans méridiens PSE, PS'E' de nos deux stations. Ainsi l'arc SΠ qui soutend le même angle à l'extrémité du rayon r aura proportionnellement pour longueur pr ou $p\mathrm{R}\sin d$. Prenant donc la première expression de p en α, qui est

[redacted]

comme on le verra tout à l'heure, on le déduirait aisément de ce résultat. Car il suffirait évidemment de le multiplier par le rapport du nouveau rayon r_n au rayon r, conséquemment par le rapport $\frac{\sin d_n}{\sin d}$ des distances polaires qui correspondent respectivement à ces rayons. Alors, en désignant généralement par $S\Pi_n$ la longueur du nouvel arc de parallèle ainsi défini, on aurait

$$[4]\quad S\Pi_n = \frac{A \sin i \sin d_n}{\sin d'} - \frac{1}{6}\,\frac{\sin i \sin d_n \sin(d'+i)\sin(d'-i)A^3}{\sin^3 d' \qquad R^2},$$

expression dans laquelle il faudrait toujours conserver aux éléments i, d', A, les valeurs propres aux deux stations primitives S, S', ainsi qu'à l'arc intercepté entre elles sur la sphère du rayon R.

134. On emploie cette formule pour tracer sur le sphéroïde terrestre de grands arcs de parallèles situés à une même distance polaire d_n, comme on y trace des arcs de méridiens. Pour cela on établit une triangulation générale, dirigée approximativement dans le sens du parallèle de la première station. On détermine, par l'observation, tous les angles sphériques des triangles qui la composent, et on la lie trigonométriquement à une ou plusieurs bases mesurées, d'où l'on déduit la longueur du côté qui s'y rattache, puis successivement tous les autres, par l'intermédiaire des côtés communs aux triangles consécutifs. Pour tout cela, les méthodes d'observation et les procédés de calcul sont les mêmes que dans les triangulations méridiennes. De même encore, à la première station, supposée S, *fig.* 27, on détermine astronomiquement la distance angulaire d, du pôle au zénith, et l'azimut i que le côté SS' ou A du premier triangle forme avec la direction de son méridien PSm. Considérant alors le triangle polaire PSS' comme établi sur la sphère qui est osculatrice en S, transversalement au méridien PS, on en conclut, comme nous l'avons expliqué tout à l'heure, 1° la longueur de l'arc SΠ, compris, sur le parallèle de S, entre les deux plans méridiens PS, PS'; 2° l'azimut i' du côté A sur l'horizon sphérique de S'; 3° la distance d'

du pôle au zenith en S′, comptée à partir du rayon mené à S′ du centre de la sphère. Si la terre était exactement sphérique, ou seulement si elle pouvait être supposée telle dans une petite étendue d'un même parallèle, le même calcul pourrait se continuer ultérieurement sans modification; et les résultats obtenus dans le premier triangle polaire, étant successivement transportés à la station S′, puis aux suivantes, suffiraient pour obtenir toutes les portions de parallèles comprises entre leurs méridiens propres, lesquelles, transportées par réduction sur le parallèle de S et ajoutées les unes aux autres, composeraient l'arc total. En effet, si l'on désigne par S″ la station qui suit immédiatement S′, elle s'y rattachera par l'arc sphérique S′S″ ou A′ qui est connu par la résolution des triangles principaux. En outre, l'angle S″S′S, ayant été préalablement déterminé dans ces mêmes triangles, on en retranchera i' qui vient d'être obtenu, et l'on aura l'angle S″S′P, dont le supplément S″S′m' sera l'azimut du côté A′ sur l'horizon sphérique de S′, compté dans le même sens que i. Enfin on connaîtra aussi la distance angulaire du pôle au zénith en S′, qui sera d'. On se trouvera donc dans les mêmes conditions qu'en S, avec des données pareilles, d'où l'on déduira des résultats analogues propres à la station S′; et de celle-ci on passera de même à S″, puis à toutes les autres progressivement. Mais la surface terrestre n'étant pas exactement sphérique, ce transport ne peut plus s'effectuer avec tant de simplicité. Pour faire nettement comprendre les modifications qu'il exige, je me borne, comme précédemment, au cas réel où la terre est assimilable à un sphéroïde très peu diffé-

on verra qu'elle l'est effectivement dans nos triangulations. Alors il n'en résultera pas d'inégalité sensible entre les longueurs de l'arc circulaire SS′ et de l'arc SΣ′ qui en est la projection verticale sur le sphéroïde; et cette circonstance, jointe à la coïncidence de nos méridiens sphériques avec les méridiens vrais menés par les mêmes points, rendra aussi l'angle azimutal calculé i', sensiblement égal à sa valeur vraie, comme nous l'avons déjà remarqué page 150. Mais, pour transporter à la station S′ de la *fig.* 27 le calcul qu'on a fait à la station S, il faut d'abord y concevoir une nouvelle sphère transversalement osculatrice au méridien PS′, laquelle devra généralement différer de la première, par la situation de son centre sur l'axe polaire, par l'inclinaison de son rayon R′ sur cet axe, et par la longueur de ce rayon. Car ces trois éléments ne pourraient rester constants, sur toute la ligne de l'opération, que dans le cas infiniment particulier, et jamais pratiquement réalisable, où toutes les stations seraient situées exactement sur le parallèle de la première station S. Il faudra, en outre, connaître la distance angulaire du pôle au zénith *vrai* de S′, laquelle devant être comptée à partir de la normale locale Σ′N′, *fig.* 29, différera généralement de la distance d' calculée dans le premier triangle polaire, puisque celle-ci est évaluée à partir du rayon CS′ ou CΣ′. Cela exigera donc une petite correction dépendante de l'angle CΣ′N′ compris entre ces deux droites; et l'on ne pourra l'obtenir qu'après avoir déterminé la configuration générale du sphéroïde avec assez d'approximation pour pouvoir l'évaluer. Cette détermination sera également nécessaire pour donner aux rayons successifs R, R′,... des sphères osculatrices leurs véritables valeurs. Enfin elle le deviendra encore pour réduire à une même distance polaire vraie, *sur le sphéroïde*, toutes les portions d'arcs de parallèle, séparément évalués entre les méridiens des stations consécutives. Nous établirons plus loin les formules analytiques de toutes ces corrections. Mais il était essentiel d'en faire pressentir, dès à présent, la nature et l'emploi indispensable pour obtenir des résultats définitivement exacts.

133. Un raisonnement exactement pareil va nous montrer comment, au moyen de corrections analogues, les formules [1] et [2],

ci-dessus établies, peuvent servir à calculer la longueur totale d'un arc méridien compris entre deux stations S, S_n, liées entre elles par un réseau de triangles sphériques, sans avoir besoin de subdiviser ce réseau en triangles partiels appuyés sur la méridienne prolongée de S, comme nous l'avons fait précédemment. Pour cela je reproduis, dans la *fig.* 30, le même réseau que nous avions déjà considéré *fig.* 18. On suppose de même que l'on connaît les angles sphériques de tous les triangles, les longueurs absolues de tous leurs côtés, l'angle azimutal Z que l'un de ces côtés, par exemple SS′, forme, en S, avec la direction de la méridienne locale, enfin les distances angulaires d, d_n du pôle au zénith vrai des deux stations extrêmes S, S_n. Pour simplifier la première exposition du raisonnement, supposons d'abord toute la chaîne des triangles établie sur une même sphère dont P soit le pôle et R le rayon, exprimé dans l'espèce d'unité de longueur qu'on aura choisie, par exemple en toises. Il n'y aura plus aucune construction à faire. Car, connaissant la longueur de l'arc SS_1, l'angle azimutal Z, et la distance d du pôle au zénith observée en S, la formule [1], page 159, donnera immédiatement la longueur de l'arc SM_1, compris sur le méridien de S entre les parallèles des deux stations S, S_1. Soit $(D)_1$ la longueur de cet arc, exprimé en unités de même nature que R; sa valeur angulaire, en secondes de degré, sera $\frac{(D)_1}{R}$ R″. En l'ajoutant à d qui est connu, la somme d_1 sera la distance angulaire du pôle P au zénith de la station S_1. Avec ces deux angles, et l'arc SS_1 ou A, qui, réduit ainsi en

[redacted]

appliquant les mêmes formules, on en conclura de même l'arc $S_1\mu_4$, compris sur le méridien de S_1 entre les parallèles des stations S_1, S_4, plus l'azimut de S_1 vu de celle-ci. Or, ce parallèle est ici supposé tracé autour du même pôle commun P. Donc, si on le prolonge idéalement jusqu'au méridien primitif PSm, qu'il rencontrera en M_4, l'arc M_1M_4 sera égal à $S_1\mu_4$, puisque tous les méridiens sont pareils et partent du même pôle; de sorte que l'on connaîtra ainsi l'arc total SM_4 compris entre les parallèles de S et de S_4 sur ce premier méridien. On voit même, par la figure, qu'on aurait pu l'évaluer d'une autre manière, en prenant pour intermédiaire la station S_3, ce qui fournira une vérification des calculs par lesquels cet intervalle aura été conclu. Arrivé ainsi à la station S_4, on passera aux suivantes de la même manière, en calculant les différences d'arcs méridiens compris entre leurs parallèles successifs jusqu'à ce que l'on parvienne à la plus australe S_n. Le parallèle de celle-ci, conduit jusqu'au méridien primitif PSm, donnera la dernière portion d'arc méridien compris entre elle et la précédente. La somme de tous ces intervalles consécutifs composera l'arc total du méridien primitif SM_n, compris entre les parallèles extrêmes du réseau total. On pourra, en outre, déterminer, par la formule [3] les angles polaires compris entre les méridiens de toutes les stations que l'on aura accouplées successivement; et la formule [4] donnera encore, si l'on veut, les longueurs des arcs de parallèles que ces méridiens interceptent à partir de chacune des mêmes stations.

156. Dans la série des opérations que je viens de décrire, le rayon R de la sphère qui porte les triangles sert d'abord pour réduire en secondes les portions successives des intervalles méridiens donnés par la formule (1), afin d'obtenir la distance angulaire du pôle au zénith dans la station suivante; et il sert encore pour opérer une conversion pareille sur les côtés mêmes des triangles, afin d'obtenir les azimuts de ces côtés sur les horizons successifs des diverses stations. Mais il importe de remarquer que, si l'on a pour but unique ou principal d'obtenir la longueur de l'arc méridien compris entre les parallèles des stations extrêmes S, S_n, la longueur absolue du rayon R n'a pas besoin d'être connue avec la dernière

rigueur. Car, si l'on examine la formule [1], qui donne les portions (D) d'arc méridien comprises entre les parallèles des stations consécutives, on verra d'abord que les distances angulaires d du pôle au zénith n'y entrent que dans les termes correctifs toujours très-petits, de sorte qu'une légère erreur sur cet élément n'aurait qu'une très-faible influence sur les valeurs totales de (D). La même considération s'applique aux valeurs des azimuts i qui entrent dans ces mêmes termes. Quant au terme principal de (D), qui est $A \cos i$, si on le décompose en $A - 2A \sin^2 \frac{1}{2} i$, les petites erreurs qui pourraient affecter l'évaluation de i n'y auront qu'une influence très-atténuée. Donc, lorsque le rayon R sera seulement connu avec une approximation qui ne laisse que très-peu d'incertitude sur les rapports $\frac{A}{R}$ et $\frac{(D)}{R}$, les portions de l'arc méridien comprises entre les parallèles des stations consécutives devront s'obtenir ainsi très-exactement.

137. Maintenant, si nous supposons le réseau des triangles établi sur un sphéroïde presque sphérique et de révolution autour de l'axe polaire céleste, il faudra placer les stations successives sur autant de sphères différentes, transversalement osculatrices à leurs méridiens propres, ayant ainsi toutes leurs centres placés sur ce même axe, et leurs rayons polaires coïncidents avec lui en direction. Commençant alors par la station S, où la distance vraie d du pôle au zénith a été observée, on la concevra établie sur une sphère pareille ayant pour rayon R, dont la valeur approximative devra être supposée connue. Alors, ayant aussi, comme précédem-

ment. Mais la distance angûlaire d' du pôle au zénith, qui a été donnée par le calcul à partir du rayon CS_1 de la sphère précédente, devra subir une petite correction pour être rapportée à la normale vraie de S_1, laquelle formera généralement avec ce rayon un petit angle qu'on devra évaluer d'après la connaissance générale du sphéroïde. Cette réduction étant supposée faite, on se retrouvera en S_1, dans les mêmes conditions où l'on était en S, avec des données pareilles. On y évaluera donc de la même manière l'intervalle méridien $S_1\mu_1$, qui se transportera encore sur le méridien primitif de S et s'y appliquera à la suite de SM_1, avec sa vraie valeur, puisque tous les méridiens sont pareils, le sphéroïde étant supposé de révolution. En continuant ainsi progressivement jusqu'à la dernière station S_n, on connaîtra la longueur totale de l'arc méridien compris entre son parallèle et celui de la première station S d'où l'on est parti.

138. Les mêmes considérations que nous avons appliquées tout à l'heure au cas d'une sphère unique montreront ici encore que les rayons osculateurs successifs R, R_1,... n'ont besoin d'être connus qu'approximativement, pour l'évaluation des termes correctifs où ils entrent comme dénominateurs. Mais ils seront nécessaires, en outre, pour calculer, par déduction, les azimuts successifs i', dont l'angle calculé d' est aussi un élément. Heureusement, dans ces applications, les rayons successifs R, R_1,... ne varient que par des différences très-petites, que l'on peut toujours évaluer avec une approximation suffisante, d'après la connaissance générale de la forme du sphéroïde obtenue antérieurement.

139. Delambre considérait la méthode précédente comme la plus simple et la plus directe que l'on pût employer pour trouver l'arc total SM_n, *fig.* 30, et il la préférait, à cause de la régularité de son application, à celle qui fait obtenir les mêmes résultats en prolongeant les côtés des triangles successifs jusqu'au méridien primitif PSm, comme je l'ai exposé d'abord sur la *fig.* 18. En supposant que l'on calcule les azimuts successifs et les angles polaires par les formules [1] et [2], il est évident que les deux méthodes doivent conduire à des résultats identiques si on les applique exactement. Car les distances successives du pôle au zénith, dont on fait usage dans la dernière

méthode que je viens d'exposer, s'obtiennent avec un degré d'approximation exactement égal à celui que donne la règle de Legendre pour résoudre les triangles sphériques primitifs ou auxiliaires que l'on emploie dans la première ; et tous les autres éléments des calculs successifs résultent rigoureusement des formules [2] et [3], d'après cette unique évaluation. Chacun pourra donc employer celui des deux procédés qui lui paraîtra le plus commode ; et, en effet, l'application qui en a été souvent faite à un même réseau de triangles a donné des résultats complétement pareils quand les calculs ont été exactement effectués.

140. M. Largeteau a judicieusement combiné l'emploi des deux méthodes pour calculer le plus simplement possible l'arc de méridien compris, dans la triangulation d'Espagne, entre les parallèles de Montjouy et de Formentera. Le réseau qui lie ses stations extrêmes est représenté *fig.* 50 et 51, avec deux systèmes différents de constructions géométriques, par lesquelles M. Largeteau a déterminé concurremment l'arc méridien intercepté. Ces deux systèmes partent d'une origine commune que j'indiquerai d'abord. En jetant les yeux sur ces figures, on voit que les deux stations extrêmes, Montjouy et Formentera, sont situées sur des méridiens peu différents. Mais la nécessité de traverser la mer qui les sépare a forcé de rejeter d'abord le réseau des triangles vers l'ouest, puis de le ramener vers l'est sur cette dernière station, par des côtés d'une étendue considérable. C'est pourquoi, si l'on voulait déterminer les intervalles méridiens des stations les plus écartées vers l'ouest, par la première méthode, en prolongeant les constructions

les parallèles de Montjouy et de Saint-Jean; 2° la distance du pôle au zénith dans cette dernière station; 3° enfin, l'azimut d'un des côtés du réseau, par exemple du côté Saint-Jean-Montagut sur son horizon. Il a donc ainsi toutes les données nécessaires pour calculer trigonométriquement l'arc méridien compris entre Saint-Jean, comme point de départ, et Formentera, en conduisant seulement les arcs des triangles auxiliaires jusqu'au méridien de cette première station, ce qu'il fait de deux manières différentes, représentées dans les *fig.* 50 et 51. Ayant obtenu ainsi des résultats qui concordent, il ajoute à cet intervalle la première portion d'arc méridien intercepté entre les parallèles de Saint-Jean et de Montjouy, ce qui lui donne l'intervalle compris entre ceux de Montjouy et de Formentera. Je rapporte en note ce double calcul à la suite du présent chapitre, ne pouvant offrir une application plus complète, ou plus probante, des procédés employés pour ce genre de détermination. Mais je le renvoie jusque-là pour y introduire les petites corrections qu'il faut y faire lorsqu'on veut assimiler la surface terrestre à un ellipsoïde de révolution légèrement aplati à ses pôles, ce qui est plus exact que de la supposer tout à fait sphérique, quoique cette hypothèse plus complexe ne la représente pas encore avec une complète rigueur, ainsi qu'on le verra bientôt.

141. Pour prouver l'exactitude des formules, tant rigoureuses qu'approximatives, que je viens d'établir dans la présente section, je les appliquerai à un cas numérique que Delambre a aussi choisi comme exemple, pour le même but, dans le tome III de son ouvrage intitulé : *Base du système métrique*, page 34.

Reprenant le triangle sphérique PSS', *fig.* 24, on se donne les trois côtés du triangle homologue de la sphère centrale, et l'on prend, pour leurs valeurs angulaires,

$$d = 45^\circ\, 10', \qquad d' = 45^\circ\, 30', \qquad \alpha = 1^\circ;$$

conséquemment

$$d' - d = 0^\circ\, 20'\, 0'',0.$$

De là, par les formules finies de la trigonométrie sphérique, on tire les valeurs exactes des trois angles de ce triangle, et l'on prend le supplément de l'angle S pour exprimer l'angle i employé dans notre

qu'elle représente deviendra encore plus petite, dans la proportion des amplitudes, pour des arcs moindres, comme sont toujours ceux auxquels on a occasion d'appliquer les expressions précédentes. On pourra donc la négliger sans hésitation.

61. On peut représenter par des développements analogues toute fonction de l'arc α dont la forme serait donnée. Supposons, par exemple, que l'on veuille exprimer ainsi les relations de la corde avec l'arc qu'elle soutend. On aura, par définition,

$$\text{corde}\,\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Rapportons d'abord l'arc α au rayon du cercle pris pour unité de longueur. Si l'on veut avoir la corde en fonction de l'arc, il faudra développer $\sin\frac{1}{2}\alpha$ suivant les puissances de $\frac{1}{2}\alpha$. Si l'on veut, au contraire, l'arc en fonction de la corde, il faudra développer l'arc $\frac{1}{2}\alpha$ en fonction de son sinus qui est $\frac{1}{2}$ corde α. Effectuant donc ces opérations, et faisant ensuite disparaître le dénominateur commun 2, on trouvera d'abord

$$\text{corde}\,\alpha = \alpha - \tfrac{1}{24}\alpha^3 + \tfrac{1}{1920}\alpha^5 \ldots;$$

et

$$\alpha = \text{corde}\,\alpha + \tfrac{1}{24}(\text{corde}\,\alpha)^3 + \tfrac{3}{640}(\text{corde}\,\alpha)^5 \ldots.$$

La petitesse des fractions $\frac{1}{1920}$, $\frac{3}{640}$, qui multiplient les puissances cinquièmes, montre d'avance qu'on pourra toujours négliger ces termes, pour des arcs moindres que 2°. Alors, en prenant les logarithmes tabulaires des deux membres de chaque égalité, et restreignant les développements à leurs deux premiers termes, on trouvera

$$\log(\text{corde}\,\alpha) = \log\alpha - \frac{k}{24}\alpha^2, \qquad \log\alpha = \log(\text{corde}\,\alpha) + \frac{k}{24}(\text{corde}\,\alpha)^2;$$

ou, si l'on veut exprimer l'arc α en secondes de degré, hors des signes trigonométriques,

$$\log\text{corde}\,\alpha = -\log R'' + \log\alpha - \frac{k}{24}\frac{\alpha^2}{R''^2},$$

$$\log\alpha = \log R'' + \log(\text{corde}\,\alpha) + \frac{k}{24}(\text{corde}\,\alpha)^2$$

degré, est

$$(i - i')'' = c\alpha'' + \tfrac{1}{12} c\,(2c^2 + 1)\frac{\alpha''^3}{R''^2},$$

en faisant

$$c = \frac{\cos\frac{1}{2}(d' + d)\cos\frac{1}{2}(d' - d)\sin i}{\sin d'}.$$

Réduite en nombres avec les éléments ici adoptés, elle donne

$$(i - i')'' = 0^\circ\,55'\,54'',76 + 0'',23 = 0^\circ\,55'\,54'',99.$$

Elle diffère donc seulement de 0",01 de la valeur exacte que donne notre formule rigoureuse, dont le calcul est tout aussi facile. On voit que les termes en α^3 ne peuvent pas y être négligés.

Je passe aux deux expressions analogues de l'angle p qui, exprimées aussi en secondes, sont

$$p'' = \alpha''\frac{\sin i}{\sin d'} - \frac{1}{6}\frac{\alpha''^3}{R''^2}\sin i\,\frac{\sin(d' + i)\sin(d' - i)}{\sin^3 d'},$$

$$p'' = \alpha''\frac{\sin i'}{\sin d} - \frac{1}{6}\frac{\alpha''^3}{R''^2}\sin i'\,\frac{\sin(d + i')\sin(d - i')}{\sin^3 d}.$$

Elles s'accordent toutes deux à donner

$$p'' = 1^\circ\,19'\,32'',212 + 0'',183 = 1^\circ\,19'\,32'',395;$$

elles reproduisent donc la valeur exacte de p'', et l'on voit encore que les termes en α^3 n'y sont pas négligeables.

D'après cela, on doit s'attendre à obtenir moins de précision par les formules plus restreintes que l'on a introduites dans l'usage habituel, et qui sont

$$p'' = \frac{\alpha''\sin i}{\sin d'}; \qquad p'' = \frac{\alpha''\sin i'}{\sin d}; \qquad (i - i')'' = p''\,\frac{\cos\frac{1}{2}(d' + d)}{\cos\frac{1}{2}(d' - d)}.$$

En effet, celles-ci donnent

$$p'' = 1^\circ\,19'\,32'',212; \qquad (i - i')'' = 0^\circ\,55'\,54'',79.$$

L'évaluation de p'' présente une erreur égale à 0",183; celle de $(i - i')''$ est en erreur de 0",21, c'est l'effet des termes qu'on y a

où il faut toujours se rappeler que l'on a, en se bornant à dix décimales,

$$k = 0,4342944819, \quad \log k = \bar{1},6377843113.$$

On peut remplacer le rayon R par sa valeur en fonction du degré sexagésimal, mesuré sur le cercle auquel l'arc A appartient. Car, soit $D^{(0)}$ la longueur de ce degré exprimé dans la même espèce d'unités linéaires que A. D'après ce qui a été démontré dans la page 42 (note), si l'on fait, par abréviation,

$$\omega = \frac{180}{\varpi},$$

on aura

$$R = \omega D^{(0)} \quad \text{et} \quad \log \omega = 1,7581226324.$$

Toutes ces expressions ont été données par Delambre dans le tome II de l'ouvrage intitulé : *Base du système métrique décimal*. Leur principal avantage consiste en ce que, lorsqu'on veut calculer leur premier membre, par l'élément du second qui se trouve actuellement donné, la partie principale de la valeur cherchée s'obtient immédiatement par celle de cet élément même, et le rayon R n'entre que dans les termes correctifs, toujours très-petits. Ainsi la longueur linéaire de ce rayon, ou du degré $D^{(0)}$ qui le représente, n'a pas besoin d'être connue avec la dernière rigueur, mais seulement par une évaluation approximative. Cela est rendu évident par la petitesse du facteur $\frac{1}{\omega^2}$ ou $\frac{k}{\omega^2}$ qui affecte tous ces termes, et qui atténue ainsi les erreurs que l'on aurait pu commettre dans l'appréciation du degré $D^{(0)}$, le rapport $\frac{A}{D^{(0)}}$ devant être toujours moindre que 2. Alors, quand on applique ces formules à des mesures d'arcs méridiens, effectuées dans une région quelconque de la terre, on pourrait, comme première approximation, calculer les termes correctifs, en donnant au rayon R la valeur que l'on conclurait de ces mesures mêmes, en faisant d'abord abstraction de ces termes; sauf à les recalculer de nouveau plus exactement

lorsque l'ensemble de tous les résultats aurait fait mieux connaître la valeur locale qu'il convient de lui attribuer. Mais, dans l'état actuel de la géodésie, ces valeurs du rayon R, très-peu différentes les unes des autres, sont déjà connues partout assez approximativement par les opérations déjà faites, pour qu'on puisse les employer de prime abord dans le calcul des termes correctifs, sans passer par le détour de la première évaluation que l'on obtiendrait en les négligeant; et cette conception, qui ne fait que prévenir les conséquences d'une rectification ultérieure, permet d'arriver directement aux résultats locaux définitifs, sans avoir l'inconvénient d'un cercle vicieux.

63. Il n'y a que deux cas où il devient indispensable d'avoir les valeurs locales de R ou de $D^{(0)}$ avec une plus grande exactitude. C'est lorsque, l'arc A étant donné en mesures linéaires, on veut en conclure l'angle au centre correspondant α en secondes, par son expression algébrique $\alpha = \frac{A}{R} R''$, sans le déterminer astronomiquement par la mesure de l'angle céleste compris entre les normales qui le contiennent; ou, réciproquement, lorsque α étant ainsi donné, on veut en conclure l'arc A par l'expression inverse $A = \frac{R\alpha}{R''}$. Alors, pour effectuer exactement de pareilles conversions, où le rayon local R entre avec toute sa valeur, il faut avoir préalablement déterminé la figure générale de la terre, avec assez d'universalité, comme de précision, pour pouvoir assigner théoriquement

$S_1 S_2$ de la *fig.* 11, pour obtenir l'arc $M_1 S_2$ du méridien de la dernière station qui est compris entre les mêmes parallèles terrestres. Cette recherche nous sera ultérieurement très-utile. Car un calcul exactement pareil se représente dans toutes les opérations analogues que nous aurons à considérer, non-seulement quand on arrive à leur terme final, mais même pour projeter sur le méridien les diverses portions d'arcs sphériques qui les composent, lesquels sont toujours plus ou moins obliques à cette direction.

Pour éviter les confusions de lignes, je reproduis séparément ici ce système d'arcs dans la *fig.* 12, en l'y plaçant sur la même sphère locale dont le rayon polaire est CP. J'y ajoute cette spécification de localité par anticipation, puisque, dans cette première épreuve, qui ne sera qu'approximative, nous pourrions considérer la surface terrestre régularisée comme étant absolument sphérique, et décrite avec un rayon constant. Mais il n'en coûtera pas plus de nous mettre, dès à présent, dans l'hypothèse plus générale d'une sphère osculatrice variable, sauf à voir si nous pourrons déterminer son rayon local avec une approximation suffisante pour l'usage que nous en voudrons faire, ou si nous devrons nous résoudre à négliger d'abord cette modification de localité. Ici, cette sphère sera caractérisée par la condition de se confondre sensiblement avec la surface terrestre dans la petite étendue superficielle où l'on a mesuré l'arc $S_1 S_2$, et d'avoir son rayon polaire CP parallèle à l'axe de rotation du ciel. Alors ce sera sur sa superficie que nous construirons le triangle sphérique $S_1 S_2 M_1$, dont le côté $S_2 M_1$ représentera la direction du méridien de S_2, avec lequel l'arc $S_1 S_2$ forme l'angle observé i. Quel que puisse être le rayon de cette sphère osculatrice, je le représente par R, en le concevant exprimé dans les mêmes espèces d'unités de longueur qu'on a employées pour mesurer l'arc $S_1 S_2$.

Maintenant, du point S_1, le plus boréal de l'oblique $S_1 S_2$, je mène, sur notre sphère, un arc de grand cercle $S_1 N$, perpendiculaire au méridien $S_2 M_1$. Le triangle polaire $PS_1 N$ ayant PS_1 pour hypoténuse, PN sera moindre que PS_1, parce que l'angle en P est nécessairement très-petit; et comme PM_1 est égal à PS_1, par construction, puisque les points S_2, M_1 doivent appartenir à un même

parallèle terrestre, M_1N sera situé sur le prolongement de S_2M_1, en se rapprochant du pôle, ainsi qu'on l'a représenté dans la figure. Cela posé, je vais d'abord calculer l'arc total S_2N. Je déterminerai ensuite la longueur de l'arc M_1N, par la condition que les deux points M_1, S_1 soient également distants du pôle sur leurs méridiens respectifs. Alors, $S_2N - M_1N$ sera la longueur cherchée de l'arc méridien S_2M_1.

Les trois arcs de grands cercles S_1S_2, S_1N, S_2N, forment sur notre sphère, dont le rayon est R, un triangle sphérique, rectangle en N, dans lequel on connaît l'hypoténuse S_1S_2, que je nomme A, avec l'angle adjacent S_1S_2N égal à $3^\circ 43' 30''$, que j'appellerai i. On cherche le côté S_2N que je désigne par A', et le côté S_1N que je désigne par Δ'. Pour ne pas introduire explicitement dans le calcul l'espèce particulière d'unités linéaires dans lesquelles l'arc A est exprimé, et qu'il faudrait aussi appliquer au rayon R, je mène idéalement, à partir du centre C, trois rayons, ou verticales, dirigées aux points S_1, S_2, N; puis je les coupe par une sphère concentrique à la première, et décrite d'un rayon égal à 1. Joignant les trois points d'intersection par des arcs de grands cercles, je forme ainsi, sur cette sphère centrale, un triangle sphérique semblable à S_1S_2N, dont je désigne les côtés respectivement homologues par α, α', δ', l'angle i étant commun. Lorsque α' et δ' seront connus en α et i, sur la sphère centrale, la proportionnalité des lignes homologues, dans les figures semblables, donnera évidemment

nière détermination équivaut à une erreur de $15^{T},8$ sur la longueur de l'arc d'où chaque degré partiel est conclu. Or, à l'époque où l'opération fut faite, les cercles répétiteurs français présentaient des imperfections qui permettaient difficilement de répondre de quantités angulaires aussi petites; et la distance polaire du zénith à Formentera, qui a été reprise en 1825, est peut-être la seule où l'on puisse espérer d'avoir obtenu la précision de $1''$. Le moyen le plus naturel de compenser ces incertitudes consiste à prendre une évaluation moyenne du degré terrestre entre toutes celles-là. Mais, pour le faire judicieusement, il faut employer ici un artifice pareil à celui que nous avons appliqué aux mesures du pendule, tome II, page 471. Car sachant, comme cela sera prouvé plus tard, que l'expression générale d'un degré terrestre $D^{(0)}$ est très-approximativement de la forme

$$D^{(0)} = A + B\cos^2 d,$$

A et B étant deux coefficients sensiblement constants pour une série de degrés qui se suivent sur une même portion de méridien de peu d'étendue, on en conclura, par le raisonnement dont nous avons fait alors usage, que la moyenne arithmétique entre les longueurs de ces degrés devra, abstraction faite de leurs irrégularités, répondre à une distance moyenne D du pôle au zénith, telle qu'on ait

$$\cos^2 D = \frac{1}{n}\Sigma\cos^2 d,$$

[redacted]

cèdent pas la troisième, pour rester dans les mêmes limites d'approximation, j'ai finalement

$$\alpha' = \alpha \cos i + \tfrac{1}{3}\alpha^3 \cos i \sin^2 i.$$

Opérant de même sur la deuxième des équations (s), j'exprime d'abord l'arc δ' par son sinus qui est donné, et, en me bornant toujours aux deux premiers termes du développement, j'ai

$$\delta' = \sin\alpha \sin i + \tfrac{1}{6}\sin^3\alpha \sin^3 i;$$

alors je remplace $\sin\alpha$ par son développement en α qui est dans les mêmes termes

$$\sin\alpha = \alpha - \tfrac{1}{6}\alpha^3;$$

et, en me restreignant toujours à la même limite d'approximation, j'obtiens finalement

$$\delta' = \alpha \sin i - \tfrac{1}{6}\alpha^3 \sin i \cos^2 i.$$

Maintenant, pour reporter ces résultats sur notre sphère osculatrice, dont le rayon est R, il faut y remplacer les arcs α, α', δ', par leurs valeurs $\frac{A}{R}$, $\frac{A'}{R}$, $\frac{\Delta'}{R}$. Alors un des facteurs $\frac{1}{R}$ disparaît des deux membres de chaque égalité comme leur étant commun, et l'on a

$$A' = A\cos i + \frac{1}{3}\frac{A^3}{R^2}\cos i \sin^2 i; \quad \Delta' = A \sin i - \frac{1}{6}\frac{A^3}{R^2}\sin i \cos^2 i.$$

Les premiers termes de ces expressions, qui forment la portion

que ces derniers termes peuvent être calculés avec toute la précision nécessaire, d'après la connaissance approximative que l'on a toujours du rayon R. Ici, en particulier, la petitesse de ce rapport est telle, qu'on peut le calculer sans erreur appréciable avec la valeur de R qui se déduirait du degré $D^{(0)}$, immédiatement évalué en résolvant le triangle $S_1S_2M_1$ comme rectiligne, et supposant que le côté S_1M_1 se confond avec la perpendiculaire S_1N. D'après ce que j'ai montré dans la note annexée à la page 55, cette détermination approximative donnerait, en pieds anglais, $D^{(0)}$ égal à $363781^{pds},81$; et de là on déduit, dans la même espèce de mesures,

$$R = \omega D^{(0)}; \quad \text{donc,} \quad \log R = \log\omega + \log D^{(0)} = 7,3189636.$$

Malgré la petite inexactitude qui peut affecter cette expression de R, elle nous suffira parfaitement pour calculer nos petits termes correctifs, comme je le prouve matériellement ici en note (*). En

---

(*) Pour confirmer matériellement l'assertion ici émise dans le texte, je vais calculer les termes correctifs de A′ et de Δ′, en attribuant à $D^{(0)}$ la valeur finale 363771^{pds}, qui se déduit de la mesure des arcs, après les réductions exactement faites. Je montrerai ensuite que ces mêmes termes s'obtiendraient sans différence appréciable, dans l'ordre de décimales qu'on y conserve, si on les calculait en prenant pour $D^{(0)}$ la première évaluation approximative $363781^{pds},81$; cela suffira pour faire disparaître toute apparence de cercle vicieux. Mais, en général, dans cette question comme dans toute autre, où l'on craindrait qu'une évaluation imparfaite de $D^{(0)}$ ne pût entraîner quelque erreur dans l'appréciation de termes correctifs, comme ceux que nous avons ici à considérer, on appliquerait d'abord aux arcs observés les corrections obtenues avec cette valeur imparfaite, ce qui conduirait à une seconde évaluation de $D^{(0)}$ beaucoup moins fautive, avec laquelle on calculerait de nouveau ces mêmes corrections; et si elles différaient sensiblement des premières que l'on avait obtenues, on recommencerait un troisième calcul pareil, puis un quatrième, jusqu'à ce qu'on n'y trouvât plus que des variations négligeables. Ici ces détours sont inutiles, comme on va le voir, à cause de la petitesse de l'angle i, qui rend la première approximation très-suffisante; et je n'y emploie la valeur exacte de $D^{(0)}$ que pour présenter le calcul definitif tel qu'on l'effectuerait, par une approximation finale, dans d'autres cas où l'on en aurait reconnu la nécessité.

Les données du calcul numérique seront donc ici

$A = 434011^{pds},6, \quad i = 3^{\circ}43'30'', \quad D^{(0)} = 363771, \quad \log\omega = 1,7581226334.$

Pour pouvoir l'effectuer avec les Tables de logarithmes à sept décimales, je

court que l'autre. Faisons généralement

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a}, \qquad \text{ce qui donnera} \qquad b = a(1-\varepsilon).$$

La lettre ε représente ce que l'on appelle d'ordinaire l'*aplatissement* de l'ellipse, par conséquent aussi celui de l'ellipsoïde qu'elle devra engendrer en tournant autour de son axe polaire PP_1 (*).

Faisons encore $$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

Le radical $\pm\sqrt{a^2-b^2}$ est l'excentricité OF ou OF_1 de l'ellipse. La lettre e représente donc ici le rapport de cette excentricité au demi-grand axe a.

Si l'on prend la valeur de b en a et ε, puis qu'on la substitue

(*) C'est la définition établie par Delambre, *Base du système métrique*, tome II, page 662, et il s'y est conformé dans tous les calculs de ce même ouvrage. Il l'a reproduite dans son *Traité d'Astronomie*, tome III, page 555. Elle a été adoptée par les auteurs qui ont écrit après lui sur la Géodésie; en conséquence, j'ai cru devoir m'y assujettir dans un ouvrage destiné aux applications pratiques. Mais je dois cependant avertir que cette définition de l'aplatissement n'est pas celle qu'ont employée les géomètres théoriciens, par exemple Laplace et Legendre. Le premier dans l'*Exposition du Système du monde*, chap. XIV, le second dans ses recherches sur la Trigonométrie spheroïdique, *Mémoires de l'Institut* pour 1806, page 142, appellent aplatissement le rapport $\frac{(a-b)}{b}$. Si l'on désigne celui-ci par ε', en continuant de représenter $\frac{a-b}{a}$ par ε, la condition d'égalité des valeurs de a et de b, tirées de ces deux notations, donnera

$$1-\varepsilon = \frac{1}{1+\varepsilon'}, \qquad \text{conséquemment} \qquad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

On voit ainsi que ε' surpasse ε, et que la différence est de l'ordre ε^2. Or, les termes de cet ordre, quoique très-faibles, ne sont pas toujours négligeables dans les opérations géodésiques, de sorte qu'il est bien essentiel d'y distinguer celle des deux définitions de l'aplatissement que l'on veut adopter pour l'énoncé des résultats.

dans l'expression de e^2, a disparaît, et il reste

$$e^2 = 2\varepsilon - \varepsilon^2,$$

les deux quantités e, ε sont donc toujours liées l'une à l'autre par cette relation.

Pour rendre sensibles les détails de notre figure type, j'y ai représenté le demi-axe a comme beaucoup plus long que le demi-axe polaire b. Mais, dans l'ellipse que nous voulons adapter aux méridiens terrestres, ces deux axes différeront très-peu l'un de l'autre, relativement à leur valeur totale, ce qui fait que les rapports ε, e^2 y seront exprimés par de très-petites fractions. Cela permet de calculer très-exactement et très-simplement ε, quand on connaît e^2 qui, ainsi qu'on le verra tout à l'heure, est donné immédiatement par la comparaison des différents degrés. En effet, si l'on tire ε de la relation précédente, en ne prenant que celle des deux racines qui lui donne une valeur très-petite de l'ordre e^2, on a

$$\varepsilon = 1 - (1 - e^2)^{\frac{1}{2}};$$

la petitesse de e^2, relativement à l'unité, permet de développer l'expression radicale en une série très-convergente, par la formule du binôme; et comme on a, en général,

$$(1 - u)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 - \tfrac{1}{16}u^3 - \tfrac{5}{128}u^4 \ldots,$$

en remplaçant u par e^2, il en résultera

[redacted]

axe aux points N_1, N_2, N_3,.... Je désignerai généralement par N les longueurs M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3,... des portions de chaque normale ainsi limitées. Tout cercle, qui a son centre sur ces normales, et qui aboutit à leur point de départ, est tangent à la courbe en ce point-là. Mais, pour chaque normale, il y en a un dans le nombre, dont le contact avec la courbe est plus spécialement intime, parce qu'il s'y prolonge jusque sur les deux éléments infiniment petits, situés immédiatement de part et d'autre du point de tangence. Celui-là se caractérise, en géométrie, par la dénomination très-expressive de *cercle osculateur* de la courbe, au point considéré. L'intimité particulière de son contact donne lieu au résultat suivant qui la rend sensible, et qui est représenté graphiquement, *fig.* 33. Soient LML une courbe plane quelconque, et, dans son plan, la droite TMT qui la touche en M. Par ce point, perpendiculairement à la tangente, menons dans le même plan la normale indéfinie MN, et plaçons sur elle, en C, le centre du cercle qui est osculateur en M. Si, par tout autre point C_1, C_2, pris sur la même normale, on décrit des cercles dont les rayons soient C_1M, ou C_2M, ces cercles toucheront encore la courbe en M. Mais tous ceux dont le centre C_1 sera situé entre le point C et le point M, seront intérieurs à la courbe autour du point de tangence comme AMA; et tous ceux dont le centre C_2 sera situé au delà du point C relativement à M, lui seront extérieurs comme BMB. Ceux-ci, dans le voisinage du point M, passeront toujours entre la courbe LML et sa tangente rectiligne, dont ils se rapprocheront sans cesse à mesure que leur rayon s'allongera; de sorte qu'elle sera leur limite extrême. Le cercle osculateur, décrit du point C, se maintiendra plus près de la courbe et la suivra plus longtemps qu'aucun de ceux-là.

147. Revenant à notre ellipse, représentée *fig.* 32, j'y définirai la direction de chaque normale, par l'angle M_1N_1P, M_2N_2P, M_3N_3P,... qu'elles forment avec l'axe polaire OP, et je nommerai généralement cet angle d, en le comptant, comme je viens de le dire, vers le pôle P, que je désignerai comme boréal. On verra tout à l'heure que cet angle d est réellement la distance angulaire du pôle au zénith, telle qu'on l'observerait sur l'ellipsoïde à partir du pro-

longement extérieur de la normale de l'ellipse, laquelle devient aussi la normale de la surface en chaque point. Mais je me borne à faire pressentir cette application ; et, considérant seulement ici les particularités propres à l'ellipse génératrice, j'y désignerai généralement par γ la longueur du rayon osculateur pour la distance angulaire d. J'appellerai aussi N la longueur de la normale correspondante, limitée à la rencontre de l'axe polaire. On démontre, dans les Traités de calcul différentiel, que N et γ ont les expressions suivantes (*) :

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \cos^2 d)^{\frac{1}{2}}}; \qquad \gamma = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \cos^2 d)^{\frac{3}{2}}}.$$

De là, on tire généralement

$$N = \gamma \frac{(1 - e^2 \cos^2 d)}{1 - e^2} = \gamma \left[1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \sin^2 d \right].$$

148. Dans toutes les ellipses que nous voulons considérer, a est plus grand que b, et le carré e^2 est une quantité positive très-petite comparativement à l'unité. Ainsi, dans ces ellipses, la normale N terminée au petit axe, comme nous l'avons admis, est toujours un peu plus grande que le rayon osculateur γ qui y correspond. C'est aussi ce que représente notre figure type, où les centres d'osculation propres à chaque normale sont désignés par C_1, C_2, C_3,.... Seulement, la nécessité où l'on s'est trouvé d'y mettre une grande disproportion entre les deux axes pour rendre ses dé-

et par suite, dans le même ordre d'approximation,

$$\cos x = 1 - \frac{2 \sin^4 \frac{1}{2} \delta'}{\tang^2 d' \cos^2 \delta'}.$$

Alors, si l'on substitue cette valeur de $\cos x$ au lieu de l'unité dans l'équation (1), et que l'on dégage de nouveau $\sin x$, on en obtiendra une seconde évaluation plus approchée, qui sera

$$\sin x = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta'}{\tang d' \cos \delta'} + \frac{2 \sin^4 \frac{1}{2} \delta'}{\tang^3 d' \cos^2 \delta'}.$$

Je bornerai cette expression aux quatrièmes puissances de $\sin \frac{1}{2} \delta'$, ce qui sera toujours plus que suffisant pour les applications, et même j'expliquerai tout à l'heure pourquoi je la pousse si loin. Alors il faudra faire $\cos \delta'$ égal à 1 dans le dénominateur de son second terme qui est déjà, par son numérateur, de l'ordre de petitesse auquel on veut s'arrêter. Mais, dans le premier terme, qui est seulement de l'ordre $\sin^2 \frac{1}{2} \delta'$, il faudra développer le facteur $\frac{1}{\cos \delta'}$ en $\sin \frac{1}{2} \delta'$ de la manière suivante :

$$\frac{1}{\cos \delta'} = \frac{1}{1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta'} = 1 + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta' + 4 \sin^4 \tfrac{1}{2} \delta', \text{ etc.}$$

Mais il faut s'arrêter aux deux premiers termes, puisque celui auquel le développement doit s'appliquer, comme facteur, est déjà de l'ordre $\sin^2 \frac{1}{2} \delta'$. On aura donc ainsi finalement

$$\sin x = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta'}{\tang d'} + 4 \left(1 + \frac{1}{2 \tang^2 d'}\right) \frac{\sin^4 \frac{1}{2} \delta'}{\tang d'}.$$

aux axes a et b de notre figure type, fait que la développée du quadrant PA a une étendue considérable et s'éloigne beaucoup du centre O. Cela était nécessaire pour rendre ces détails sensibles. Mais, dans les ellipses des méridiens terrestres, où b diffère très-peu de a, l'étendue de la développée est relativement beaucoup moindre et se rapproche beaucoup plus du centre O, dans lequel elle se rassemblerait tout entière si l'on faisait $b = a$, c'est-à-dire si l'ellipse devenait un cercle. En ce sens, on peut donc dire que la développée du cercle se réduit à un point unique qui est le centre même O (*).

151. Ceci va nous servir pour éclaircir une difficulté qui se présente continuellement dans le calcul des arcs méridiens, et à laquelle, je crois, on n'avait jamais fait attention. Soit $M_1 M_3$ un très-petit arc de méridien, dont $M_1 N_1$, $M_3 N_3$ représentent les normales extrêmes, et $M_2 N_2$ la normale au point moyen. Supposons cet arc assez restreint pour qu'on puisse le considérer comme se confondant sensiblement avec le contour du cercle qui serait osculateur en M_2, ce qui sera l'assimilation la plus exacte qu'on en puisse faire. C'est aussi celle que l'on emploie généralement pour évaluer les amplitudes angulaires des petits arcs de méridien, mesurés sur la surface terrestre. Nommons A la longueur de cet arc exprimé en toises, et ρ la longueur du rayon osculateur en M_2, exprimé dans la même espèce d'unités. L'angle $M_1 I M_3$, ou I, compris entre les deux normales extrêmes, est donné par les observations astronomiques. C'est la différence des distances angu-

affectent $\frac{A'}{R^3}$. On pourrait même concevoir mathématiquement des valeurs de d' assez petites pour que la série qui forme le développement de sin x devînt divergente, δ' étant donné. Mais les mesures d'arcs méridiens ne pourront jamais être faites assez près du pôle pour que ce cas se réalise; et, dans les opérations habituelles, il sera toujours facile de constater par notre formule si le terme en A^4 est sensible ou négligeable. C'est pour ce motif théorique que j'ai poussé le développement jusque-là; car, dans l'application particulière que nous allons en faire, il serait complétement inutile d'aller jusqu'aux A^4.

70. Pour réduire le second membre de cette formule en nombres, nous pouvons, comme dans l'évaluation de l'arc A' ou NS_2, attribuer à R la valeur de $\omega D^{(0)}$ qui nous a servi alors, et dans laquelle $D^{(0)}$ représente la longueur locale du degré du méridien déterminée par notre première approximation, ce qui nous a donné, en pieds anglais, page 75,

$$\log R = 7,3189636;$$

car, à la petitesse du rapport $\frac{A}{R}$, se joint encore ici celle du facteur $\sin^2 i$ qui multiplie les termes que nous voulons évaluer. Mais il faut aussi connaître l'angle d', qui est la distance du pôle au zénith, dans la station d'où l'on a mené l'arc Δ' perpendiculaire au méridien éloigné. Or, en revenant à la *fig.* 12, où cette station est désignée par S, on n'y a pas observé l'angle d', mais

est bien loin de faire, l'angle $M_1C_2M_3$, soutendu par l'arc A au centre du cercle osculateur, se trouve, en somme, égal à l'angle des deux normales, jusque dans les dernières limites d'évaluation appréciables, comme on l'avait toujours supposé, sans en avoir, je crois, la démonstration. Ce résultat sera établi dans une Note qui fait suite à la section présente. Le calcul, et la *fig.* 32 elle-même, s'accordent, en outre, à montrer que, pour des relations de position pareilles, les segments M_1I, M_3I des deux normales extrêmes sont sensiblement égaux entre eux, ainsi qu'au rayon osculateur moyen M_2C_2.

152. Notre ellipse génératrice étant ainsi bien étudiée, faisons-la tourner autour de son axe polaire PP_1 pour former l'ellipsoïde de révolution que nous voulons assimiler à la surface terrestre. Dans ce mouvement, tous les points de l'ellipse décriront simultanément des circonférences de cercle dont les rayons seront leurs distances respectives à l'axe polaire. Conséquemment, l'ellipsoïde ainsi constitué aura pour méridiens l'ellipse génératrice elle-même. Or, les normales de cette ellipse deviendront les normales de l'ellipsoïde en chaque point que l'on voudra considérer. Car, d'abord elles seront perpendiculaires à la tangente de l'ellipse en ce point, et elles seront ainsi perpendiculaires à la tangente transversale du cercle, mené en ce même point perpendiculairement au plan de rotation. Étant perpendiculaires à ces deux droites, elles le seront aussi au plan qui les contient, lequel sera tangent à l'ellipsoïde dans le point spécifié. D'après cela, les points situés dans

e commun, elles y poursuivront leur marche indéfinie, sans se encontrer jamais.

153. Ici j'ai besoin de rappeler un résultat géométrique, commun à toutes les surfaces dont la convexité est continue. Si, en un point quelconque d'une telle surface, on mène une normale au plan tangent, il y aura sur cette normale une longueur finie, dont chaque point pourra être le centre d'une sphère osculatrice au sphéroïde dans le lieu considéré. Mais le sens d'osculation de ces sphères, c'est-à-dire celui où elles ont avec la surface du sphéroïde un contact du second ordre, sera différent, selon le point où l'on aura placé leur centre. Dans l'intervalle de la normale ci-dessus spécifié, il y a toujours deux de ces sens, rectangulaires entre eux, pour l'un desquels le rayon de courbure est le plus grand, et l'autre le moindre de tous ceux qui aboutissent au même point de la surface. Si, autour de ce point, on cherche la suite des centres de courbure qui ont cette propriété de maximum ou de minimum, on les trouve placées sur deux surfaces réglées, qui se croisent rectangulairement au point désigné. Ces deux surfaces sont formées par la série des normales infiniment voisines, qui se coupent mutuellement, d'abord avec la normale primitive, puis chacune successivement, avec une des normales suivantes. Leur intersection avec le sphéroïde considéré y trace deux lignes courbes, que l'on appelle ses lignes de plus grande ou de moindre courbure, selon qu'elles contiennent le système de rayons osculateurs maximum ou minimum autour du point de départ. Et on les reconnaît sur chaque sphéroïde par la géométrie ou par le calcul, d'après ce caractère d'intersections mutuelles, propre au système des normales qui les composent; car il leur est spécial.

154. Cela va nous les faire aisément apercevoir dans notre ellipsoïde de révolution. D'abord, l'ellipse génératrice est évidemment une de ces lignes. En effet, sur chaque méridien, les normales successives menées en ses divers points s'entrecoupent nécessairement dans son plan, puisqu'elles y ont des directions diverses. Les circonférences des parallèles nous offriront l'autre ligne de courbure. Car les normales menées aux divers points d'un même parallèle sont les arêtes rectilignes d'un cône droit ayant son centre sur

l'axe polaire, où elles s'entrecoupent ainsi mutuellement. Les portions de chaque normale comprises entre chaque point de l'ellipsoïde, et leur point d'intersection de l'axe polaire, constituent donc les rayons osculateurs propres à ce second système de courbure. Aussi est-il rectangulaire à l'autre, conformément à la règle générale, en chaque point de l'ellipsoïde que l'on veut considérer. Il ne reste plus qu'à savoir sur lequel des deux systèmes se trouvent les plus grands ou les plus petits rayons osculateurs propres à chaque point. Or cela est encore très-facile. En effet, si l'on désigne par N les longueurs des segments de chaque normale terminés à l'axe polaire, et par γ le rayon osculateur de l'ellipse, pour une même distance polaire d, nous avons trouvé généralement, page 186,

$$N = \gamma\left(1 + \frac{e^2}{1 - e^2}\sin^2 d\right).$$

Dans notre ellipsoïde, e^2 étant une fraction positive moindre que 1, N est toujours plus grand que γ pour un même point. Ainsi, sur chaque normale, le plus petit de tous les rayons osculateurs de l'ellipsoïde est γ; le plus grand est N. Leur différence $N - \gamma$, ou $\frac{\gamma e^2}{1 - e^2}\sin^2 d$, exprime la longueur du segment de la normale qui contient tous les centres d'osculation divers, propres à un même point; et cet intervalle, pour chaque distance polaire donnée, est une fraction de γ d'autant plus petite que e^2 est moindre, de sorte que sur une sphère rigoureuse il devient nul avec e^2. Ce sont les conséquences particulières de la proposition générale énoncée plus

de sorte que $A^{(0)}$ représentera généralement l'arc A, transformé en degrés sexagésimaux du cercle quelconque auquel il appartient. Je ne ferai d'exception à cette règle que pour l'expression $D^{(0)}$ par laquelle je continuerai de désigner l'arc qui occupe un degré de la graduation sexagésimale, sur les grands cercles de la sphère localement osculatrice à la surface terrestre, dans le sens du méridien, en chaque lieu que l'on voudra considérer. Alors, si A est aussi un arc de grand cercle appartenant à cette même sphère, $\frac{A}{D^{(0)}}$, ou $A^{(0)}$, sera la valeur angulaire de l'arc A, exprimé en parties de la même graduation.

74. Le calcul de l'angle ρ que je viens d'exposer, me fournit l'occasion de justifier une particularité que j'ai annoncée plus haut comme étant, non pas indispensable, mais très-utile à établir dans la distribution définitive des centres de nos sphères tangentes. Pour la considérer dans les réalités auxquelles elle se rattache, admettons d'avance que la surface générale de la terre pourra, dans ce qu'elle a de régulier, être représentée, avec toute l'exactitude que l'on peut atteindre, par un ellipsoïde de révolution dont l'axe polaire coïncide avec l'axe polaire de la sphère céleste, ce que l'on verra plus loin être en effet le résultat final où l'on est conduit. Nous venons de diriger ici le rayon polaire CP de notre sphère tangente vers les pôles célestes. Il sera donc parallèle à l'axe polaire de l'ellipsoïde par cette condition. Mais si le centre C de la sphère est placé en quelque point que ce soit, hors de ce même axe, le pôle sphérique P lui sera aussi extérieur; et alors les méridiens sphériques menés de

des degrés, rapportées dans notre tableau de la page 181, représentent autant de petits arcs du méridien terrestre, soutendant chacun un angle de 1° au centre du cercle qui est osculateur à ce méridien, même dans les lieux où ils ont été individuellement mesurés. Mais ils ont été conclus de triangulations dont nous avons considéré toutes les parties comme appliquées sur des sphères de rayons progressivement variables, et transversalement osculatrices au méridien terrestre, ce qui suppose ces rayons égaux aux segments N des normales, et non pas aux rayons osculateurs γ de l'ellipse. N'y a-t-il pas une contradiction logique entre ces deux manières d'envisager successivement les mêmes résultats?

Pour résoudre cette difficulté, qui n'est qu'apparente, il faut revenir un moment sur la marche des calculs qui nous ont donné les longueurs des arcs. Nous avons d'abord l'arc de Pensylvanie, où elle a été déterminée par une mensuration immédiate. En divisant cette longueur par l'amplitude angulaire de l'arc céleste compris entre ses normales extrêmes, nous avons, sans nous en rendre compte alors, obtenu le même résultat que si nous l'eussions placé sur le cercle osculateur local de l'ellipse méridienne, puisque, en raison de sa petitesse, il aurait soutendu au centre de ce cercle le même angle que nous avons employé. Quant aux longueurs des arcs méridiens qui ont été déduites des triangulations, si on les suppose calculées par le théorème de Legendre, la connaissance des rayons osculateurs consécutifs sur le réseau des triangles ne devient nécessaire que pour évaluer la portion d'arc méridien comprise entre le dernier nœud de la méridienne et le parallèle de la dernière station

place virtuellement sur le cercle qui serait osculateur à l'ellipse dans sa partie moyenne, et l'on obtient ainsi la longueur de l'arc $D^{(0)}$, qui soutendrait au centre de ce cercle un angle de 1°. Si l'arc total paraît trop grand pour pouvoir être légitimement appliqué sur un même cercle osculateur local de l'ellipse, on le subdivise en portions plus petites, aux extrémités desquelles on détermine astronomiquement les distances angulaires du pôle du zénith, comme on l'a fait dans l'opération de France et d'Espagne. On peut alors y calculer séparément les longueurs du degré propres à chaque cercle osculateur de l'ellipse, qui aurait son point de contact au milieu de leurs parties diverses. Ainsi ces déterminations atteignent, sans cercle vicieux logique, toute l'exactitude que l'on peut attendre d'opérations pratiquement réalisées.

Si nous considérons maintenant les longueurs d'arcs méridiens qui se déduisent des mêmes triangulations par la méthode de Delambre, les rayons des sphères sur lesquelles on applique successivement les côtés des triangles pour en déduire les segments de méridien compris entre les parallèles de deux stations consécutives, servent seulement pour l'évaluation des termes correctifs, où ils entrent explicitement avec leurs valeurs absolues, et aussi comme éléments de calcul, 1° pour transporter les azimuts d'une station à une autre; 2° pour obtenir les distances du pôle au zénith propres à chaque station dans le premier mode de leur emploi. La petitesse des termes auxquels ils s'appliquent, permettrait de leur attribuer sans erreur appréciable, sur toute l'étendue de la triangulation, une longueur commune, par exemple celle qui résulte de l'arc de Pensylvanie. Quant à la correction que les azimuts exigent, nous avons montré qu'elle est rendue insensible par le sens d'osculation transversal attribue aux sphères successives, jointe à la petitesse de l'angle formé à chaque station entre la normale vraie et le rayon de la sphère osculatrice précédente dans un ellipsoïde de révolution presque sphérique. A la vérité, ce même angle entre avec toute sa valeur dans la réduction qu'il faut faire aux distances d' du pôle au zénith calculées sur la sphère, pour les rapporter à la normale réelle de la nouvelle station où on les transporte. Mais cette réduction est toujours si petite sur l'étendue restreinte d'une même

triangulation, qu'on pourrait la négliger presque sans erreur dans les termes correctifs qui seuls la contiennent. Pour le montrer, il suffira de dire par avance, que, sur l'arc total de France et d'Espagne qui embrasse une amplitude totale de 12°48′47″, l'angle formé par la dernière normale avec la sécante menée du centre de la première sphère osculatrice, au point correspondant de la surface réelle, est moindre que 3′56″, comme je le prouverai plus tard. De sorte que l'on obtiendrait encore les valeurs individuelles des termes correctifs, avec des erreurs presque nulles, ou même insensibles, en négligeant ses variations intermédiaires, ce qui reviendrait à calculer ces termes, comme si tout le réseau entier était appliqué sur la sphère localement osculatrice à la première station. Or la longueur totale de l'arc méridien comprise entre les parallèles des stations extrêmes étant ainsi obtenue exactement, son application sur les cercles localement osculateurs dans le sens de l'ellipse se fait sans erreur en divisant sa totalité, ou ses diverses portions, par l'amplitude céleste qu'elles embrassent, et que l'observation donne, rapportées aux normales vraies de leurs points extrêmes. Ce mode de calcul, de même que le précédent, n'impliquent donc pas de cercle vicieux logique, mais seulement l'emploi des approximations successives dont l'application est universelle dans l'astronomie. Même au point où se trouve aujourd'hui la géodésie, ces approximations peuvent être converties de prime abord en résultats définitifs, la forme générale de la surface terrestre étant assez bien connue pour que l'on puisse, si on le juge convenable, calculer très-exactement toutes ces petites réductions que j'ai supposé

côtés du méridien de celui-là, à peu de distance, tels que de chacun d'eux on puisse voir un certain nombre des précédents et des suivants, dans la chaîne de triangles que l'on veut établir, sauf à rectifier ces premiers aperçus par d'autres choix, si un examen plus immédiat des localités faisait reconnaître des difficultés ou des impossibilités qu'on n'aurait pas prévues. Les *stations*, ainsi adoptées, seront, par leur destination même, des sommets de montagnes, de collines, d'édifices publics, élevés au-dessus des obstacles qui pourraient arrêter la vision intermédiaire. Il faut aussi que les droites qui les joignent ne forment pas entre elles des angles trop aigus, afin que les côtés des triangles qu'elles sont destinées à former, et qu'on devra conclure les uns des autres, soient exempts des incertitudes que l'acuité des angles y introduirait. Ce plan arrêté, l'observateur se transporte successivement aux trois sommets du premier triangle, désignés par S, S_1, S_2, *fig.* 13. Il y établit des signaux fixes qui sont, par exemple, de grands disques blancs à centre noir; ou encore, des lampes à courant d'air abritées sous une tente, et munies de réflecteurs métalliques postérieurs, que l'on tourne successivement vers les autres stations d'où l'on veut les observer. Ces signaux doivent être fixés invariablement à des supports solides, et l'on détermine avec grand soin le pied de la verticale qui passe par leur centre de visibilité. Cela s'effectue à l'aide d'un fil-à-plomb, que l'on fait descendre de ce centre sur une plaque métallique horizontale, portée par un pieu enfoncé dans le sol; et, sur cette plaque, on marque le point précis auquel la verticale du centre du signal vient aboutir. Ce point

toujours être supposées faites dans la verticale même du centre S. Lorsque l'instrument employé est un cercle répétiteur portatif, l'observateur mesure d'abord l'angle plan a, compris entre les signaux S_1,S_2, ou plutôt entre leurs images réfractées Σ_1, Σ_2, telles qu'il les voit à travers la portion de l'atmosphère interposée; et, immédiatement après, ou dans des circonstances atmosphériques, autant qu'il le peut, semblables, il mesure aussi les distances apparentes z_1, z_2 de ces images, à son zénith Z. Les droites $S\Sigma_1$, $S\Sigma_2$, menées de S à ces images, sont les dernières tangentes des trajectoires lumineuses qui, partant des points S_1, S_2, sont amenées dans l'œil de l'observateur en S par la réfraction. Elles diffèrent donc des droites visuelles directes SS_1, SS_2, qui seraient menées de S à ces points à travers le vide. Elles sont généralement un peu plus élevées, parfois cependant un peu moins élevées que ces rayons directs. Mais, à moins d'accidents très-rares, qui sont toujours indiqués par une excessive déformation des images, et pendant lesquels on a soin de ne pas hasarder les observations, les deux trajectoires lumineuses parties de S_1 et de S_2 se forment dans les plans ZSS_1, ZSS_2 qui passent par ces points et la verticale du point S; de sorte que l'angle oblique $\Sigma_1 S \Sigma_2$, ou a, compris entre les tangentes extrêmes $S\Sigma_1$, $S\Sigma_2$, est alors constamment limité par ces mêmes plans.

76. Pour voir l'emploi que l'on peut faire de ces résultats, supposons d'abord que les distances zénithales z_1, z_2 des deux tangentes, et l'angle a qu'elles comprennent, aient été mesurés simultanément, ou dans des états réguliers et rigoureusement identiques de la portion d'atmosphère interposée, ce qui aura les mêmes conséquences. On en pourra conclure l'angle dièdre A compris autour du zénith de S, entre les deux plans S_1SZ, S_2SZ, menés par les deux signaux et par la verticale de ce point. En effet, du point S comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivez idéalement une sphère, qui coupera la verticale de S en Z, et en σ_1, σ_2, les tangentes finales des trajectoires lumineuses, sur la direction desquelles se voient les images Σ_1, Σ_2. Alors, dans le triangle sphérique $Z\sigma_1\sigma_2$, on connaîtra les deux côtés verticaux z_1, z_2, et le côté oblique a. On pourra donc en déduire l'angle dièdre A,

formé en Z ; car il sera lié aux trois côtés z_1, z_2, a du triangle par l'équation générale

$$(1) \qquad \cos a = \sin z_1 \sin z_2 \cos A + \cos z_1 \cos z_2,$$

ou encore

$$\cos a = \cos(z_2 - z_1) - 2 \sin z_1 \sin z_2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A.$$

Remplacez, dans celle-ci, $\cos a$ et $\cos(z_2 - z_1)$ par leurs valeurs équivalentes $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} a$, $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}(z_2 - z_1)$, puis dégagez $\sin^2 \frac{1}{2} A$, elle donnera

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} a - \sin^2 \frac{1}{2}(z_2 - z_1)}{\sin z_1 \sin z_2};$$

ou, en transformant le second membre en produits, pour le rendre plus propre au calcul logarithmique,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + z_1 - z_2) \sin \frac{1}{2}(a + z_2 - z_1)}{\sin z_1 \sin z_2}.$$

C'est la formule déjà rapportée, tome II, page 401, pour trouver directement les angles d'un triangle sphérique dont on connaît les trois côtés. Mais cette manière d'obtenir l'angle A n'est pas, à beaucoup près, la plus commode pour l'application que nous avons en vue, parce que le calcul absolu qu'elle exige devrait être fait avec une rigueur qui deviendrait fatigante, dans la succession nombreuse d'opérations de ce genre qu'exige une grande triangulation. Or, on peut arriver au même but, avec moins de soin et plus de sûreté, en profitant des moindres circonstances spéciales dans lesquelles nos triangles sont établis. En effet, les deux signaux S_1, S_2

On pourrait pousser plus loin ce développement, mais on verra tout à l'heure que cela serait inutile. Pour en abréger l'expression, je fais

$$\Sigma = \tfrac{2}{3}\mu + \tfrac{1}{10}\mu^2 + \tfrac{1}{21}\mu^3 + \tfrac{1}{28}\mu^4 \ldots ; \qquad \text{d'où} \qquad \left(\frac{D_2^{(0)}}{D_1^{(0)}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 - \Sigma.$$

Ceci étant substitué dans le premier membre de notre équation, il s'y forme la différence $\cos^2 d_1 - \cos^2 d_2$ qui se peut transformer en $\sin(d_2 + d_1)\sin(d_2 - d_1)$, produit qui sera toujours positif, puisque d_2 est supposé plus grand que d_1. Cette réunion étant faite, l'équation prendra cette forme :

$$(2) \qquad e^2[\sin(d_2 + d_1)\sin(d_2 - d_1) + \Sigma\cos^2 d_2] = \Sigma.$$

Il ne restera donc plus qu'à en tirer numériquement e^2. Or, cela sera facilité par cette circonstance, que Σ se trouvera toujours être une fraction très-petite, non pas seulement en comparaison de l'unité, mais en comparaison du produit des deux sinus qui forme la première partie du coefficient de e^2. Cela permettra d'effectuer ce calcul par les Tables ordinaires de logarithmes à sept décimales, comme on va tout à l'heure s'en convaincre. Seulement, pour n'avoir pas à opérer sur de trop petits nombres, et aussi pour obtenir des valeurs de e^2 qui ne soient pas trop fortement affectées par les erreurs qui ont pu être commises dans les évaluations des deux degrés comparés, il faudra les prendre à des distances polaires d_1, d_2 différentes l'une de l'autre, ce qui rendra le rapport μ notablement plus assuré.

les différents produits dont ce développement se composent, devraient être évalués avec des soins fatigants de précision. Ces difficultés s'éludent en cherchant d'abord à obtenir $\log a$, au lieu de a. En effet, si l'on prend les logarithmes tabulaires des deux membres de l'équation, il en résulte

$$\log a = \log D^{(0)} + \log\left(\frac{180}{\varpi}\right) + \tfrac{3}{2}\log(1 - e^2\cos^2 d) - \log(1 - e^2);$$

le rapport $\frac{180}{\varpi}$ s'est déjà présenté fréquemment dans nos calculs. C'est celui que nous avons nommé par abréviation ω, et, en bornant l'évaluation de son logarithme à dix décimales, nous avons trouvé

$$\log\left(\frac{180}{\varpi}\right) = 1{,}7581226324.$$

Je suppose que l'on prenne le $\log D^{(0)}$ dans les mêmes limites de précision : ce sera le seul de la formule qui exigera ce soin. Car, pour les autres qui contiennent e^2, on les obtiendra, par le développement de leur expression logarithmique, en séries régulières, dont tous les termes seront très-aisément calculables. En effet, si l'on nomme k le module direct des Tables ordinaires pour lequel on a

$$\log k = \bar{1}{,}6377843113, \qquad \text{et} \qquad \log\left(\tfrac{3}{2}k\right) = 1{,}8138755704,$$

le développement connu de $\log(1 - x)$ donnera ici

$$\begin{aligned} \iota = \log D^{(0)} + \log\left(\frac{180}{\varpi}\right) &- \tfrac{3}{2}k\left(e^2\cos^2 d + \tfrac{1}{2}e^4\cos^4 d + \tfrac{1}{3}e^6\cos^6 d + \tfrac{1}{4}e^8\cos^8 d \ldots\right) \\ &+ k\left(e^2 \quad + \tfrac{1}{2}e^4 \quad + \tfrac{1}{3}e^6 \quad + \tfrac{1}{4}e^8 \ldots\right), \end{aligned}$$

expression très-simple dont la loi est évidente, et dans laquelle tous les termes dépendants de e^2 pourront se calculer par les Tables ordinaires, à sept décimales, avec une suffisante précision. Si l'on voulait prétendre à un peu plus de rigueur numérique, il faudrait calculer, avec dix décimales seulement, les deux termes qui dépendent de la première puissance de e^2, auquel cas il faudrait

angles h_1, h_2 répondaient au même état atmosphérique que la moyenne des angles a. Admettons, comme cela arrivera sans doute, que cette identité d'état moyen ne soit pas tout à fait rigoureuse; au moins, d'après le principe des compensations, elle aura lieu approximativement. Alors les valeurs moyennes de h_1 et de h_2 ne différeront que très-peu des véritables; et comme leur influence absolue sur le terme correctif est extrêmement petite, dans les conditions que nous avons supposées, une très-faible altération de leurs valeurs ne pourra y produire que des changements insensibles. L'expérience confirme cette induction; car lorsqu'on a fait, dans une même station, un grand nombre de mesures des angles a, h_1, h_2, avec les précautions prescrites ci-dessus pour éviter les cas de trop grandes perturbations de l'atmosphère, si l'on partage les résultats en plusieurs moyennes qui se correspondent, et qu'on les emploie séparément au calcul de l'angle dièdre A, par la formule (2), on ne trouve entre ses valeurs que des différences tellement petites et accidentées, qu'elles rentrent dans les limites des erreurs dont on ne peut répondre dans les observations faites avec le plus de soin.

79. La réduction à l'horizon n'a plus besoin d'être calculée quand on observe l'angle entre les objets avec l'instrument appelé *théodolite*, dont le type général a été représenté dans le tome II, *fig.* 81. Le plan de son limbe porte des niveaux croisés rectangulairement, dont les indications servent pour le rendre horizontal. Les deux lunettes adaptées à ce limbe, l'une inférieure, l'autre supérieure, peuvent parcourir son contour de manière à embrasser tous les angles que l'on veut mesurer; et elles ont aussi chacune un mouvement de course peu étendu dans un plan perpendiculaire au limbe, qui permet de les pointer sur des objets situés à peu de distance au-dessus ou au-dessous de l'horizon, sans qu'il cesse lui-même d'être horizontal. Quand on veut prendre l'angle compris entre deux signaux S_1, S_2, on dirige d'abord la lunette inférieure sur un objet fixe quelconque qui servira de point de repère, et on la fixe elle-même au limbe par ses pièces d'attache; de sorte qu'on prévient tout mouvement horizontal que celui-ci pourrait prendre, soit en constatant qu'elle reste toujours sur son

Si dans cette formule on fait $d = 90^\circ$, elle donnera le degré équatorial ; je le représente par $D_q^{(0)}$. Si l'on y fait $d = 0$, elle donnera le degré polaire ; je le représente par $D_p^{(0)}$; on aura ainsi

$$\log D_q^{(0)} = \log a - \log\left(\frac{180}{\varpi}\right) - k(e^2 + \tfrac{1}{2}e^4 + \tfrac{1}{3}e^6 + \tfrac{1}{4}e^8 \ldots),$$

$$\log D_p^{(0)} = \log a - \log\left(\frac{180}{\varpi}\right) + \tfrac{1}{2}k(e^2 + \tfrac{1}{2}e^4 + \tfrac{1}{3}e^6 + \tfrac{1}{4}e^8 \ldots),$$

et généralement

$$\log D^{(0)} = \log D_q^{(0)} + \tfrac{3}{2}k(e^2\cos^2 d + \tfrac{1}{2}e^4\cos^4 d + \tfrac{1}{3}e^6\cos^6 d + \tfrac{1}{4}e^8\cos^8 d \ldots).$$

Ainsi, lorsqu'on aura calculé le logarithme du degré équatorial dans l'ellipse obtenue, on aura celui qu'elle assigne pour toute autre distance polaire donnée d, en calculant la partie corrective qui s'ajoute à ce premier résultat. On verra tout à l'heure que, dans l'ellipse terrestre, la petitesse de e^2 fait que les trois premiers termes suffisent toujours. Ce développement équivaut à celui que nous avons déduit dans la page 197 de l'expression explicite de $D^{(0)}$, en y supposant connue la longueur du degré équatorial, qui est un de ses facteurs.

163. J'emploierai d'abord ces formules pour combiner le degré du Pérou avec le degré moyen de France et d'Espagne. D'après notre tableau de la page 181, les données du calcul seront

$$D_2^{(0)} = 56736^{\mathrm{T}},81; \qquad d_2 = 88^\circ\,28'\,59'';$$

$$D_1^{(0)} = 57024^{\mathrm{T}},64; \qquad d_1 = 43^\circ\,51'\,54'';$$

de là on tire $\dfrac{D_2^{(0)}}{D_1^{(0)}} = 1 - \dfrac{287,83}{57024,64} = 1 - \mu$;

et, en calculant μ par les Tables de logarithmes à sept décimales, avec le seul soin d'évaluer directement les parties proportionnelles par division ou multiplication des différences totales, on trouve

$$\log \mu = \bar{3},7030735, \qquad \mu = 0,0050474674.$$

Si l'on avait évalué μ par la division arithmétique rigoureuse, on aurait trouvé seulement 2 unités de moins sur la dernière décimale. Or, déjà une unité de l'ordre 0,00000001, dans le rapport μ, ne donnerait pour résultat, dans la reproduction de $D_2^{(0)}$, que $0^T,00057064$, c'est-à-dire des demi-millièmes de toise, fraction bien inférieure à celles dont on peut répondre sur de semblables mesures. L'évaluation de $\log \mu$ et de μ par les Tables de logarithmes à sept décimales est donc ici parfaitement suffisante pour représenter les résultats réels des observations, et je n'aurai plus besoin de répéter cette remarque dans les autres cas pareils.

μ étant connu, il faut former la fonction Σ par son expression

$$\Sigma = \tfrac{2}{3}\mu + \tfrac{1}{9}\mu^2 + \tfrac{4}{81}\mu^3 + \tfrac{7}{243}\mu^4 \ldots.$$

Le premier s'évaluera directement, et les suivants se calculeront par les logarithmes ordinaires. On aura ainsi, en exagérant l'appréciation des décimales, pour ce premier exemple :

$$\begin{aligned}
\tfrac{2}{3}\mu &= 0{,}00336\ 49782\ 6 \\
\tfrac{1}{9}\mu^2 &= 0{,}00000\ 28307\ 7 \\
\tfrac{4}{81}\mu^3 &= 0{,}00000\ 00063\ 5 \\
\tfrac{7}{243}\mu^4 &= 0{,}00000\ 00000\ 2 \\
\hline
\Sigma &= 0{,}00336\ 78154\ 0 \qquad \log \Sigma = \overline{3}{,}52734\ 83.
\end{aligned}$$

Maintenant il faut former l'équation

[redacted]

On tire donc de là

$$e^2 = \frac{0,00336\,78154}{0,51910\,58126}; \quad \log e^2 = \bar{3},81209\,24; \; e^2 = 0,00648\,77239.$$

En effectuant directement la division arithmétique, on obtiendrait 3 unités de plus sur la dernière décimale, ce qui dépasse de bien loin les quantités dont on peut répondre dans les données primitives, et ne produirait aucune différence appréciable sur les résultats réels. On voit que le second terme du coefficient de e^2 se trouve ici fort petit, comparativement au premier, et il en sera toujours de même dans les autres cas d'après son facteur $\cos^2 d_2$, parce que les opérations ne seront jamais effectuées très-près du pôle. Cela suggère une autre manière plus prompte de calculer la fraction qui exprime e^2. En effet, si l'on représente par A et B les deux parties de son coefficient, on pourra la transformer de la manière suivante :

$$e^2 = \frac{\Sigma}{A+B} = \frac{\frac{\Sigma}{A}}{1+\frac{B}{A}} = \frac{\Sigma}{A} - \left(\frac{\Sigma}{A}\right)\left(\frac{B}{A}\right) + \left(\frac{\Sigma}{A}\right)\left(\frac{B}{A}\right)^2 \text{ etc.};$$

et, en effectuant le calcul de la série par les logarithmes à sept décimales déjà obtenus, on trouve, en se bornant aux deux premiers termes,

$$\frac{\Sigma}{A} = \quad 0,00648\,775373$$

$$-\left(\frac{\Sigma}{A}\right)\left(\frac{B}{A}\right) = -\,0,00000\,002950$$

conséquemment $\quad e^2 = \quad 0,00648\,77242$

Les termes ultérieurs seraient évidemment insensibles. Cette évaluation s'accorde avec celle que nous avons trouvée plus haut dans les limites de différences négligeables que j'ai indiquées.

164. Connaissant e^2, nous pouvons calculer le logarithme du

limite; car, si ω était nul, ils seraient aussi égaux à 90°, puisque les points x, t, t_2 se trouveraient alors tous trois dans un plan perpendiculaire à la droite CS_1M. Pour rappeler cette circonstance, je désigne ceux-ci par des dénominations analogues, en faisant

$$mS_1x = 90^\circ + \omega; \qquad mS_1t = 90^\circ + \theta; \qquad mS_1t_2 = 90^\circ + \theta_2.$$

θ et θ_2 peuvent aisément s'évaluer. En effet, les triangles sphériques mxt, mxt_2 sont évidemment rectangles en x, par notre construction. Or on connaît, dans chacun d'eux, le côté commun mx ou $90^\circ + \omega$, et le côté tx, ou t_2x, qui ont respectivement pour valeurs i et $i + A_1$. On aura donc les hypoténuses mt, mt_2 par les relations établies au deuxième cas des triangles sphériques rectangles de Legendre, lesquelles donneront ici

$$\cos mt = \cos mx \cos tx, \qquad \cos mt_2 = \cos mx \cos t_2x,$$

et, en remplaçant les arcs par les angles au centre qu'ils soutendent,

$$\sin\theta = \sin\omega\cos i, \qquad \sin\theta_2 = \sin\omega\cos(i + A_1).$$

Il nous sera tout à l'heure utile de connaître aussi les inclinaisons des mêmes hypoténuses sur le plan de l'angle A_1; ce sont les angles dièdres mtx, mt_2x, formés aux sommets t, t_2 de nos deux triangles. Je les désigne par ces lettres mêmes, et comme ils devront pareillement différer très-peu de 90°, je fais

$$t = 90^\circ + \tau, \qquad t_2 = 90^\circ + \tau_2.$$

Or, le même passage de Legendre, appliqué à ces angles, donne

$$\operatorname{tang} t = \frac{\operatorname{tang} mx}{\sin tx}, \qquad \operatorname{tang} t_2 = \frac{\operatorname{tang} mx}{\sin t_2x};$$

de là on tire

$$\operatorname{tang}\tau = \operatorname{tang}\omega\sin i; \qquad \operatorname{tang}\tau_2 = \operatorname{tang}\omega\sin(i + A_1).$$

85. Nous supposons ω un très-petit angle; il peut être rendu aussi petit que l'on voudra en rapprochant suffisamment les trois sommets S, S_1, S_2, puisqu'il serait évidemment nul si on les rapprochait jusqu'à les mettre en coïncidence. Faisons-le seulement tel

Termes négatifs.	Termes positifs.
$\frac{1}{2}ke^2\cos^2 d = 0,00000\,296183$	$ke^2 = 0,00281\,75831$
(Les suivants sont négligeables.)	$\frac{1}{2}ke^4 = 0,00000\,91398$
	$\frac{1}{3}ke^6 = 0,00000\,00395$
	$\frac{1}{4}ke^8 = 0,00000\,00002$
Somme des termes positifs.....	$+0,00282\,67626$
Somme des termes négatifs.....	$-0,00000\,29618$
Excès positif à joindre à la partie principale de log a.....	$+0,00282\,38008$

C'est le nombre que j'ai employé.

165. J'effectue maintenant le même calcul de log a avec le degré moyen de France et d'Espagne. Ici les données seront

$$D^{(0)} = 57024^{T},64, \qquad \text{et} \qquad d = 43^{\circ}51'54'',$$

ce qui donne $\log\cos^2 d = \bar{1},71583\,96.$

Alors, en opérant comme tout à l'heure, je prends d'abord.....	$\log D^{(0)} = 4,75606\,25522$
	$\log\left(\frac{180}{\varpi}\right) = 1,75812\,26324$
Partie principale de log a.....	$6,51418\,51846$
Termes correctifs dépendants de e^2..	$+0,00062\,61636$
Ce qui donne.....	$\log a = 6,51481\,13482$

Les termes positifs qui dépendent de e^2 sont les mêmes que précédemment. Mais les négatifs sont plus sensibles, parce qu'ici $\cos^2 d$ est beaucoup moindre. En voici le détail, où je me borne aux trois premiers termes, parce que les suivants sont négligeables :

$$\frac{3}{2}ke^2\cos^2 d = 0,00219\,68864$$

$$\frac{3}{2}k\frac{e^4}{2}\cos^4 d = 0,00000\,37043$$

$$\frac{3}{2}k\frac{e^6}{3}\cos^6 d = 0,00000\,00083$$

Somme des termes négatifs. $-0,00220\,55990$

Ceci nous montre déjà que l'angle dièdre A'_1 ne différera de A_1 que par une quantité toujours moindre que $\frac{\omega^2}{2R''}$, puisque ce coefficient sera encore affaibli par les facteurs trigonométriques qui le multiplient, lesquels sont essentiellement fractionnaires. Si donc nous restreignons assez le triangle terrestre SS_1S_2 pour que $\frac{\omega^2}{2R''}$ ne soit qu'une fraction de seconde négligeable, ces deux angles pourront être substitués l'un à l'autre dans les applications où ils devront entrer. Afin d'apprécier les limites d'amplitude de ω qui satisferaient à cette condition, supposons-le égal à $40''$: alors ω^2 sera 1600; et, d'après la valeur de $\log R''$ donnée plus haut, nous aurons

$$\log \omega^2 = 3,2041200$$
$$\log 2R'' = 5,6154551$$
$$\log\left(\frac{\omega^2}{2R''}\right) = \overline{3},5886649, \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega^2}{2R''} = 0'',0038776.$$

Une fraction de seconde telle que celle-là n'est pas appréciable aux instruments les plus précis. Or, quand nous serons arrivés à déterminer la figure générale de la terre, nous aurons le moyen de constater que, dans les amplitudes superficielles auxquelles on restreint les triangles géodésiques, et même dans les plus grandes amplitudes que peut leur permettre la condition de visibilité réciproque des signaux, les angles ω sont toujours considérablement moindres que $40''$; de sorte que, pour tous ces cas, les deux angles dièdres A_1, A'_1, quoique géométriquement distincts, peuvent être employés comme égaux entre eux.

88. Mais cela ne suffit pas encore pour résoudre la question pratique que nous nous sommes proposée. Ce qu'il nous importe de connaître, c'est l'angle dièdre $(A)_1$ qui est compris en S_1 entre les deux plans diamétraux menés par la sécante CS_1, et par les deux sommets S, S_2, vus directement de ce point, sans l'intermédiaire des réfractions. Heureusement on peut le déduire de ce qui précède, et prouver qu'il est encore sensiblement égal à A_1 dans les conditions de restriction assignées au triangle terrestre SS_1S_2.

relation convenue, page 183,

$$b = a - a\varepsilon;$$

avec les valeurs précédentes de a, $\log a$ et $\log \varepsilon$, on trouve

$$a\varepsilon = 10631^{\mathrm{T}},139,$$

donc

$$b = 3271985^{\mathrm{T}},329 - 10631^{\mathrm{T}},139 = 3261354^{\mathrm{T}},19.$$

D'après cette évaluation, le rayon de l'équateur terrestre n'excéderait le rayon mené au pôle que d'environ cinq lieues communes et trois dixièmes, anciennes mesures, en faisant chaque lieue de 2000 toises.

168. Nous pouvons maintenant calculer la valeur générale de $\log D^{(0)}$ dans notre ellipse, d'après les expressions établies page 202. Pour cela, nous formerons d'abord la partie constante $\log a - \log\left(\frac{180}{\varpi}\right)$. Or, nous avons

$$\log a = 6,51481\,13477$$
$$\log\left(\frac{180}{\varpi}\right) = 1,75812\,26324$$

donc $$\log a - \log\left(\frac{180}{\varpi}\right) = 4,75668\,87153$$

Nous avons trouvé déjà, page 207,

$$k\left(e^2 + \tfrac{1}{2}e^4 + \tfrac{1}{3}ke^6 + \tfrac{1}{4}ke^8 \ldots\right) = 0,00282\,67626.$$

D'après ce qui a été démontré page 203, si l'on retranche cette somme de la partie constante, on aura $\log D_q^{(0)}$; ajoutant, au contraire, sa moitié à cette même partie, on aura $\log D_p^{(0)}$. On trouvera ainsi

$$\log D_q^{(0)} = 4,75386\,19527, \qquad \log D_p^{(0)} = 4,75810\,20966.$$

De là on tire

Longueur du degré équatorial en toises.	$D_q^{(0)} = 56736^T,42$
Longueur du degré polaire en toises...	$D_p^{(0)} = 57293^T,06$
Excès du degré polaire sur l'équatorial.	$556^T,44$

Et ensuite généralement, pour une distance polaire quelconque,

$$\log D^{(0)} = 4,75386\ 19527 + \tfrac{3}{2} k \left(e^2 \cos^2 d + \tfrac{1}{2} e^4 \cos^4 d + \tfrac{1}{3} e^6 \cos^6 d + \tfrac{1}{4} e^8\right.$$

169. Comme exemple de cette évaluation, et aussi pour en apprécier la justesse, je l'emploierai à la détermination de la longueur du degré, mesuré dans l'Inde par le colonel Lambton L'unique donnée nécessaire pour le calcul sera la distance polaire d qui, d'après notre tableau de la page 181, est

$$d = 77^\circ 27' 39'';$$

d'où l'on tire

$$\log \cos^2 d = \bar{2},73334\ 76.$$

Ce logarithme, combiné avec ceux de k et de e^2, qui sont déjà connus, donne, pour les deux premiers termes correctifs qui sont seuls sensibles,

$$\tfrac{3}{2} k e^2 \cos^2 d = 0,00019\ 92120$$

$$\tfrac{3}{2} k \frac{e^4}{2} \cos^4 d = 0,00000\ 00304$$

Somme de termes correctifs, additive $0,00019\ 92424$

[redacted]

suré, laquelle était de 1° 34′ 56″ dans l'opération du colonel Lambton. Or, les observations faites avec les meilleurs instruments et les soins les plus minutieux, comportent des erreurs bien plus grandes que cette limite (*).

(*) Comme on a sans cesse besoin d'évaluer ainsi les différences de longueur des degrés, en différences correspondantes qu'elles supposeraient dans l'observation des amplitudes astronomiques ou géodésiques d'où on les a déduits, pour se faire une idée exacte de leur importance, il convient de réduire cette évaluation en formule.

Soient A l'amplitude de l'arc observé exprimée en toises, N le nombre de secondes sexagésimales que contient son amplitude astronomique observée; $D^{(0)}$ la longueur du degré sexagésimal qu'on déduit de ces données réunies. On aura évidemment

$$D^{(0)} = \frac{3600\,A}{N}.$$

Soit maintenant $D_c^{(0)}$ le degré correspondant à la même distance polaire moyenne, qui est obtenu théoriquement, et nommons x le nombre de secondes sexagésimales dont il faudrait *augmenter* N pour le conclure tel de la même amplitude A. On aura pareillement

$$D_c^{(0)} = \frac{3600\,A}{N+x}.$$

Divisant la première égalité par la seconde, il en résulte

$$\frac{N+x}{N} = \frac{D^{(0)}}{D_c^{(0)}}, \qquad \text{conséquemment} \qquad x = N\left(\frac{D^{(0)} - D_c^{(0)}}{D_c^{(0)}}\right).$$

L'évaluation de x se fera très-aisément par logarithmes. Ici, par exemple, nous avons $D^{(0)} - D_c^{(0)} = -0^{T},15$ et $N = 5696''$. Quant à $D_c^{(0)}$, son logarithme est déjà trouvé. Le calcul s'effectuera donc comme il suit :

$$\begin{aligned}
\log 0^{T},15 &= 1,1760913 - \\
\log N &= 3,7555700 \\
&\overline{2,9316613} - \\
\log D_c^{(0)} &= 4,7540612 \\
\log x &= \overline{2},1766001 - , \qquad \text{ce qui donne} \qquad x = -0'',015017
\end{aligned}$$

C'est-à-dire que, pour obtenir une augmentation de $0^{T},15$ dans la longueur

sommets. Quoique l'excessive petitesse des angles ω, sur laquelle cette démonstration repose, ne puisse être prouvée que plus tard, par des considérations d'ensemble, elle n'implique pas de cercle *vicieux*, parce qu'il suffira qu'elle justifie alors ce caractère que nous venons de lui attribuer. D'ailleurs nous en trouverons des confirmations de fait dans le cours des opérations géodésiques mêmes.

89. Ceci reconnu, je reviens à la *fig.* 14. C y désigne, sur la normale CS, le centre d'une sphère qui, étant osculatrice, dans cette localité, à la surface terrestre régularisée, s'assimile d'assez près, comme assez continûment, avec elle, pour que les sécantes menées de ce centre aux stations S_1, S_2 ne forment que de très-petits angles avec les normales réelles. Si l'on coupe ces trois sécantes par la surface sphérique décrite du centre C, avec le rayon osculateur local CA ou R, les plans diamétraux qui les contiennent par couples tracent sur la surface de la sphère un triangle curviligne formé par des arcs de grands cercles, ayant pour côtés ces arcs mêmes, AA_1, AA_2, A_1A_2; et pour angles des sommets les trois angles dièdres, A, A_1, A_2, qu'on a déterminés par l'observation autour des normales menées à ces trois sommets respectifs, la petitesse des angles ω_1, ω_2 étant supposée telle que les angles dièdres compris entre les plans diamétraux qui forment le triangle sphérique puissent, sans aucune erreur appréciable, être supposés égaux à ceux-là. Alors, si l'on parvenait à connaître la longueur absolue d'un des arcs AA_1, AA_2, A_1A_2, par une mensuration directe, ou par une opération trigonométrique qui le rattachât à quelque autre arc ainsi mesuré, on obtiendrait les longueurs absolues des deux autres côtés par le théorème connu que, dans tout triangle sphérique, les sinus des côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés. Car, en supposant, par exemple, que l'on eût ainsi le côté C opposé à l'angle A, on en déduirait

$$\sin C_1 = \sin C \frac{\sin A_1}{\sin A}. \qquad \text{et} \qquad \sin C_2 = \sin C \frac{\sin A_2}{\sin A}.$$

A la vérité, pour résoudre *immédiatement* ces équations par les Tables de sinus, il faudrait exprimer le côté C en parties de la gra-

ce qui donne, pour la distance polaire désignée,

$\log D^{(0)} = 4,7564944578.$ $D^{(0)} = 57081^{T},37$ calculé.

On a, par notre tableau... $D^{(0)} = 57066^{T},06$ mesuré

Donc, excès du calcul... $+ 15^{T},31$

L'amplitude astronomique de l'arc total mesuré par le colonel Mudge était de 2°50′23″,35. Pour faire disparaître la différence indiquée, il faudrait la diminuer de 2″,74. Cette correction, quoique un peu forte, n'est pas inadmissible, car les mesures de l'amplitude conclues par les distances zénithales d'étoiles différentes présentaient des différences qui s'élevaient jusqu'à 4″.

171. Considérons enfin l'arc de Laponie, et déduisons-le de la même formule. Pour cela, on a

$$d = 23°39'50'', \qquad \log \cos^2 d = \bar{1},9237110.$$

Avec cette donnée, on trouve

$$\tfrac{3}{2} k\, c^2 \cos^2 d = 0,0035455123$$

$$\tfrac{3}{2} k \frac{c^4}{2} \cos^4 d = 0,0000096483$$

$$\tfrac{3}{2} k \frac{c^6}{3} \cos^6 d = 0,0000000350$$

Somme additive à $\log D_q^{(0)}$..... $0,0035551926$

Ce qui donne, pour la distance polaire désignée,

$\log D^{(0)} = 4,7574171483.$ $D^{(0)} = 57202^{T},78$ calculé.

On a, par notre tableau... $D^{(0)} = 57196^{T},16$ mesuré.

Donc, excès du calcul... $+ 6^{T},62$

L'amplitude totale de l'arc observé était de 1°37′19″,57. Pour faire disparaître l'excès donné par le calcul théorique, il faudrait la diminuer de 0″,676, et M. Swanberg ne pouvait pas répondre d'une si petite quantité avec le cercle répétiteur dont il faisait usage, surtout comme on l'employait alors.

172. On voit donc qu'à juger par les épreuves précédentes, l'el

lipse déduite du degré du Pérou, combinée avec le degré moyen de France et d'Espagne, reproduirait généralement les longueurs des degrés depuis l'équateur jusqu'au pôle, dans des limites d'écart qui n'excéderaient pas l'étendue des erreurs possibles des observations d'où ils sont conclus. Nous reconnaîtrons toutefois, un peu plus loin, que l'exactitude de cette représentation est très-loin d'être partout aussi parfaite, et que la forme du sphéroïde terrestre s'en écarte notablement en certaines localités. Mais, avant de passer à ces comparaisons définitives, il sera bon de voir quelle ellipse nous aurions trouvée si, au lieu de combiner le degré moyen de France et d'Espagne avec celui du Pérou, nous l'avions combiné immédiatement avec celui de Laponie, dont il reproduit si approximativement la longueur mesurée. Cela nous montrera l'étendue des variations que subissent le demi-grand axe a, et le carré de l'excentricité e^2, lorsqu'on les conclut de données aussi peu différentes; et, par leur plus ou moins de stabilité, nous apprécierons la confiance numérique qu'on peut accorder à leurs valeurs absolues.

175. Comme ces calculs sont exactement pareils à ceux que nous avons effectués dans la précédente combinaison, je les exposerai beaucoup plus brièvement. Ici, d'après notre tableau de la page 181, les données seront :

Degré moyen de France et d'Espagne,

$$D_2^{(0)} = 57024^{\mathrm{T}},64, \quad d_2 = 43^\circ 51' 54''; \quad \log\cos^2 d_2 = \bar{1},715839 8.$$

[redacted]

Avec ces nombres, et les valeurs données des distances polaires d_2, d_1, je conclus

$$e^2 = \frac{0,00200\,02023}{0,32013\,71060} = 0,062479570; \quad \log e^2 = \bar{3},7957381.$$

Cette valeur de e^2 se trouve ainsi un peu plus faible que par la combinaison précédente. Pour en vérifier l'exactitude numérique, je calcule successivement $\log a$, en l'associant à chacun des deux degrés employés ici comme données; et j'obtiens deux évaluations qui diffèrent seulement de quatre unités sur la dixième décimale logarithmique. Négligeant donc cette différence, je prends leur moyenne, et j'ai

$$\log a = 6,51478\,00106,$$

ce qui donne $a = 3271749^{\mathrm{T}},243$

En combinant le même degré moyen de France et d'Espagne, avec celui du Pérou, nous avons trouvé . . . . . $a = 3271985^{\mathrm{T}},329$

Excès de la première évaluation. . . . $236^{\mathrm{T}},086$.

Le demi-axe équatorial se trouve donc ici un peu plus court. Mais la différence est bien petite sur une si grande longueur. Avec la valeur que nous venons d'obtenir ici pour e^2, je cherche l'aplatissement ε, et je trouve

$$\varepsilon = 0,00312\,88732 = \frac{1}{319,604}; \quad \log \varepsilon = \bar{3},4953879.$$

Cet aplatissement est un peu plus faible que la combinaison précédente ne l'avait donné, comme la moindre valeur de e^2 devait le faire prévoir. En le combinant avec la valeur moyenne de $\log a$, obtenue tout à l'heure, on en conclut

$$a\varepsilon = 10236^{\mathrm{T}},87$$

Et puisqu'on a trouvé . . . . . $a = 3271749^{\mathrm{T}},24$

il en résulte . . . . . $b = 3261512^{\mathrm{T}},37$

Le demi-axe polaire b se trouve donc ici un peu plus grand que

avec cette valeur de R pour l'exemple que nous venons de considérer, serait

$$\frac{C^3}{6R^2} = 15^T,69.$$

De sorte qu'il ne présenterait, avec les précédentes évaluations, qu'une différence tout à fait négligeable. On pourrait donc, pour exclure ici toute apparence de cercle vicieux, concevoir que les termes correctifs de nos formules seraient calculés avec ce rayon, ou avec tout autre qui aurait été obtenu par quelque opération analogue, sans avoir besoin de lui attribuer aucune relation avec le système général et définitif de nos sphères osculatrices, si ce n'est qu'il a, comme elles, la propriété de suivre de très-près la courbure de la surface terrestre en un certain sens, dans un de ses points. Mais, ceci étant constaté pour la légitimité du raisonnement, lorsqu'on entreprend, de nos jours, une opération géodésique nouvelle, on peut, sans aucun cercle vicieux, attribuer aux sphères tangentes, sur lesquelles on suppose les triangles établis, la distribution relative des centres, et les longueurs de rayons qui ont été reconnues être les plus convenables, d'après l'ensemble des opérations antérieures effectuées en diverses parties de la terre. De sorte qu'en opérant ainsi, on obtient, de prime abord, les nombres définitifs auxquels les approximations successives conduiraient.

91. On parvient à des résultats équivalents à ceux qui précèdent, et ayant un degré de précision exactement égal, au moyen d'un théorème trouvé par Legendre, qui en simplifie beaucoup le calcul numérique; mais, pour en concevoir l'application, et même pour l'effectuer avec justesse, il faut en rappeler le principe fondamental.

Les angles A, A_1, A_2 d'un triangle sphérique rigoureux (*fig.* 14) sont des angles dièdres, mesurés au centre de la sphère par les arcs de grands cercles interceptés entre les plans diamétraux qui les limitent, et auxquels ils sont proportionnels. On peut donc les exprimer par ces arcs mêmes, indépendamment de toute graduation; alors l'expression de l'angle droit sera un quart de circonférence que je nommerai D. Ceci convenu, soient s la superficie courbe du

elles ont été obtenues. Nous pouvons donc en conclure que ces deux combinaisons représenteraient la partie régulière de l'ellipse terrestre avec une approximation à peu près également admissible. Cependant elles donnent des valeurs de e^2 et de ε notablement différentes, puisque nous trouvons :

Par le degré du Pérou, combiné avec le degré moyen de France et d'Espagne,

$$e^2 = 0{,}0064877239; \quad \varepsilon = 0{,}0032491405 = \frac{1}{307{,}774}.$$

Par le degré de Laponie combiné avec le même degré moyen,

$$e^2 = 0{,}0062479570; \quad \varepsilon = 0{,}0031288732 = \frac{1}{319{,}604}.$$

Ceci nous apprend donc que, dans l'état où se trouvaient les observations astronomiques et les opérations géodésiques, lorsque l'on a fait ces diverses mesures de degrés terrestres, on ne peut pas répondre de la quatrième décimale sur l'évaluation de e^2 ou de l'aplatissement ε.

175. Les déterminations précédentes nous donnent ainsi ce que l'on pourrait appeler la partie régulière de l'ellipsoïde terrestre, telle que peuvent la fournir les éléments employés dans le calcul. Mais, en appliquant ces résultats aux degrés qui ont été mesurés dans certaines localités, on y découvre des écarts trop considérables pour qu'on puisse les attribuer aux erreurs des observations. De sorte qu'il faut nécessairement y voir des irrégularités réelles, qui rendent la forme du sphéroïde terrestre occasionnellement différente d'un ellipsoïde de révolution dans les lieux dont il s'agit.

Ces irrégularités sont surtout manifestes en Europe, vers le 45e degré de distance polaire, où les longueurs du pendule s'écartent aussi le plus notablement d'une loi de variation continue, comme je l'ai fait remarquer dans le tome II, page 472. C'est pourquoi, le degré moyen qui répond à peu près à cette distance polaire étant un élément commun aux deux combinaisons que nous venons d'effectuer, on peut indifféremment employer l'ellipse régulière déduite de l'une ou de l'autre, pour l'appliquer à ces éva-

luations locales. J'y emploierai, en conséquence, celle qui résulte de l'arc moyen d'Espagne et de France, combiné avec celui du Pérou, laquelle donne, en général, pour la longueur d'un degré quelconque en toises,

$$\log D^{(0)} = 4,75386\,19527 + \tfrac{3}{2}k\left\{e^2\cos^2 d + \tfrac{1}{2}e^4\cos^4 d + \tfrac{1}{3}e^6\cos^6 d + \tfrac{1}{4}e^8\cos^8 d - \cdots\right.$$

expression dans laquelle il faut faire

$$\log \tfrac{3}{2}k = \bar{1},81387\,55703, \quad \text{et } \log e^2 = \bar{3},8120924.$$

176. J'appliquerai d'abord cette formule à l'évaluation du degré moyen mesuré entre Evaux et Carcassonne, parce que c'est, dans l'arc de France, celui qui paraît le plus s'écarter de la loi générale. D'après notre tableau A de la page 179, l'unique donnée à prendre pour élément du calcul est la distance polaire moyenne

$$d = 45^\circ\,18'\,11'',58, \quad \text{ce qui donne} \quad \log \cos^2 d = \bar{1},6943488.$$

Avec ces éléments je trouve

$$\log D^{(0)} = 4,57386\,19527 + 0,00209\,41831 = 4,75595\,61358;$$

d'où l'on tire ..... $D_c^{(0)} = 57010^{\mathrm{T}},66$ calculé.

Or, notre tableau de la page 179 donne, à cette même distance polaire..... $D^{(0)} = 56977^{\mathrm{T}},36$ mesuré.

Donc, excès de la mesure sur le calcul..... $D^{(0)} - D_c^{(0)} = -\ 33^{\mathrm{T}},30$

[redacted]

réelle propre à cette localité. Si l'on voulait établir l'accord en altérant l'amplitude géodésique, il faudrait, d'après la même formule, l'augmenter de $99^{T},606$, ce qui est encore moins supposable.

177. Voici un autre exemple qui n'offrira pas de doute. Il s'offre dans le voisinage de Turin, sur la portion de l'arc méridien qui s'étend entre Andrate et Mondovi. Une première mesure avait été faite, en 1762 et 1763, dans cette localité, par le père Beccaria, et le résultat semblait s'écarter considérablement de l'ellipse moyenne propre à cette portion de l'Europe. Mais on pouvait légitimement mettre en doute l'exactitude de l'opération, ce qu'une vérification effective a depuis confirmé. MM. Carlini et Plana, astronomes de Turin, l'ont recommencée, tant pour la partie astronomique que pour la partie géodésique, avec toutes les recherches de précision que l'on pouvait attendre de leur habileté et des excellents instruments qu'ils ont mis en usage. Ils ont obtenu les résultats suivants, que j'extrais de l'ouvrage de M. Plana intitulé : *Mesure d'un arc du parallèle moyen*, tome II, pages 346 et suivantes :

Longueur totale en toises de l'arc méridien compris entre les stations d'Andrate et de Mondovi.....	$64849^{T},8$
Amplitude astronomique de l'arc, observée...	$1^{\circ}\ 7'\ 27''$
Distance du pôle au zénith au milieu de l'arc, conclue de la moyenne entre les observations faites aux deux stations extrêmes....	$d = 45^{\circ}\ 2'\ 31''$
De là on tire proportionnellement la longueur du degré sexagésimal pour cette distance polaire.....	$D^{(0)} = 57687^{T},0$

Maintenant la valeur assignée de la distance polaire moyenne donne

$$\log \cos^2 d = \bar{1},6983336;$$

et en introduisant cet élément avec e^2 dans notre expression générale des degrés, on trouve

$$\log D^{(0)} = 4,75386\,19527 + 0,00211\,35179 = 4,75597\,54706;$$

d'où l'on tire	$D_c^{(0)} =$	$57013^T,204$ c
Or, par les observations de MM. Carlini et Plana, nous avons...	$D^{(0)} =$	$57687^T,000$ ob
Donc, excès de la mesure sur le calcul..... ...	$D^{(0)} - D_c^{(0)} =+$	$673^T,796$

Pour faire disparaître cette différence, il faudrait, d'après mule de la page 211 (note), augmenter l'amplitude astrono de 47",828, ou diminuer l'amplitude géodésique de $757^T,4$ deux corrections sont également inadmissibles, dans une opé qui a été faite par des astronomes habiles, avec le soupçon d'u mière erreur ou d'une anomalie réelle, et avec les plus gran cherches de précision. Il faut donc en conclure que, dans la l dont il s'agit, le sphéroïde terrestre s'écarte considérablemen forme elliptique dont il approche généralement dans son ens On a vu dans le tome II, page 483, que les longueurs du p mesurées depuis Bordeaux jusqu'à Fiume, sur ce même paral 45 degrés, s'écartent aussi beaucoup de la constance qu'ell raient sur un sphéroïde de révolution, ayant à l'intérie constitution uniforme sur un même méridien. De telles iné n'ont rien qui doive surprendre si l'on considère les grand difications physiques que les couches extérieures de la ter subies partiellement à diverses époques, et qui continuent

[redacted]

et ε. Je forme ainsi le tableau suivant qui, d'après le système de données combinées, présente les dimensions en moyennes du sphéroïde terrestre considéré comme un ellipsoïde de révolution, en faisant abstraction de ses irrégularités locales. Les longueurs y sont exprimées en toises de l'Académie, qui a servi primitivement d'étalon commun à toutes les mesures. Elle était en fer, et elle est censée rapportée à la température de $16^\circ \frac{1}{4}$ du thermomètre centésimal.

Demi-axe équatorial,

$$a = 3271867^{T},28; \qquad \log a = 6,5147956789.$$

Aplatissement,

$$\varepsilon = 0,0031890085; \qquad \log \varepsilon = \bar{3},5036554$$

ou

$$\varepsilon = \frac{1}{313,77}.$$

Carré de l'excentricité,

$$e^2 = 0,0063678439; \qquad \log e^2 = \bar{3},8039924.$$

Excès du demi-axe équatorial sur le demi-axe polaire,

$$a\varepsilon = 10434,01; \qquad \log a\varepsilon = 4,0184511310.$$

Demi-axe polaire,

$$b = 3261433,27; \qquad \log b = 6,5134084971.$$

Avec ces éléments moyens, je réduis en nombres l'expression développée d'un degré quelconque, qui, d'après la page 197, est

$$\frac{\varpi}{180} a (1-e^2)\left(1+\tfrac{3}{2}e^2\cos^2 d+\tfrac{15}{8}e^4\cos^4 d+\tfrac{35}{16}e^6\cos^6 d+\tfrac{315}{128}e^8\cos^8 d\ldots\right).$$

Le coefficient commun se calcule d'abord par parties, de la manière suivante :

$$\log a = 6{,}51479\,56789$$

$$\log \frac{180}{\varpi} = 1{,}75812\,26324$$

$$\log\left(\frac{\varpi}{180}a\right) = 4{,}75667\,30465 \qquad \frac{\varpi}{180}a = 57104^{\mathrm{T}},8$$

$$\log e^2 = \bar{3}{,}80399\,24 \qquad \frac{\varpi}{180}ae^2 = 363^{\mathrm{T}},6$$

$$\log\left(\frac{\varpi}{180}ae^2\right) = 2{,}56066\,54 \qquad \frac{\varpi}{180}a(1-e^2) = 56741^{\mathrm{T}},2$$

et, en achevant le calcul des termes suivants avec ce coeffi
commun, on trouve généralement

$$D^{(0)} = 56741^{\mathrm{T}},22 + 541^{\mathrm{T}},986\cos^2 d + 4^{\mathrm{T}},3141\cos^4 d$$
$$+ 0^{\mathrm{T}},03205\cos^6 d + 0^{\mathrm{T}},0002296\cos^8 d.$$

C'est la série que j'ai annoncée dans la page 198, et l'on voit
suffira toujours d'évaluer ses deux premiers termes, pou
passer les limites accessibles à l'expérience. J'emploierai
mais ces résultats moyens dans tous les calculs d'applicatio
nous aurons ultérieurement à effectuer.

178. Je joindrai ici l'expression du logarithme de la norm
limitée à l'axe polaire, parce que l'on en a un continuel b
dans les applications. Nous savons que l'expression de cett
male est

$$N = \frac{a}{(1 - e^2\cos^2 d)^{\frac{1}{2}}},$$

NOTE

AFFÉRENTE A LA PAGE 188.

Sur la développée de l'ellipse, et sur ses rayons osculateurs.

Pour préciser les considérations exposées dans le § 150, je joins ici quelques détails analytiques, que je tire des formules démontrées par Lacroix dans son *Traité de Calcul différentiel et intégral*, tome Ier, page 442.

1. Rapportons l'ellipse à un système de coordonnées rectangulaires x, y, comptées à partir de son centre, *fig.* 32, dont la première se prenne sur l'axe a positivement vers A, la seconde sur l'axe b positivement vers P. L'équation de cette courbe sera

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

De là on tire les coefficients différentiels

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

En les substituant dans l'expression du rayon osculateur que Lacroix nomme γ, on trouve comme lui, page 451,

$$\gamma = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Aux sommets de l'axe polaire PP_1, $x = 0$ et $y = \pm b$; on a donc alors

$$\gamma = \frac{a^6 b^3}{a^4 b^4} = \frac{a^2}{b}.$$

Aux sommets de l'axe équatorial AA_1, $y = 0$ et $x = \pm a$; on a donc alors

$$\gamma = \frac{b^6}{a^4}\frac{a^3}{b^4} = \frac{b^2}{a}.$$

Dans chaque cas le rayon γ doit, par définition, être porté sur la normale du point considéré, à partir de ce point intérieurement à la courbe. C'est pourquoi je ne lui attribue pas de signe propre. Les valeurs que ces expressions lui attribuent sont conformes aux énoncés que j'ai donnés dans le texte.

2. Lorsqu'on substitue les mêmes coefficients différentiels dans les expressions des coordonnées rectangulaires du centre d'osculation que Lacroix nomme α et β à la page citée, en les prenant, comme lui, parallèles aux x, y,

pu le calculer directement par les éléments mêmes de ce triangle, combinés selon leurs rapports trigonométriques rigoureux.

98. A l'aide de ces deux théorèmes, les triangles géodésiques, quoique ayant leurs côtés courbes, se résolvent immédiatement par les Tables logarithmiques ordinaires, de nombres, de sinus et de tangentes, comme si ces côtés étaient rectilignes. On emploie donc immédiatement, dans le calcul, leurs longueurs absolues C, C_1, C_2, telles qu'elles sont données par la mensuration, sans avoir besoin de les diviser d'abord par le rayon R pour les réduire en parties de ce rayon, et de les multiplier ensuite par R″ pour les avoir en parties de la graduation du cercle, comme les Tables usuelles supposent les arcs exprimés. La connaissance du rayon R n'est indispensable que pour calculer théoriquement l'excès sphérique du triangle d'après le rapport de sa superficie à celle de la sphère, lorsque ses angles dièdres A, A_1, A_2 n'ont pas été tous trois déterminés par l'observation; et son usage y est analogue à celui qu'il a pour le calcul des termes correctifs, dans la résolution des mêmes triangles par les développements que nous avons d'abord exposés. C'est pourquoi on n'a besoin de l'y connaître aussi qu'avec une approximation d'un ordre pareil.

99. Pour compléter ce rapprochement, je vais montrer que, dans les limites de petitesse des triangles auxquels le théorème de Legendre est applicable, il donne des résultats identiques avec les developpements que nous avons formés tout à l'heure dans le § 89, page 108; son unique avantage, c'est de suppléer à l'évaluation des termes correctifs de ces développements, par l'emploi de l'excès sphérique du triangle considéré.

Pour donner un exemple simple et convaincant de ce fait, résolvons ainsi le même problème que nous avons traité par les développements (§ 89, page 108). Connaissant les trois angles du triangle sphérique AA_1A_2, *fig.* 14, et un côté C, trouver les deux autres côtés C_1, C_2.

Puisque les trois angles sont donnés, et exprimés, si l'on veut, en parties de la graduation du cercle, leur somme, diminuée de deux angles droits, donnera l'excès sphérique sous la forme ε″. On

centre O. Ces valeurs s'accordent à donner $\frac{b^2}{a}$ pour la longueur du rayon osculateur aux deux sommets A, A_1 de l'ellipse, comme nous l'avions déjà trouvé directement.

Cherchons de même le point où la développée coupe l'axe polaire des y. Alors il faut faire α nul, et l'équation donne

$$\beta = \pm \frac{a e^2}{\sqrt{1 - e^2}} = \pm \frac{(a^2 - b^2)}{b},$$

d'où résultent ces deux valeurs

$$\beta_1 = \frac{a^2}{b} - b, \qquad \beta_2 = + b - \frac{a^2}{b}.$$

a étant supposé plus grand que b dans la *fig.* 32, la seconde racine β_2 y est négative. Elle répond au point désigné par C_p. C'est le centre d'osculation du sommet P. La première racine, au contraire, est positive. Elle répond au point homologue désigné par C_{p_1} qui est le centre d'osculation du sommet inférieur P_1. Ces résultats reproduisent encore ceux que nous avions trouvés directement pour les rayons d'osculation aux sommets P, P_1.

On trouvera de même tous les autres points des quatre branches de la développée qui correspondent aux quatre quadrants de l'ellipse, en attribuant à leurs abscisses α, ou à leurs ordonnées β, les valeurs, soit positives, soit négatives, pour lesquelles on veut les déterminer.

4. Maintenant, pour donner à l'expression du rayon osculateur γ la forme rapportée dans le texte, reproduisons, *fig.* 34, une ellipse pareille à celle de la *fig.* 32, afin de ne pas compliquer celle-ci. En un point quelconque M de cette courbe, menez une normale MN terminée à l'axe b. On démontre, dans les éléments de géométrie analytique, qu'elle coupe cet axe sous un angle MNP, ou d, tel qu'on a

$$\tang d = \frac{b^2 x}{a^2 y} = \frac{x}{y}(1 - e^2);$$

cela se voit, en effet, immédiatement, d'après la valeur du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ rapportée plus haut.

Tirez y en x de cette expression, et substituez-le dans l'équation de l'ellipse mise sous la forme

$$y^2 + (1 - e^2)x^2 = a^2(1 - e^2), \tag{2}$$

il en résultera

$$x^2 = \frac{a^2 \sin^2 d}{1 - e^2 \cos^2 d},$$

et, par suite,

$$y^2 = \frac{a^2(1 - e^2)^2 \cos^2 d}{1 - e^2 \cos^2 d}.$$

$C_1 \sin(A'_1 + A')$, puisque, le triangle étant plan, un quelconque de ses angles est supplément de la somme des deux autres. Sa superficie sera donc $\frac{1}{2} CC_1 \sin(A'_1 + A')$. En la divisant par R^2, on aura, avec une approximation du même ordre, conséquemment suffisante, l'excès sphérique du triangle réel AA_1A_2, *fig.* 14, exprimé sous sa forme abstraite, lequel sera

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{CC_1 \sin(A'_1 + A')}{R^2}.$$

Or, les angles plans A', A'_1 ne diffèrent de leurs analogues du triangle sphérique que parce qu'ils sont chacun plus petits d'une quantité égale à $\frac{1}{3}\varepsilon$, qui est de l'ordre $\frac{1}{R^2}$. Donc, puisque nous négligeons les termes de l'ordre $\frac{1}{R^4}$, nous pouvons substituer ces angles sphériques aux angles plans dans l'expression de ε même, ce qui donnera, dans le même ordre d'approximation,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{CC_1 \sin(A_1 + A)}{R^2};$$

et, par suite, en substituant dans C_1,

$$C_1 = \frac{C \sin A_1}{\sin A} + \frac{1}{6} \frac{C^2 C_1 \sin(A_1 + A) \sin(A_1 - A)}{R^2 \sin^2 A}.$$

Il ne reste plus qu'à chasser C_1 du second membre pour l'avoir entièrement dégagé. Or, comme il n'entre que dans le terme divisé par R^2, il faut, pour rester dans le même ordre d'approximation, l'y remplacer par la portion de sa valeur qui n'est pas déjà de cet ordre, c'est-à-dire par $\frac{C \sin A_1}{\sin A}$. On a ainsi finalement

$$C_1 = \frac{C \sin A_1}{\sin A} + \frac{1}{6} \frac{\sin A_1 \sin(A_1 + A) \sin(A_1 - A)}{\sin^2 A} \frac{C^3}{R^2}.$$

Cette expression est identique avec celle que nous avons trouvée, § 89, page 108, par le développement immédiat de C_1; et la connaissance du rayon R n'y est non plus nécessaire que pour cal-

même forme, puisque son carré est évidemment égal à x^2+y^2. Faisant donc la somme de ces expressions et dégageant la portion $1-e^2\cos^2 d$ qui se trouve commune au numérateur ainsi qu'au dénominateur, on aura

$$(8)\quad R^2=a^2\left[1-\frac{e^2(1-e^2)\cos^2 d}{1-e^2\cos^2 d}\right]\quad \text{et}\quad R=a\left[1-\frac{e^2(1-e^2)\cos^2 d}{1-e^2\cos^2 d}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Lorsque e^2 est une quantité très-petite, comme dans les ellipses des méridiens terrestres, ces expressions sont très-aisées à développer en séries rapidement convergentes, ordonnées suivant les puissances ascendantes de e^2; et il est également très-facile d'avoir les expressions de leurs logarithmes tabulaires développées sous la même forme.

8. Enfin, on peut aussi vouloir connaître l'angle MOP que le rayon R forme avec l'axe polaire OP. Je le désignerai désormais par la lettre D. Sa tangente trigonométrique est évidemment égale à $\frac{x}{y}$. Cela donne

$$\operatorname{tang} D=\frac{\operatorname{tang} d}{1-e^2}.$$

Cet angle diffère ainsi très-peu de d lorsque e^2 est une quantité fort petite, comme dans les ellipses des méridiens terrestres. De là on pourrait aisément déduire la tangente de la différence $D-d$, différence représentée dans notre figure par l'angle OMN que je nommerai ν. Mais l'expression de cette tangente ne se prêterait pas à un développement toujours convergent. C'est pourquoi il vaut mieux chercher l'expression de son sinus. Or, cela est très-facile. Car d'abord, on a évidemment

$$\sin D=\frac{x}{R}=\frac{\sin d}{[1-e^2(2-e^2)\cos^2 d]^{\frac{1}{2}}};\quad \cos D=\frac{y}{R}=\frac{(1-e^2)\cos d}{[1-e^2(2-e^2)\cos^2 d]^{\frac{1}{2}}}.$$

Or, on a identiquement

$$\sin(D-d)=\sin D\cos d-\cos D\sin d.$$

Substituant les valeurs précédentes de sin D et cos D, puis réduisant les termes du numérateur qui se compensent, on trouve

$$(9)\quad \sin(D-d)=\frac{\frac{1}{2}e^2\sin 2d}{[1-e^2(2-e^2)\cos^2 d]^{\frac{1}{2}}},$$

expression qui peut aisément se développer en une série toujours convergente lorsque e^2 est une fraction très-petite de l'unité, comme dans les ellipses des méridiens terrestres.

D'après cette valeur générale, l'angle $D-d$ ou ν devient nul quand d est égal à 0° ou 90°. En effet, dans ces deux cas, le rayon R et la normale N se confondent en une même direction, qui coïncide avec l'axe b ou l'axe a. Entre ces deux limites extrêmes, la plus grande valeur de $D-d$ a lieu, à

Sur la réduction à l'horizon des angles observés dans des plans obliques.

Conservant toutes les déterminations adoptées dans la page 93, § 76, je reprends l'équation transformée de la page 94 :

$$(1)\qquad \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} a - \sin^2 \frac{1}{2} (z_2 - z_1)}{\sin z_1 \sin z_2}.$$

En retranchant de ses deux membres $\sin^2 \frac{1}{2} a$, j'ai

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A - \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{(1 - \sin z_1 \sin z_2) \sin^2 \frac{1}{2} a - \sin^2 \frac{1}{2} (z_2 - z_1)}{\sin z_1 \sin z_2}.$$

Comme les distances zénithales z_1, z_2 sont toujours peu différentes de 90°, il sera bon de mettre en évidence les petites hauteurs apparentes ou les petites dépressions accidentelles qui complètent le quadrant; les considérant donc comme négatives dans le premier cas, et comme positives dans le second, je fais généralement

$$z_1 = 90^\circ + h_1, \qquad z_2 = 90^\circ + h_2,$$

ce qui donne

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A - \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{(1 - \cos h_1 \cos h_2) \sin^2 \frac{1}{2} a - \sin^2 \frac{1}{2} (h_2 - h_1)}{\cos h_1 \cos h_2};$$

or, on a identiquement

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A - \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \sin \tfrac{1}{2} (A + a) \sin \tfrac{1}{2} (A - a),$$

et

$$(1 - \cos h_1 \cos h_2) = \sin^2 \tfrac{1}{2} (h_2 + h_1) + \sin^2 \tfrac{1}{2} (h_2 - h_1).$$

Ces équivalents étant substitués dans l'équation précédente, elle prend la forme qui suit :

$$(2)\ \sin \tfrac{1}{2} (A + a) \sin \tfrac{1}{2} (A - a) = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} (h_2 + h_1) - \cos^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} (h_2 - h_1)}{\cos h_1 \cos h_2}.$$

On voit alors que le second membre sera toujours une quantité très-petite de l'ordre du carré de h_2 et de h_1. En outre, comme on prend toujours soin que l'angle a ait une notable grandeur, $\sin \frac{1}{2} (A + a)$ ne sera jamais assez petit pour compenser, comme dénominateur, l'atténuation produite par les facteurs $\sin^2 \frac{1}{2} (h_2 + h_1)$, $\sin^2 \frac{1}{2} (h_2 - h_1)$. Conséquemment $\sin \frac{1}{2} (A - a)$, et par suite l'arc $A - a$, seront de même ordre qu'eux. D'après cela, si l'on consentait à négliger le carré de $A - a$, on pourrait supposer A égal à a dans le facteur $\sin \frac{1}{2} (A + a)$, ce qui le transformerait en $\sin a$ qui est connu, et

Formons d'abord celles des points M_1, M_2. Comme ils sont situés sur le quadrant positif PA de l'ellipse, on les conclura des formules (3) en y mettant pour d les valeurs particulières à chacun de ces points. On aura donc ainsi

$$x_1 = \frac{a \sin(d-\omega)}{[1-e^2\cos^2(d-\omega)]^{\frac{1}{2}}}, \qquad y_1 = \frac{a(1-e^2)\cos(d-\omega)}{[1-e^2\cos^2(d-\omega)]^{\frac{1}{2}}},$$

$$x_2 = \frac{a \sin d}{(1-e^2\cos^2 d)^{\frac{1}{2}}}, \qquad y_2 = \frac{a(1-e^2)\cos d}{(1-e^2\cos^2 d)^{\frac{1}{2}}}.$$

Maintenant, le centre de courbure C_2 étant situé sur la normale intermédiaire, menée par le point M_2 du quadrant PA, ses coordonnées α, β, seront, d'après les formules (5),

$$\alpha = \frac{ae^2 \sin^3 d}{(1-e^2\cos^2 d)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \beta = -\frac{ae^2(1-e^2)\cos^3 d}{(1-e^2\cos^2 d)^{\frac{3}{2}}}.$$

Et après les avoir substituées, conjointement avec x_1, y_1, dans l'expression de $\operatorname{tang}\delta_1$, on pourra aisément lui donner cette forme :

$$\operatorname{tang}\delta_1 = \frac{\operatorname{tang}(d-\omega)}{1-e^2}\left\{\frac{1-\dfrac{e^2\sin^3 d}{\sin(d-\omega)}\dfrac{[1-e^2\cos^2(d-\omega)]^{\frac{1}{2}}}{(1-e^2\cos^2 d)^{\frac{3}{2}}}}{1+\dfrac{e^2\cos^3 d}{\cos(d-\omega)}\dfrac{[1-e^2\cos^2(d-\omega)]^{\frac{1}{2}}}{(1-e^2\cos^2 d)^{\frac{3}{2}}}}\right\}.$$

Le facteur compris entre les parenthèses ne diffère de l'unité que par des termes de l'ordre e^2. Je bornerai son développement à la première puissance de e^2, et la suite du calcul fera voir que cette limite est parfaitement suffisante, étant combinée avec la petitesse convenue de l'angle ω. Alors les radicaux qui entrent dans cette expression devront être réduits à l'unité ; et si l'on reporte le terme en e^2 du dénominateur au numérateur, par la division, en ne l'y conservant qu'à sa première puissance, comme nous sommes convenus de le faire, on aura

$$\operatorname{tang}\delta_1 = \frac{\operatorname{tang}(d-\omega)}{1-e^2}\left\{1-e^2\left[\frac{\sin^3 d}{\sin(d-\omega)}+\frac{\cos^3 d}{\cos(d-\omega)}\right]\right\}.$$

Pour développer les rapports dont la somme compose le coefficient de e^2, je mets d sous la forme équivalente $d-\omega+\omega$, ce qui donne

$$\sin d = \sin(d-\omega)\cos\omega + \cos(d-\omega)\sin\omega = \sin(d-\omega) + \cos(d-\omega)\sin\omega - 2\sin(d-\omega)\sin^2\tfrac{1}{2}\omega,$$

$$\cos d = \cos(d-\omega)\cos\omega - \sin(d-\omega)\sin\omega = \cos(d-\omega) - \sin(d-\omega)\sin\omega - 2\cos(d-\omega)\sin^2\tfrac{1}{2}\omega.$$

En faisant usage de ces expressions dans le terme multiplié par e^2, je sup

fais, par abréviation,

$$\frac{\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}(h_2+h_1)-\cos^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}(h_2-h_1)}{\cos h_1\cos h_2}=c\sin a,$$

et $\quad \frac{1}{2}(A-a)=r, \qquad$ d'où $\qquad \frac{1}{2}(A+a)=a+x.$

c sera une quantité connue que nous savons être fort petite, et $2x$ sera l'inconnue ou la réduction à l'horizon que nous voulons déterminer; alors notre équation (2) deviendra

$$\sin(a+x)\sin x=c\sin a,$$

ou, en développant le premier facteur,

$$\sin a\cos x\sin x+\cos a\sin^2 x=c\sin a.$$

Maintenant divisez les deux membres par $\cos^2 x$, et remplacez dans le second $\frac{1}{\cos^2 x}$ par son expression équivalente $1+\tang^2 x$; l'équation ne contiendra plus d'inconnue que $\tang x$, et, en l'ordonnant par rapport à cette quantité, elle deviendra

$$\tang^2 x+\frac{\tang a}{1-c\tang a}\cdot\tang x=\frac{c\tang a}{1-c\tang a}.$$

Si l'on voulait considérer $\tang^2 x$ comme négligeable comparativement à $\tang x$, ainsi que nous l'avions fait d'abord, cette équation nous donnerait $\tang x$ égal à c; et, par suite, cette tangente pouvant être remplacée par $\sin x$ ou $\sin\frac{1}{2}(A-a)$ dans le même ordre d'approximation, il viendrait

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-a)=c,$$

résultat identique à l'évaluation que nous avions obtenue directement avec les mêmes restrictions. Pour aller plus loin, il faut résoudre notre équation du second degré, en ne prenant que celle des deux racines qui donne x nul quand c est nul, comme notre équation primitive non divisée. En effectuant cette résolution, on trouve, après quelques réductions faciles,

$$\tang x=\frac{\tang a}{2(1-c\tang a)}\left\{-1+\left[1+\frac{4c(1-c\tang a)}{\tang a}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Il ne reste plus qu'à développer la partie radicale du second membre suivant les puissances de la quantité très-petite qui s'y trouve associée à l'unité. Cela se fera au moyen de la formule du binôme

$$(1+u)^{\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{2}u-\tfrac{1}{8}u^2+\tfrac{1}{16}u^3-\tfrac{5}{128}u^4\ldots,$$

et l'on aura $\tang x$ avec telle approximation que l'on voudra; d'où l'on déduira l'angle x par les Tables logarithmiques usuelles.

Je me bornerai, comme exemple, à effectuer ce développement jusqu'à la

seconde puissance de c inclusivement, ce qui revient à négliger seulement les quantités de l'ordre $\tang^2 x$ comparativement à $\tang x$; j'obtiens, dans ces limites,

$$\tang x = c - \frac{c^2}{\tang a}.$$

Or, dans un cercle dont le rayon est pris pour unité, l'expression d'un arc x moindre que 45°, en fonction de sa tangente, est

$$x = \tang x - \frac{1}{3}\tang^3 x + \frac{1}{5}\tang^5 x \ldots.$$

Ainsi, quand on néglige le cube de $\tang x$, comme nous l'avons fait ici, elle se réduit à la tangente même; alors, si l'on représente par R'' le rayon exprimé en secondes de degré, comme nous l'avons fait dans la note de la page 62, et que l'on suppose l'arc x exprimé de la même manière, le rapport abstrait x ou $\tang x$ devra être remplacé par $\frac{x}{R''}$, ce qui, étant égalé à la valeur trouvée ci-dessus pour $\tang x$, donnera

$$x = cR'' - \frac{c^2 R''}{\tang a},$$

et, en restituant pour x sa valeur $\frac{1}{2}(A - a)$, il en résultera

$$A = a + 2cR'' - \frac{2c^2 R''}{\tang a}.$$

Cette expression coïncide, dans son premier terme, avec celle que nous avions trouvée d'abord; elle n'en diffère que dans le second, qui sera le plus souvent insensible et négligeable.

de l'ordre du cube de $\sin\omega$, puis, qu'on revienne des tangentes aux arcs, par le rapport de proportionnalité qui sera alors légitime, on aura pour leurs valeurs, en secondes de degré,

$$d - \omega - \delta_1 = \frac{3}{4}\frac{e^2\,\omega^2 \sin 2d}{(1-e^2)\,R''}, \qquad d + \omega - \delta_2 = \frac{3}{4}\frac{e^2\,\omega^2 \sin 2d}{(1-e^2)\,R''}.$$

Elles seront donc égales entre elles dans cette partie principale de leur valeur. Voilà le principe de la compensation qui rend $\delta_2 - \delta_1$ égal à 2ω. Mais ces valeurs elles-mêmes seront individuellement sensibles dans les limites d'amplitude attribuées ci-dessus à ω; et elles atteindront leur maximum quand d sera égal à 45°. Évaluons-les alors pour les méridiens terrestres, en supposant ω égal à 2° ou 7200″. Nous avons

$$\log R'' = 5{,}3144251, \qquad \log e^2 = \bar{3}{,}8039924.$$

De là on tire

$$\frac{3}{4}\frac{e^2}{(1-e^2)}\frac{\omega^2}{R''} = 1'',20.$$

Cette quantité ne serait pas négligeable dans des observations exactes; mais elle disparaîtra par compensation dans l'angle que les deux droites C_1M_1, C_2M_2 forment entre elles. Ce résultat est d'autant plus assuré dans les opérations pratiques, que jamais on n'y considère des arcs 2ω dont l'amplitude s'étende ainsi jusqu'à 4°. Or, l'écart dont il s'agit variant comme le carré de ω, il ne sera plus que 0″,3 quand 2ω sera réduit à 2°, ce qui est encore une amplitude inusitée, et il s'éteindra complétement lorsque l'angle ω sera restreint aux limites habituelles. Conséquemment, lorsqu'un arc du méridien terrestre A sera compris entre deux normales formant entre elles un petit angle de cet ordre, exprimé par l'arc 2ω, dans un cercle dont le rayon est l'unité, si on le suppose placé sur le cercle osculateur correspondant à la normale moyenne qui bissecte cet angle, on pourra admettre, sans aucune erreur appréciable, qu'il soutend au centre de ce cercle un

102. A cet effet, établissons-la d'abord dans l'hypothèse simple où la surface terrestre régularisée serait une sphère rigoureuse, ce que nous savons déjà être très-peu éloigné de la réalité. Pour abréger les énoncés, désignons par la lettre O le centre de cette sphère, et par Σ, Σ_1, Σ_2,... les points de la surface irrégulière qui ont servi de stations pour mesurer les angles dièdres A, A_1, A_2,.... Du centre O, menez les sécantes $O\Sigma$, $O\Sigma_1$, $O\Sigma_2$,.... Elles perceront la sphère en autant de points S, S_1, S_2,.... Ceux-ci, étant joints entre eux par des arcs de grands cercles, formeront une suite continue de triangles sphériques tracés sur la sphère même qui exprime la configuration générale de la terre, comme le représente la *fig.* 18. Alors, les triangles consécutifs qui ont deux sommets communs ont aussi un côté commun formé par l'arc de grand cercle qui joint ces sommets. Les trois angles A, A_1, A_2 de chaque triangle, étant connus par observation, leur somme, diminuée de 180°, exprime l'excès sphérique ε'' qui lui est propre. Le tiers de cet excès, retranché de chaque angle, donne, par le théorème de Legendre, les angles correspondants A', A'_1, A'_2 du triangle rectiligne qui serait formé par les mêmes côtés C, C_1, C_2, étendus en ligne droite. De là on déduit les rapports de ces arcs entre eux. Donc, si l'on avait la longueur de l'arc sphérique qui constitue un seul des côtés de la chaîne, par exemple SS_1 ou SS_2, on en déduirait, par des résolutions successives, les longueurs de tous les autres côtés, le passage de chaque triangle au triangle consécutif s'effectuant par l'emploi du côté commun. Ce calcul n'exige point que l'on connaisse le rayon R de la sphère sur laquelle le réseau

Section V. — *Des corrections nécessitées dans les opérations géodésiques, par l'ellipticité du sphéroïde terrestre.*

179. Lorsque nous avons exposé les procédés de triangulation employés dans les opérations géodésiques, nous avons montré qu'on pouvait ne pas les restreindre à une sphère rigoureuse, mais étendre leur application à tout sphéroïde presque sphérique, en concevant les triangles consécutifs individuellement établis sur des sphères progressivement différentes, qui seraient osculatrices à la surface réelle, dans les diverses portions du réseau considéré. Ajustant même, par avance, cette conception au cas où la surface serait un ellipsoïde de révolution autour de l'axe qui joint les pôles célestes, nous avons remarqué qu'alors il était avantageux de placer les centres de toutes les sphères sur cet axe même, ce qui amène leurs rayons polaires propres à coïncider avec lui en direction, et fait coïncider leurs plans méridiens avec les plans méridiens réels. J'ai annoncé que, dans ce mode de construction, le sens de l'osculation de chaque sphère était transversal à ces méridiens, ce que nous avons depuis démontré.

Ayant maintenant prouvé, qu'en effet, la forme de la surface terrestre est très-approximativement assimilable à un ellipsoïde ainsi construit, il devient nécessaire d'examiner si la distribution des centres que nous avons attribués à nos sphères locales, et le sens d'osculation transversal qui en est la conséquence, offrent,

section précédente peuvent être considérées comme ayant pour objet les particularités du problème général auquel se rapporte la *fig.* 24, et que nous avons résolu dans tous ses détails pages 154 et suivantes. C'est pourquoi j'en reproduis ici les éléments dans la *fig.* 35, en les transportant, dans leur disposition la plus générale, sur un ellipsoïde de révolution pareil à celui qui constitue la surface terrestre, avec la précaution conventionnelle d'exagérer graphiquement le rapport d'inégalité de ses axes, pour pouvoir rendre perceptibles les détails de construction que nous devrons y effectuer. O est le centre de l'ellipsoïde, AA′ son axe équatorial $2a$, PP′ son axe polaire $2b$, celui-ci coïncidant avec l'axe polaire céleste, un peu plus court que l'autre, et ayant avec lui la proportion d'inégalité exprimée par l'équation

$$b^2 = a^2(1 - e^2), \qquad \text{où l'on a} \qquad \log e^2 = \bar{3},8039924.$$

PA est un méridien identique avec l'ellipse génératrice, et situé dans le plan même de la figure. Sur une partie quelconque de son contour, on prend un point S, où l'on mène la normale SN, contenue dans son plan, et formant l'angle SNP, ou d, avec l'axe polaire PP_1; en sorte que d est la distance angulaire du pôle céleste visible, par exemple, du boréal, au zénith vrai de S. Je désigne, comme précédemment, par N la longueur du segment SN de la normale, qui se termine à ce même axe polaire. La sphère décrite du centre N, avec la longueur N pour rayon, est osculatrice à l'ellipsoïde en S dans le sens perpendiculaire au méridien PSA, et son contact se prolonge sur toute la circonférence qui constitue le parallèle du point S. Sur la même normale, je place en C le centre du cercle qui est osculateur à l'ellipse elle-même, et je représente par γ la longueur de son rayon. La sphère décrite du centre C, avec le rayon γ, est osculatrice à l'ellipsoïde en S, dans le sens du méridien PSA ; mais son contact ne s'y étend généralement, dans ce sens, que sur deux éléments consécutifs infiniment petits. D'après ce qui a été démontré antérieurement, page 186, on a toujours

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \cos^2 d)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \gamma = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \cos^2 d)^{\frac{3}{2}}};$$

précédentes. Dans une telle configuration, si l'on trace sur notre *fig.* 18, la courbe PSM_n, pour désigner l'arc méridien mené par le premier sommet S, à travers le réseau des triangles, ce sera un arc de l'ellipse génératrice. Toutes les normales, menées au sphéroïde, en divers points de cet arc, seront comprises dans un même plan contenant l'axe polaire; et toutes les sphères, qui seront transversalement osculatrices au méridien considéré, auront leurs centres répartis, sur cet axe, à une très-petite distance autour du centre du sphéroïde, avec leurs rayons R extrêmement peu différents entre eux, comme on en peut juger par leurs valeurs extrêmes que j'ai présentées par avance page 109. Employons ce système de sphères pour y placer les divers triangles discontigus, dont se compose notre réseau, et considérons-y spécialement les deux premiers désignés par les n°s 1 et 2. Pour faire bien sentir ce qu'ils ont de différent et de commun, je les reproduis séparément *fig.* 19, avec des conditions de discontiguïté monstrueusement exagérées. Dans le n° 1, je suppose que la sphère locale sera osculatrice en S, et aura pour rayon R. Ainsi ce sommet sera un point de la surface terrestre régularisée. Σ_1, Σ_2 désignent les deux autres points, distincts, mais toujours très-peu distants de cette surface, où l'on a observé les angles autour des normales réelles. La sphère s'en écarte, et les sécantes menées de son centre à ces points vont percer sa superficie en S_1, S_2, en formant, avec ces normales, des angles extrêmement petits. D'après cela, on transporte aux points S_1, S_2 de la sphère les angles dièdres observés en Σ_1, Σ_2, et on les applique au triangle sphérique SS_1S_2 ainsi construit. Passant au triangle n° 2, l'osculation s'y fera, en un point quelconque de sa superficie, par une autre sphère du rayon R′, quelque peu différente de la première, tant pour la position de son centre sur l'axe polaire que pour la longueur de son rayon. Les sécantes menées de ce centre aux mêmes points précédents Σ_1, Σ_2 déterminent, sur la deuxième sphère, les points S'_1, S'_2 qui, joints entre eux et à S, par des arcs de grands cercles tracés sur sa superficie propre, y forment le triangle sphérique n° 2, dont le côté $S'_1S'_2$ est nécessairement discontigu avec S_1S_2. Cette discontiguïté n'est même pas détruite par la supposition commune aux deux triangles, que leurs sommets propres

s'écartent à peine des points Σ_1, Σ_2, puisque leurs côtés ne laissent pas, pour cela, d'appartenir à des sphères distinctes. Mais, sans qu'elle cessât d'exister mathématiquement, on pourrait se dispenser d'en tenir compte, si les étendues des deux triangles étaient tellement restreintes, que la petitesse de l'intervalle compris sur l'axe polaire entre les centres des sphères qui leur sont respectivement osculatrices, et l'égalité presque exacte des rayons de ces sphères qui en serait la conséquence, rendissent le défaut de coïncidence des deux côtés S_1S_2, $S'_1S'_2$, insensible aux observations; en sorte que l'on pût, sans erreur appréciable, considérer la distance qui les sépare comme nulle, et attribuer des valeurs communes aux angles, ainsi qu'aux arcs, appartenant à leurs sommets distincts. Alors le résultat apparent de ces circonstances serait le même que si les deux points S_1 et S'_1, S_2 et S'_2, auxquels ces sommets distincts correspondent, pouvaient être censés compris sur une même sphère osculatrice. Or, puisqu'un même réseau de triangles peut déjà, presque sans erreur, être calculé, comme s'il était appliqué tout entier sur une sphère osculatrice unique, à plus forte raison peut-on, sans crainte, négliger la différence première des rayons, et des positions des centres de ces sphères, pour deux triangles consécutifs très-petits, sauf à reporter idéalement le côté de jonction de ces triangles, d'abord sur la sphère qui précède, puis sur la sphère qui suit immédiatement, sans étendre l'assimilation plus loin. Cette tolérance étant admise, un même réseau, quoique composé de triangles physiquement dis-

quelconque de leurs côtés. Mais la mensuration directe de ceux-ci pourrait être souvent rendue très-difficile, ou même impraticable par des accidents de localités auxquels il n'est pas nécessaire d'avoir égard dans leur choix. On y supplée en rattachant un ou plusieurs d'entre eux par des triangulations secondaires, à d'autres arcs sphériques, ordinairement d'une moindre longueur, sur lesquels cette opération peut être effectuée exactement. Pour cela, dans l'étendue que l'on découvre d'une des stations, par exemple autour de la première S, on choisit un terrain à peu près de niveau, et l'on y mesure, avec tous les soins que nous avons décrits, une base rectiligne horizontale BB_1, *fig.* 18, contenue tout entière dans un même plan vertical, ou entre une suite de verticales qui s'occultent mutuellement les unes les autres, ce qui la fait sensiblement coïncider avec un arc de grand cercle de la sphère qui serait osculatrice à la surface terrestre régularisée, au lieu où le tracé est ainsi effectué. On réduit par le calcul cette base à la longueur qu'elle aurait entre les mêmes sécantes de la sphère, si elle s'y trouvait placée à la hauteur de la mer environnante, et on la rattache à l'un des côtés de la chaîne générale, par exemple à SS_2, par de petits triangles sphériques, dont on détermine tous les angles au moyen d'observations faites autour de chacune des normales menées à leurs divers sommets. Ces angles étant ainsi connus donnent l'excès sphérique ε'' propre à chaque triangle de jonction : de là, par le théorème de Legendre, on déduit les longueurs relatives de leurs côtés, par conséquent celle de l'arc SS_2 en fonction de l'arc BB_1, et cet arc donne ensuite tous les autres côtés de la chaîne, comme je l'ai expliqué, soit qu'on les place en succession sur la première sphère osculatrice, ou sur d'autres ultérieures, progressivement différentes de celle-là par des changements infiniment petits. Quand ce calcul est terminé, si l'on mesure une seconde base bb_1, que l'on rattache de même au dernier côté de la chaîne, elle devra se déduire de la première, sans erreur appréciable, par l'intermédiaire des triangles qui l'en séparent, supposé toutefois que les étendues superficielles de ces triangles aient été assez restreintes pour qu'on puisse légitimement leur appliquer toutes les conditions d'approximation spécifiées plus haut, tant pour les évaluations de leurs

angles dièdres que pour la continuité de leur connexion. L'accord que l'on trouvera ainsi par déduction, entre les deux bases extrêmes, comme entre celles-ci et d'autres rapportées à des côtés intermédiaires de la chaîne, prouvera donc que ces conditions ont été suffisamment remplies. Or c'est ce qui est arrivé dans toutes les grandes opérations géodésiques effectuées depuis un demi-siècle, en diverses régions de la terre, avec les soins que la perfection des instruments et des méthodes d'observations a permis d'y apporter.

107. Mais on a encore une autre vérification de ce fait qui peut s'appliquer en particulier à chaque triangle. Je prends pour exemple le premier SS_1S_2 de la *fig.* 18, et je suppose que la longueur de son côté SS_2 a été conclue de la triangulation qui le rattache à la base BB_1. On a obtenu, par observation, les trois angles sphériques en S, S_1, S_2 : ils ont été conclus, sans réductions, des mesures angulaires faites autour des normales réelles, menées aux trois points de la surface terrestre, situés sur le prolongement des sécantes menées du centre de la sphère osculatrice locale, jusqu'à ces mêmes points. Je nomme ces angles A, A_1, A_2, en leur donnant l'indice du sommet auquel chacun d'eux appartient. Maintenant je prends pour uniques données les angles A, A_2, et la longueur connue du côté SS_2, qui sera C_1. Si l'on considère le triangle SS_1S_2 comme rectiligne, on pourra avec ces éléments calculer sa surface s' ; et, en la divisant par le carré du rayon R propre à la sphère osculatrice locale, ou même à toute autre quelconque de ces sphères, telle que celle que nous avons conclue par mensuration directe de l'arc de Pensylvanie, on obtiendra le nombre de

réelle propre à cette localité. Si l'on voulait établir l'accord en altérant l'amplitude géodésique, il faudrait, d'après la même formule, l'augmenter de $99^{T},606$, ce qui est encore moins supposable.

177. Voici un autre exemple qui n'offrira pas de doute. Il s'offre dans le voisinage de Turin, sur la portion de l'arc méridien qui s'étend entre Andrate et Mondovi. Une première mesure avait été faite, en 1762 et 1763, dans cette localité, par le père Beccaria, et le résultat semblait s'écarter considérablement de l'ellipse moyenne propre à cette portion de l'Europe. Mais on pouvait légitimement mettre en doute l'exactitude de l'opération, ce qu'une vérification effective a depuis confirmé. MM. Carlini et Plana, astronomes de Turin, l'ont recommencée, tant pour la partie astronomique que pour la partie géodésique, avec toutes les recherches de précision que l'on pouvait attendre de leur habileté et des excellents instruments qu'ils ont mis en usage. Ils ont obtenu les résultats suivants, que j'extrais de l'ouvrage de M. Plana intitulé : *Mesure d'un arc du parallèle moyen*, tome II, pages 346 et suivantes :

Longueur totale en toises de l'arc méridien compris entre les stations d'Andrate et de Mondovi.....	$64849^{T},8$
Amplitude astronomique de l'arc, observée...	$1^{\circ}\ 7'\ 27''$
Distance du pôle au zénith au milieu de l'arc, conclue de la moyenne entre les observations faites aux deux stations extrêmes....	$d = 45^{\circ}\ 2'\ 31''$
De là on tire proportionnellement la longueur du degré sexagésimal pour cette distance polaire.....	$D^{(0)} = 57687^{T},0$

Maintenant la valeur assignée de la distance polaire moyenne donne

$$\log \cos^2 d = \bar{1},6983336;$$

et en introduisant cet élément avec e^2 dans notre expression générale des degrés, on trouve

$$\log D^{(0)} = 4,75386\,19527 + 0,00211\,35179 = 4,75597\,54706;$$

lipsoïde, ce qui aura lieu lorsque le point de contact se trouvera placé sur l'équateur même, puisque c'est là que la normale NS diffère le plus du rayon γ, qui est osculateur au même point de l'ellipse génératrice. Tel est l'objet de la *fig.* 38. Elle est complétement analogue à la *fig.* 37; seulement le point de départ de l'arc SS_1 y est placé en A, sur le contour de l'équateur à la distance polaire $d = 90°$. Dans ce cas, la normale N a son origine au centre même de l'ellipsoïde, en O; et sa longueur est égale au demi-grand axe OA, ou a, comme on le déduit de son expression générale. On suppose donc que l'arc géodésique considéré, partant de son origine équatoriale, suivant un azimut i quelconque, a embrassé, sur la sphère, une différence de distances polaires représentée par les portions AS'_1 du cercle tangent. Alors, admettant que cette différence, de chaque côté de l'axe OA, soutende, *au centre de ce cercle*, un angle S'_1OA, égal, par exemple, à 1 degré sexagésimal, on demande quelle sera la distance des points S'_1 de la sphère aux points S_1 de l'ellipsoïde qui sont situés sur le même rayon sphérique; et aussi, quel sera l'excès de longueur des arcs circulaires AS'_1, sur les arcs elliptiques AS_1, rectifiés rigoureusement? Or, par un calcul très-simple que j'expose dans une Note à la fin de la présente section, on trouve que sur la terre, dans les suppositions précédentes, l'intervalle S'_1S_1, exprimé en toises, sera $3^T,173$; et que l'arc circulaire AS'_1 excédera l'arc elliptique AS_1 de $0^T,0185$ ou moins de $\frac{2}{100}$ de toise. De telles quantités sont bien légitimement négligeables dans des évaluations pareilles; et comme elles sont les plus grandes qui puissent se réaliser dans les applications, tant à cause de l'étendue attribuée ici à la différence des distances polaires extrêmes, qu'à cause de la localité où nous la supposons exister, on doit en conclure, en toute assurance: 1° que, pour tous les arcs géodésiques compris entre des parallèles dont l'écart sera au plus de 1 degré, les points S'_1, où ils se terminent sur la sphère transversalement osculatrice à leur origine, se confondront sensiblement avec les points S_1 de l'ellipsoïde situés sur les mêmes rayons sphériques; 2° que la différence des distances polaires extrêmes, *évaluée en arcs de la sphère*, égalera sensiblement en longueur l'arc du méridien elliptique, compris entre ces mêmes rayons.

couper le côté $S_1 S_2$ du triangle n° 1 de la *fig.* 18. De ce point je mène une nouvelle normale $m_1 c_1$, qui perce l'ellipsoïde au point μ_1, distinct du premier, mais qui en est assez peu distant pour que l'on puisse considérer comme nul l'intervalle qui les sépare. $c_1 \mu_1$ sera le rayon de la seconde sphère, transversalement osculatrice au méridien en μ_1; et l'arc $\mu_1 m_2$, compris de même dans le plan de la figure, représentera l'élément de l'arc méridien prolongé sur sa surface, élement dont nous voulons déterminer la direction dans le deuxième triangle de la *fig.* 18. Pour cela, par les points m_1, μ_1, considérés comme coïncidents, menez deux droites indéfinies, $m_1 t_1$, $\mu_1 \theta_1$, l'une tangente au premier arc, l'autre au second. Le plan qui contiendra ces deux tangentes tracera sur la seconde sphère la direction de l'arc méridien $\mu_1 m_2$, et y déterminera l'angle azimutal $\theta_1 \mu_1 S_2$, ou $m_2 m_1 S_2$, qu'il doit former dans la *fig.* 18 avec le segment $m_1 S_2$, supposé commun aux deux sphères. Or, les angles formés ainsi par les deux tangentes avec ce segment commun ne différeront entre eux que par une réduction à l'horizon, qui, en restreignant suffisamment les triangles, pourra être rendue négligeable, comme étant proportionnelle au carré du sinus de l'angle cm_1c_1, compris, dans la *fig.* 20, entre les droites menées de m_1 ou de μ_1 aux centres des deux sphères. Ainsi on aura le droit de la supposer telle, en prenant les précautions nécessaires pour que cette condition soit remplie, et constatant son accomplissement par des vérifications ultérieures. Ceci admis, reprenons la *fig.* 18. La première tangente, menée extérieurement en m_1 à l'arc Sm_1, forme avec le segment $m_1 S_2$ un angle $S_2 m_1 t_1$ égal à son opposé $Sm_1 S_1$, du premier triangle. Donc la seconde tangente menée de ce même point m_1 à l'arc $m_1 m_2$, devra former avec ce même segment un angle sensiblement égal, précisément comme si le premier arc Sm_1 était prolongé directement sur une même sphère. Cette condition d'égalité donnera l'azimut $m_2 m_1 S_2$, ou i', que le segment $S_2 m_1$ du premier triangle principal forme avec la direction du méridien $m_1 m_2$, dans le second triangle, auquel ce même segment peut être censé aussi appartenir, comme nous l'avons prouvé. On sera donc ici exactement dans les mêmes conditions où l'on était pour le premier triangle principal quand on a entrepris de déterminer

Reste à déduire d' de cette relation. C'est à quoi l'on parvient avec facilité en se guidant sur la remarque suivante :

Si l'arc géodésique considéré avait une longueur nulle, ou s'il s'étendait sur un même parallèle, δ serait nul ; et alors, d'après notre équation, d' serait égal à d. Si c^2 était nul, quelle que fût la longueur de l'arc, l'équation donnerait d' égal à $d+\delta$ comme sur la sphère. Ces deux conditions étant indépendantes l'une de l'autre, il n'y a qu'à faire, en général,

$$d' = d + \delta + u,$$

et la quantité complémentaire u sera nécessairement de l'ordre $c^2 \sin \delta$. Ainsi, en l'introduisant comme inconnue, il devra être facile de l'obtenir par les séries, à cause de la petitesse du facteur dont elle dépend.

Pour cela je fais, par abréviation,

$$c = \frac{\sin(d+\delta)}{(1 - e^2 \cos^2 d)^{\frac{1}{2}}};$$

puis, élevant les deux membres de l'équation au carré, j'en dégage successivement $\sin^2 d'$ et $\cos^2 d'$ sous ces deux formes

$$\sin^2 d' = \frac{c^2(1-e^2)}{1-c^2 e^2}; \qquad \cos^2 d' = \frac{1-c^2}{1-c^2 e^2}.$$

Or, puisque u est égal à $d' - (d+\delta)$, on aura

$$\sin u = \sin d' \cos(d+\delta) - \cos d' \sin(d+\delta),$$

ou, en mettant pour $\sin d'$ et $\cos d'$ leurs valeurs,

$$\sin u = \frac{c(1-c^2)^{\frac{1}{2}} \cos(d+\delta) - (1-c^2)^{\frac{1}{2}} \sin(d+\delta)}{(1-c^2 e^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Mais, d'après la convention faite tout à l'heure, on a

$$c = \frac{\sin(d+\delta)}{(1 - e^2 \cos^2 d)^{\frac{1}{2}}}$$

NOTE

AFFÉRENTE A LA PAGE 188.

Sur la développée de l'ellipse, et sur ses rayons osculateurs.

Pour préciser les considérations exposées dans le § 150, je joins ici quelques détails analytiques, que je tire des formules démontrées par Lacroix dans son *Traité de Calcul différentiel et intégral*, tome Ier, page 442.

1. Rapportons l'ellipse à un système de coordonnées rectangulaires x, y, comptées à partir de son centre, *fig.* 32, dont la première se prenne sur l'axe a positivement vers A, la seconde sur l'axe b positivement vers P. L'équation de cette courbe sera

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

De là on tire les coefficients différentiels

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

En les substituant dans l'expression du rayon osculateur que Lacroix nomme γ, on trouve comme lui, page 451,

$$\gamma = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Aux sommets de l'axe polaire PP_1, $x = 0$ et $y = \pm b$; on a donc alors

$$\gamma = \frac{a^6 b^3}{a^4 b^4} = \frac{a^2}{b}.$$

Aux sommets de l'axe équatorial AA_1, $y = 0$ et $x = \pm a$; on a donc alors

$$\gamma = \frac{b^6 a^3}{a^4 b^4} = \frac{b^2}{a}.$$

Dans chaque cas le rayon γ doit, par définition, être porté sur la normale du point considéré, à partir de ce point intérieurement à la courbe. C'est pourquoi je ne lui attribue pas de signe propre. Les valeurs que ces expressions lui attribuent sont conformes aux énoncés que j'ai donnés dans le texte.

2. Lorsqu'on substitue les mêmes coefficients différentiels dans les expressions des coordonnées rectangulaires du centre d'osculation que Lacroix nomme α et β à la page citée, en les prenant, comme lui, parallèles aux x, y.

et par suite,

$$d' = d + \delta + \delta e^2 \sin^2 d = d + \delta(1 + e^2 \sin^2 d).$$

Ainsi, lorsqu'on aura calculé la différence δ des distances polaires, exprimée en parties de la graduation du cercle sur la sphère dont le rayon est N, pour l'arc géodésique A que l'on aura considéré, il suffira de la multiplier par le facteur $(1 + e^2 \sin^2 d)$ pour avoir la différence correspondante sur l'ellipsoïde. Le produit sera additif à la distance polaire primitive d, si δ est positif, c'est-à-dire si l'extrémité de l'arc géodésique considéré est plus australe que son origine. Il sera soustractif de la distance d dans le cas contraire, comme on l'aurait trouvé directement si l'on avait pris celui-ci pour type du calcul, ainsi que le représente la *fig.* 39.

187. Afin d'apprécier la petitesse de cette correction, ce qui justifiera les limites d'évaluation auxquelles nous l'avons restreinte, calculons la valeur de son coefficient $e^2\delta$ en donnant à l'arc δ la valeur extrême de 1° ou 3600″. Alors, en donnant à e^2 la valeur moyenne que nous lui avons trouvée page 221, nous aurons

$$\begin{aligned} \log \delta'' &= 3,5563025 \\ \log e^2 &= \overline{3},8039924 \\ \hline \log e^2\delta'' &= 1,3602949 \quad \text{d'où} \quad e^2\delta'' = 22'',924. \end{aligned}$$

La correction dont il s'agit sera donc toujours petite dans ce cas même, puisqu'elle doit être multipliée par le facteur $\sin^2 d$ qui l'affaiblira généralement. Elle est toutefois bien loin d'être négligeable. On voit que sa valeur absolue dépend de celle que l'on attribue à e^2, c'est-à-dire à $2\varepsilon - \varepsilon^2$, ε étant l'aplatissement de l'ellipsoïde. Elle sera par conséquent affectée des incertitudes qui peuvent rester encore sur l'évaluation moyenne de cet élément; mais elle le sera bien plus encore par les accidents de localité qui peuvent le rendre notablement différent de sa valeur générale, dans la région où l'on opère.

Pour cette évaluation, j'ai supposé l'arc δ donné en secondes de degré; mais le calcul géodésique le donne en unités de lon-

gueur, sur la sphère dont le rayon est la normale N à l'
l'arc mesuré. Soit cette longueur Δ, on en déduira

$$\delta'' = \frac{\Delta R''}{N}, \qquad \text{en faisant} \qquad N = \frac{a}{(1 - e^2 \cos^2 d}$$

La petitesse du rapport $\frac{\Delta}{a}$ y rendra toujours très-peu se
fet des incertitudes qui peuvent exister dans l'évaluatio
grand axe a de l'ellipsoïde qui s'adapterait le mieux à l
ration de la surface terrestre dans chaque localité c
mais elles pourront devenir sensibles, sur l'étendue
grand arc méridien, si après y avoir transporté de
proche la distance polaire d de son origine, en lui app
corrections successives $e^2\delta'' \sin^2 d$ qui servent à passe
tance polaire sphérique à la distance polaire elliptique i
ment consécutive, on compare cette distance polaire fi
que l'on peut déterminer astronomiquement par l'obse

188. J'emploierai l'expression de $\sin u$, sous sa prem
moins restreinte, pour justifier l'énoncé numérique que
dans la page 196. Concevons une triangulation géodési
dans le sens d'un même méridien, et ayant son origine l
le parallèle elliptique où la distance du pôle au zénith
suppose que, par une exagération ayant seulement po
épreuve fictive, on veuille appliquer sur la première sp
latrice, toute la longueur de l'arc conclu, que je ferai

trouvé, et l'on a l'arc total de la méridienne qui est compris entre les parallèles des deux sommets extrêmes S et S_n. Il ne reste plus qu'à diviser cette longueur par la différence des distances du pôle au zénith, observées dans les deux stations Σ, Σ_n, situées sur les normales de ces sommets, en exprimant cette différence en degrés et

---

moindre que D′ et en diffère peu. Maintenant, par le sommet S_n, décrivons, toujours sur la sphère osculatrice, le petit cercle qui y forme le parallèle propre de cette station, et supposons qu'il coupe le prolongement du méridien primitif en M_n. L'arc PM_n sera alors égal à PS_n, ou D′, par définition. Ainsi l'arc NM_n que nous voulons évaluer est $D' - \Pi'$.

Pour calculer cette différence, je conçois, par le centre de la sphère, trois verticales menées respectivement aux points P, S_n, N; et, par ce même centre, je décris une sphère du rayon 1 qui coupe ces trois droites en autant de points que je joins par des arcs de grands cercles. Le triangle central ainsi formé sera semblable au triangle PS_nN, et conséquemment rectangle comme lui. Si l'on désigne par d', π', δ ses côtés homologues à D′, Π′, Δ, on aura évidemment

$$D' = Rd', \qquad \Pi' = R\pi', \qquad \Delta = R\delta.$$

Maintenant, dans ce triangle rectangle central, l'hypoténuse d et le côté d' seront liés à δ par la relation

$$\cos d' = \cos \pi' \cos \delta.$$

C'est précisément la même équation que nous avons déjà obtenue dans la page 78, pour un cas de réduction absolument pareil; et ici, de même, la petitesse de l'arc δ doit rendre $d' - \pi'$ très-petit du même ordre. Employant donc le même genre de raisonnement que nous lui avons alors appliqué, nous en tirerons, comme dans la page 80, et entre des limites d'approximation pareilles :

fractions de degré, de la graduation du cercle. Le quotient sera le degré moyen $D^{(0)}$ résultant de l'arc total ainsi mesuré. Si cet arc est assez grand pour que les variations des degrés terrestres puissent y être sensibles, ou si l'on veut seulement y constater leur caractère, soit de constance, soit de variabilité, on mesurera la distance du pôle au zénith dans plusieurs stations intermédiaires entre les extrêmes; et l'on comparera les valeurs des degrés $D^{(0)}$ qui correspondent aux divers intervalles de leurs parallèles consécutifs. C'est ce qu'on a fait dans la grande opération de France et d'Espagne; et nous rapporterons bientôt les résultats que cette subdivision de l'arc total y fournit.

114. On peut faire, au dernier sommet S_n, une vérification très-importante. La construction que nous avons employée pour prolonger la ligne méridienne du premier sommet S, à travers le réseau des triangles, suppose les méridiens terrestres plans. Mais, d'après la définition générale donnée page 34, ils pourraient ne pas l'être; c'est-à-dire que les points de la surface terrestre dont les méridiens propres sont parallèles à un même méridien céleste, étant considérés consécutivement, au lieu de former sur la surface du sphéroïde une ligne plane, pourraient y être répartis suivant

---

bre. Le premier terme de cette expression a été jusqu'ici le seul qu'on ait employé pour évaluer l'arc M_nN ou *la distance du parallèle à la perpendiculaire*, et il a paru suffire. Mais le second deviendrait peut-être sensible dans des réseaux de triangles où la station S_n serait rapprochée du pôle, ce qui affaiblirait la valeur de d', et par suite de tang d', qui entre ici en dénominateur. Delambre, et après lui la plupart des auteurs qui ont rapporté ou employé cette formule, y ont introduit, au lieu de d', son complément $90^\circ - d'$, qui est la latitude géographique du sommet S_n, et ils l'ont désignée par L'; en outre, ils ont remplacé le rayon R de la sphère osculatrice par la normale N comprise entre le sommet S_n et l'axe polaire réel de la terre, normale qui, dans un sphéroïde de révolution, est, en effet, la longueur du rayon des sphères osculatrices dont le centre est situé sur l'axe passant par les pôles. Alors l'expression M_nN prend cette forme

$$M_nN = \frac{\Delta^2}{2N} \operatorname{tang} L' + \tfrac{1}{4} \operatorname{tang} L' \left(1 + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang}^2 L'\right) \frac{\Delta^4}{N^3}.$$

C'est ainsi, mais en se bornant au premier terme, qu'on l'a généralement appliquée. Je rapporte cette forme, qu'on lui donne habituellement, pour faire sentir l'identité réelle des deux expressions.

Il n'y aura pas d'autre modification à faire dans la formule [1] qui donne la portion d'arc méridien D′ — D, comprise entre les deux parallèles menés aux deux extrémités boréale et australe de l'arc A. La longueur de ce segment sur le méridien elliptique, comme sur la sphère osculatrice à l'origine de l'arc, sera également

$$[1]\quad D' - D = A\cos i + \frac{1}{2}\frac{A^2}{N}\frac{\sin^2 i}{\tang d} - \frac{1}{6}\frac{A^3}{N^2}\left(1 + \frac{3}{\tang^2 d}\right)\cos i \sin^2 i.$$

L'azimut i est supposé donné autour du méridien local mené par l'origine de l'arc A, et il est à peine nécessaire de rappeler que la longueur N devra être exprimée en unités de longueur de même espèce que celles qui sont employées pour cet arc.

D′ — D étant ainsi connu, $\left(\frac{D' - D}{N}\right) R''$ sera la quantité angulaire qu'il faut ajouter à la distance polaire primitive d pour avoir, *sur la sphère*, la distance polaire de l'extrémité de l'arc A, comptée à partir du rayon central mené à cette extrémité. Je la désignerai par d', comme je l'ai fait précédemment. Mais, pour avoir la distance polaire de cette même extrémité comptée à partir de la normale elliptique qui y correspond, distance que je nommerai d'_1, il faudra multiplier la différence précédente par le facteur $1 + e^2 \sin^2 d$. On aura donc

Distance polaire de l'extrémité de l'arc A :

1°. Sur la sphère qui est osculatrice à l'origine de cet arc,

$$d' = d + \left(\frac{D' - D}{N}\right) R'';$$

2°. Sur l'ellipsoïde,

$$d'_1 = d + \left(\frac{D' - D}{N}\right) R''(1 + e^2 \sin^2 d);$$

en prenant, dans les deux formules,

$$\log R'' = 5{,}3144251.$$

avec beaucoup de soin l'angle plan a, compris entre elle et le signal S_{n-1} ou Σ_{n-1}. On mesure aussi les distances zénithales des deux branches de cet angle. De là, par les formules de la page 95, on déduit l'angle dièdre i' formé autour de la normale de S_n, entre le méridien propre à ce sommet et le plan central qui contient le dernier côté $S_n S_{n-1}$ de la chaîne. C'est l'*azimut vrai* de ce dernier côté sur l'horizon de S_n. L'opération qui le donne, et que je viens de décrire, est exactement pareille à celle que l'on a dû faire au premier sommet S pour obtenir l'azimut d'un des côtés SS_2 du premier triangle autour du méridien de ce sommet.

Si l'on négligeait l'angle dièdre que le méridien de S_n, *fig.* 18, forme en convergeant vers le pôle, avec celui de S prolongé à travers le réseau des triangles, angle qui est toujours fort petit dans les applications, l'azimut du côté $S_n S_{n-1}$, vu ainsi de S_n, serait évidemment égal à l'angle $S_n m_n N$, ou i, déjà calculé d'après les éléments géodésiques. Mais, à cause de cette convergence, il doit différer quelque peu de i, même en supposant les méridiens plans. Or, on va voir tout à l'heure que, dans cette supposition, sa valeur exacte peut se déduire des éléments du réseau combinés avec l'angle connu i. Comparant donc cette valeur calculée avec celle que donnent les opérations faites dans la verticale S_n, on devra, si les méridiens sont plans, les trouver égales entre elles, dans les étroites limites d'erreur que les éléments de cette comparaison peuvent comporter. Et si leur inégalité sort de ces limites supposables, on en devra conclure que la forme des méridiens terrestres diffère sensiblement d'un plan parfait, même dans l'étendue, toujours très-restreinte, que le réseau des triangles a pu embrasser.

116. Il reste à exposer la déduction trigonométrique. Pour en développer le calcul avec netteté, j'extrais de la *fig.* 18 les éléments dont il dépend, et je les représente à part dans la *fig.* 22, que j'établis tout entière sur la sphère locale, qui est osculatrice en S_n, dans le sens transversal au méridien propre de ce sommet. Sur cette même sphère, je place le segment $S_n m_n$ du dernier côté de notre réseau, qui se termine en m_n à la ligne méridienne du sommet S, prolongée trigonométriquement jusque-là, en supposant les méridiens plans; et j'y trace le dernier élément $m_n M_n$ de cette

l'ellipsoïde, j'y trace d'abord, à partir de l'origine S de l'arc, le segment de parallèle SΠ, limité au méridien final PS_1. Se trouvant ainsi placé sur notre sphère osculatrice, on l'obtiendra immédiatement par la formule citée, en se bornant à y remplacer le rayon R de la sphère par sa valeur actuelle N. On aura donc ainsi :

Longueur du segment de parallèle, compris sur l'ellipsoïde, entre les méridiens extrêmes de l'arc A, cette longueur étant mesurée à la distance polaire d de son origine S,

$$[4] \quad S\Pi = \frac{A \sin i \sin d}{\sin d'} - \frac{1}{6} \frac{\sin i \sin d \sin(d' + i) \sin(d' - i)}{\sin^3 d'} \frac{A^3}{N^2};$$

i est l'azimut initial de l'arc A, compté de l'équateur vers le pôle, et d' est la distance polaire de son extrémité, calculée sur la sphère par l'expression rappelée ci-dessus.

Soient r le rayon de la circonférence qui constitue un parallèle de notre ellipsoïde à la distance polaire d; r_n le rayon analogue pour toute autre distance polaire d_n. Les arcs interceptés sur ces circonférences par deux méridiens donnés, seront proportionnels en longueur à ces rayons, puisqu'ils devront soutendre le même angle au centre de chacune d'elles. En conséquence, si l'on désigne par $S_n \Pi_n$ ce que deviendrait ici SΠ étant mesuré sur l'ellipsoïde à la distance polaire d_n, on aura

$$S_n \Pi_n = S\Pi \frac{r_n}{r}.$$

Maintenant, plaçons notre ellipse génératrice dans le plan de la fig. 40; et, ayant marqué sur son contour deux points S, S_n, situés aux distances polaires respectives d, d_n, menons en ces points deux normales terminées à l'axe polaire ; elles formeront respectivement avec lui ces mêmes angles, par définition ; et, en nommant N, N_n leurs longueurs, on aura

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \cos^2 d)^{\frac{1}{2}}}; \qquad N_n = \frac{a}{(1 - e^2 \cos^2 d_n)^{\frac{1}{2}}}.$$

Par les points S, S_n menons à l'axe polaire deux perpendiculaires que nous terminerons à cet axe ; ce seront les rayons r, r_n des pa-

rallèles de ces deux points. Or, leur relation de position avec les normales donne évidemment

$$r = \mathrm{N} \sin d, \qquad r_n = \mathrm{N}_n \sin d_n;$$

expressions dans lesquelles d et d_n sont des distances polaires elliptiques. Multipliant donc l'arc SΠ par le rapport de ces valeurs, nous aurons :

Longueur du segment de parallèle, compris sur l'ellipsoïde entre les méridiens extrêmes de l'arc A, cette longueur étant mesurée à la distance polaire elliptique d_n,

$$[4] \quad \mathrm{S}_n \Pi_n = \mathrm{A} \frac{\mathrm{N}_n \sin i \sin d_n}{\mathrm{N} \sin d'} - \frac{1}{6} \frac{\sin i \sin d_n \sin(d'+i) \sin(d'-i)}{\sin^3 d'} \frac{\mathrm{A}^2 \mathrm{N}_n}{\mathrm{N}^3}.$$

i est toujours l'azimut initial de l'arc A, et d' est la distance polaire de son extrémité calculée sur la sphere osculatrice à son origine, comme précédemment. Sur une sphère, les normales N, N_n seraient toutes deux égales au rayon R, ce qui reproduirait la formule de transport établie pour ce cas, page 167. Mais, sur l'ellipsoïde, leurs longueurs changent avec la distance polaire, et le segment de parallèle, intercepté entre les mêmes méridiens, se trouve modifié par ces variations.

191. Les formules [1], [2], [3], [4], transportées ainsi à l'ellipsoïde, donnent tous les résultats que l'on y peut déduire d'un seul arc géodésique dont on connaît la distance polaire initiale vraie d, l'azimut initial i, et la longueur A. Pour les appliquer aux côtés consécutifs d'une triangulation continue, il faut se procurer les mêmes éléments de calcul propres à chacun d'eux. Désignons les stations consécutives par S, S_1, S_2, . . ., et nommons A, A_1, A_2,... les longueurs des arcs sphériques interceptées entre elles, lon-

Delambre ne l'a éludé qu'en limitant l'approximation par des restrictions qui ne sont qu'incomplétement justifiables. Or, on évite tous ces inconvénients, par une combinaison de nos trois équations, qui donne directement $\sin(i - i')$ par une expression finie, rigoureusement exacte, et toujours très-aisée à réduire en nombres. Pour cela, je déduis d'abord des équations (2) et (3) les deux suivantes :

$$\sin d \sin\alpha \cos i = -\cos d' + \cos d - 2\cos d \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha;$$
$$\sin d' \sin\alpha \cos i' = +\cos d - \cos d' + 2\cos d' \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Retranchant la première de la seconde, j'obtiens

$$(\sin d' \cos i' - \sin d \cos i) \sin\alpha = 2(\cos d + \cos d') \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Or, on a identiquement

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha \cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

et

$$\cos d + \cos d' = 2\cos\tfrac{1}{2}(d' + d)\cos\tfrac{1}{2}(d' - d).$$

En vertu de la première, $2\sin\frac{1}{2}\alpha$ disparaît une fois des deux membres, comme facteur commun ; et, en divisant le résidu par $\cos\frac{1}{2}\alpha \sin d'$, on a

$$\cos i' - \frac{\sin d}{\sin d'}\cos i = \frac{2\cos\frac{1}{2}(d' + d)\cos\frac{1}{2}(d' - d)}{\sin d'}\tang\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Or, en vertu de l'équation (1), le rapport $\frac{\sin d}{\sin d'}$ est égal à $\frac{\sin i'}{\sin i}$;

un usage légitime de cette valeur, il faut préalablement examiner le degré de précision que pourront présenter les éléments numériques d'où l'on déduit la différence μ.

118. μ est un angle que notre formule donnera en parties de la graduation du cercle. C'est la forme sous laquelle l'angle i', qui en résulte, devra être comparé aux observations azimutales faites en S_n. Mais pour l'obtenir ainsi exprimé, il faudra d'abord avoir l'arc α exprimé de la même manière. La valeur de celui-ci, déduite de l'arc A, est $\frac{A}{R}R''$. Cette conversion exigera donc déjà que l'on connaisse le rayon R de la sphère qui est localement osculatrice au sphéroïde en S_n, dans le sens transversal au méridien, et qu'on le connaisse avec assez de précision pour que la réduction de A en secondes de degré ne puisse comporter que des erreurs négligeables, ou au moins du même ordre que celles qu'on est forcé de tolérer dans les mesures pratiques les plus précises. On ne saurait évidemment obtenir cette certitude qu'après une discussion générale de la figure de la terre. Ainsi, par nécessité, l'application de la formule à la vérification délicate que nous nous sommes proposée, devra être reculée jusque-là. On voit en outre qu'on accroîtra la probabilité de son exactitude, si l'on dispose les derniers triangles du réseau de manière que le segment $S_n m_n$, *fig.* 18, approche d'être perpendiculaire au dernier élément $m_n M_n$ du méridien primitif. Car alors il s'en faudra de peu qu'il ne le soit aussi au méridien $S_n P$ de la station S_n. Et cette circonstance l'assimilera de plus près à la surface terrestre, en l'écartant moins du sens d'osculation transversal que nous avons adopté.

La connaissance du rayon R sera nécessaire encore pour convertir en secondes de degré l'élément de l'arc méridien $m_n M_n$, ou U, qui, ainsi exprimé, donnera u égal à $\frac{U}{R}R''$; d'où l'on déduira, sous la même forme, l'angle d, égal à $d'-u$. Ici le sens d'osculation transversal attribué à la sphère locale semble avoir un inconvénient grave, puisque l'élément $m_n M_n$ appartiendrait de plus près à la surface réelle, s'il était appliqué sur une sphère osculatrice suivant le méridien même. Mais cet inconvénient sera considérablement affaibli par la précaution ci-dessus recommandée, de rendre le seg-

ment $S_n m_n$ presque perpendiculaire à cette dernière direction. Car alors, U ou $m_n M_n$ devenant fort petit, l'impropriété du sens d'osculation de la sphère sur laquelle on l'applique produira évidemment un effet absolu moindre, dans la valeur totale de d que u complète. Et comme les deux rayons d'osculation extrêmes, situés sur une même normale, ont toujours des longueurs très-peu différentes dans l'ellipsoïde terrestre, comme nous le constaterons plus tard, leur inégalité pourra n'avoir qu'une influence insensible sur l'évaluation angulaire du petit élément $m_n M_n$ ainsi atténué.

119. Les précautions précédentes étant admises, la différence $i - i'$ sera réductible en nombres, puisque les autres éléments angulaires i, d', sont donnés immédiatement par l'observation, en parties de la graduation du cercle; et la valeur de i' qu'on en déduira, présentera toutes les chances présumables d'exactitude. Mais, pour la pouvoir comparer au relèvement azimutal du segment $S_n m_n$, il faut examiner si ces deux angles i', l'un observé, l'autre déduit des triangles sphériques, devront ici présenter des valeurs mathématiquement égales, ou ne différant de l'égalité que par des quantités insensibles dans l'hypothèse des méridiens plans que nous considérons. Or, d'abord, la branche qui les limite dans le sens du méridien sera commune, puisque la sphère, qui est osculatrice transversalement à ce plan en S_n, est tangente au sphéroïde dans tous les autres sens; de sorte que la droite qui touche la section du méridien vrai en ce point, y touche aussi le cercle méridien de la sphère. L'autre côté de l'angle *ob-*

[redacted]

ce même temps. Donc, en général, si l'on nomme H_0, H_n les temps absolus que les deux observateurs comptent simultanément sur leur propre horloge, *à un même instant physique*, on aura toujours

$$H_n + \frac{I''}{15} = H_0.$$

D'après cela, si l'on pouvait connaître, pour un même instant quelconque, la différence $H_0 - H_n$, l'angle I'' se déduirait de cette égalité. C'est à quoi l'on parvient en faisant apparaître entre les deux stations un signal soudain, visible de l'une et de l'autre, tel que le produit l'inflammation d'une petite quantité de poudre. Car l'instant de l'apparition étant noté par chaque observateur sur sa propre horloge, la différence de ces indications donne $H_0 - H_n$. Si ces identifications pouvaient se faire avec une parfaite rigueur, une seule suffirait. Mais, comme elles comportent inévitablement quelque incertitude, on réitère la même épreuve un grand nombre de fois, à des instants fixés, en les espaçant par des intervalles de temps convenus d'avance, et l'on atténue, par compensations, les erreurs partielles, en prenant la moyenne de tous les résultats ainsi obtenus. Ayant donc ainsi $H_0 - H_n$, on en conclut

$$I'' = 15(H_0 - H_n).$$

Cette évaluation astronomique de I'' peut alors être comparée à son évaluation géodésique (*). Or, celle-ci est déduite de la longueur de l'arc mesuré, combinée avec sa distance polaire observée et avec les éléments a, e^2, de l'ellipse qui représente la forme générale

qui pourraient fausser la comparaison, en altérant les valeurs des éléments observés sur lesquelles on l'établit.

194. L'évaluation géodésique de I″ offre peu d'incertitude. Ses éléments sont, 1° les distances polaires des stations extrêmes qui se déterminent astronomiquement avec beaucoup de précision; 2° la longueur de l'arc. Elle se conclut d'une triangulation, ordinairement appuyée sur plusieurs bases qui donnent la longueur absolue de ses côtés principaux, qu'elles vérifient par leur déduction mutuelle. Les segments du parallèle qui la traversent se calculent avec exactitude d'après ces éléments, au moyen des formules que nous avons établies, en supposant qu'on ne les tronque point par des simplifications hasardées, qui pourraient diminuer leur précision; 3° enfin, les éléments a, e^2, de l'ellipse générale sont connus, avec une approximation qui suffit certainement pour assurer les petites corrections qui en dépendent. La valeur de I″, obtenue ainsi, représente donc bien l'amplitude vraie que devrait occuper l'arc mesuré du parallèle, en l'appliquant sur l'ellipsoïde terrestre, considéré dans la régularité abstraite de sa configuration générale. On peut donc légitimement l'employer comme premier terme de la comparaison.

Mais l'évaluation astronomique de I″, par les différences des temps absolus, ne comporte pas, à beaucoup près, autant de sûreté. D'abord son expression montre qu'une erreur de 1ˢ de temps, commise dans l'appréciation de $H_n - H_0$, en produit une de 15″ de degré sur sa valeur. Or, les erreurs de cette appréciation se composent, 1° de celles qu'on peut commettre sur l'évaluation du temps absolu dans chaque station où les signaux instantanés s'observent; 2° de l'application qu'on fait à chaque horloge du phénomène perçu, soit qu'on l'effectue directement, ou en y transportant l'époque de la perception par l'intermédiaire d'un chronomètre; 3° de l'inégalité qui existe entre le jugement que chaque observateur porte sur l'époque comptée du phénomène perçu. Car, dans les observations qui se font, par exemple, avec l'instrument des passages, on a remarqué que l'occultation des étoiles, par chaque fil du réticule, est rapportée, par différents observateurs, à des temps quelque peu différents de l'horloge qu'ils écoutent; ce qui produit une inégalité d'identifica-

vateur, présentaient des différences s'élevant jusqu'à 40 et 50 secondes de degré; de sorte qu'une répétition excessive de résultats individuellement si imparfaits pouvait à peine faire espérer qu'ils se rectifiassent suffisamment par des compensations mutuelles. Néanmoins, les incertitudes finales que l'on peut supposer dans les déterminations ainsi obtenues ne semblent pas assez fortes pour expliquer les écarts d'un ordre, parfois presque égal, et dépourvu de toute loi, que l'on découvre sur plusieurs points de ce grand arc entre les azimuts i' calculés et déduits. C'est ce qu'a fait remarquer Delambre, en rapportant les éléments de cette comparaison dans son ouvrage intitulé : *Base du système métrique décimal*, tome III, page 85. Il est difficile de ne pas croire, avec lui, que des discordances, à la fois si fortes et si capricieuses, ne résultent pas, au moins en partie, d'irrégularités locales réellement existantes dans la configuration du sphéroïde terrestre. Cette conséquence a été confirmée par les écarts du même ordre que d'autres observateurs ont constatés dans des opérations géodésiques faites avec toutes les précautions imaginables, où les azimuts ont été observés avec des instruments de passage soigneusement réglés; et l'on verra plus loin que les longueurs des degrés du méridien présentent aussi des anomalies pareilles dont la réalité ne saurait être mise en doute.

123. La formule [2], que nous venons d'établir page 148, peut servir généralement pour calculer, par déduction, les azimuts de tous les côtés d'un réseau de triangles, autour du méridien de la station qui constitue chaque sommet. Et, en la combinant avec celles que nous avons formées dans la page 108, pour la résolution directe des triangles sphériques par approximation, on peut en conclure immédiatement toutes les portions successives de l'arc méridien qui traverse un même réseau de triangles, sans avoir besoin de décomposer ce réseau en triangles partiels, comme nous l'avons jusqu'ici supposé. Avant d'exposer cette importante application, je simplifierai l'énoncé de toutes les questions analogues que nous aurons à résoudre, par un changement de dénomination que je n'ai pas cru devoir y introduire plus tôt. En considérant les sommets S, S_1, S_2, ..., S_n de nos triangles sphériques établis sur le sphéroïde terrestre

gueur de l'arc elliptique compris sur l'ellipsoïde, entre les parallèles réels de ces mêmes points, ce qui permettra encore de les substituer l'un à l'autre. Le seul résultat du calcul sphérique qui aura besoin de modification pour être transporté à l'ellipsoïde, sera la distance polaire d' de l'extrémité de l'arc A. Car, exprimant dans ce calcul l'angle S_1NP, que le rayon central NS_1 forme avec l'axe polaire de la sphère, il faudra y faire quelques changements pour avoir la distance polaire elliptique S_1N_1P, comptée à partir de la normale réelle S_1N_1, menée au même point de l'ellipse génératrice. Mais on va voir que cette correction, très-facile à évaluer, sera toujours très-petite, comme je l'ai annoncé précédemment.

183. Pour établir les deux dernières propositions que je viens d'énoncer, je reproduis à part le méridien elliptique final PS_1N dans le plan de la *fig.* 37. Je place en N, sur son axe polaire, le centre de la sphère qui a été transversalement osculatrice à l'origine S de l'arc A, *fig.* 36; et sur son contour je marque un point S situé sur le même parallèle que cette origine, en sorte qu'il s'y trouvera aussi à l'extrémité d'une normale SN formant avec l'axe polaire le même angle d que la normale primitive de la *fig.* 36, ce qui lui donnera également pour longueur N. Puisque notre sphère, décrite dans cette figure avec le rayon NS, est osculatrice à l'ellipsoïde suivant toute la circonférence qui forme le parallèle réel de S, sa section par le plan du méridien elliptique de la *fig.* 37 sera un cercle décrit du même centre N et tangent à l'ellipse génératrice au point que nous y avons désigné par S. C'est sur ce cercle que la résolution du triangle sphérique de la *fig.* 36, place l'extrémité de l'arc SS_1, d'après sa longueur donnée A et son azimut de départ i. Elle l'y porte par exemple en S'_1 à une certaine distance polaire $d+\delta$, différente de d, telle que l'arc circulaire SS'_1 a pour longueur la valeur $D'-D$ donnée par la formule [1] de la page 159; et conséquemment l'angle δ, ou SNS'_1, exprimé en secondes, a pour valeur $\frac{(D'-D)R''}{N}$. Maintenant si l'on marque en S_1, sur le contour de l'ellipse, le point où elle est coupée par le rayon final S'_1N, je dis que, pour les limites d'amplitude données

l'avons fait alors,

$$\alpha' = \alpha \cos i + \tfrac{1}{2}\alpha^3 \cos i \sin^2 i; \qquad \delta = \alpha \sin i - \tfrac{1}{6}\alpha^3 \sin i \cos^2 i.$$

Les termes qui seraient affectés par les puissances supérieures de α, dans ce développement, y seront toujours insensibles, à cause de la petitesse supposée de cet arc, comme nous l'avons constaté page 61.

Maintenant, selon le mode de notation employé page 78, nommons Π' l'arc PN compris entre le pôle et le point N sur le méridien primitif. Si l'on désigne par π' son homologue sur la sphère centrale, on aura par proportionnalité

$$\Pi' = R\pi'.$$

Le triangle polaire central, homologue à PS'N, sera comme lui rectangle, et il donnera, comme dans la page 78,

$$\cos \pi' = \frac{\cos d'}{\cos \delta}.$$

Si l'on développe $d' - \pi'$ par les séries, comme nous l'avons fait alors, en négligeant les quatrièmes puissances de l'arc δ qui, d'après son expression trouvée tout à l'heure, sont de l'ordre α^4 que notre approximation actuelle n'embrasse point, on aura, comme dans les pages 80 et 142 (note),

$$d' - \pi' = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\operatorname{tang} d'}.$$

Si l'on y remplace δ par son expression trouvée tout à l'heure, il

lipsoïde, ce qui aura lieu lorsque le point de contact se trouvera placé sur l'équateur même, puisque c'est là que la normale NS diffère le plus du rayon γ, qui est osculateur au même point de l'ellipse génératrice. Tel est l'objet de la *fig.* 38. Elle est complétement analogue à la *fig.* 37; seulement le point de départ de l'arc SS_1 y est placé en A, sur le contour de l'équateur à la distance polaire $d = 90°$. Dans ce cas, la normale N a son origine au centre même de l'ellipsoïde, en O; et sa longueur est égale au demi-grand axe OA, ou a, comme on le déduit de son expression générale. On suppose donc que l'arc géodésique considéré, partant de son origine équatoriale, suivant un azimut i quelconque, a embrassé, sur la sphère, une différence de distances polaires représentée par les portions AS'_1 du cercle tangent. Alors, admettant que cette différence, de chaque côté de l'axe OA, soutende, *au centre de ce cercle*, un angle S'_1OA, égal, par exemple, à 1 degré sexagesimal, on demande quelle sera la distance des points S'_1 de la sphère aux points S_1 de l'ellipsoïde qui sont situés sur le même rayon sphérique; et aussi, quel sera l'excès de longueur des arcs circulaires AS'_1, sur les arcs elliptiques AS_1, rectifiés rigoureusement? Or, par un calcul très-simple que j'expose dans une Note à la fin de la présente section, on trouve que sur la terre, dans les suppositions précédentes, l'intervalle S'_1S_1, exprimé en toises, sera $3^T,173$; et que l'arc circulaire AS'_1 excédera l'arc elliptique AS_1 de $0^T,0185$ ou moins de $\frac{2}{100}$ de toise. De telles quantités sont bien légitimement négligeables dans des évaluations pareilles; et comme elles sont les plus grandes qui puissent se réaliser dans les applications, tant à cause de l'étendue attribuée ici à la différence des distances polaires extrêmes, qu'à cause de la localité où nous la supposons exister, on doit en conclure, en toute assurance: 1° que, pour tous les arcs géodésiques compris entre des parallèles dont l'écart sera au plus de 1 degré, les points S'_1, où ils se terminent sur la sphère transversalement osculatrice à leur origine, se confondront sensiblement avec les points S_1 de l'ellipsoïde situés sur les mêmes rayons sphériques; 2° que la différence des distances polaires extrêmes, *évaluée en arcs de la sphère*, égalera sensiblement en longueur l'arc du méridien elliptique, compris entre ces mêmes rayons.

Cette expression de $\frac{1}{\operatorname{tang} d'}$, substituée dans le dernier terme de d', en produit un de l'ordre α^2 et un de l'ordre α^4. Ce dernier se réunit à celui du même ordre qui existait déjà parmi les précédents, et, après les avoir réduits entre eux, on trouve finalement (*)

$$[1] \quad d' = d + \alpha \cos i + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \frac{\sin^2 i}{\operatorname{tang} d} - \tfrac{1}{6}\alpha^3 \left(1 + \frac{3}{\operatorname{tang}^2 d}\right) \cos i \sin^2 i.$$

125. Les arcs d, d', α de la sphère centrale, qui apparaissent ici hors des signes trigonométriques, sont exprimés en parties du rayon de cette sphère pris pour unité de longueur. Si l'on veut les exprimer en secondes de la graduation sexagésimale du cercle, il faudra exprimer le rayon de la sphère centrale par cette même espèce d'unité, en fonction desquelles sa valeur sera R''. On devra

(*) La formule [1] a été donnée par Delambre dans le tome III de la *Base du système métrique*, pages 20 et 21; mais il y est parvenu différemment. Considérant le triangle PSS′ de la *fig.* 24, il pose d'abord la relation générale

$$\cos d' = -\sin d \sin \alpha \cos i + \cos d \cos \alpha;$$

puis d' devant être peu différent de d, il fait $d' = d + x$, et il obtient x en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de α, par le second mode de développement que j'ai exposé dans la note de la page 87. La voie que j'ai suivie m'a semblé préférable, d'abord comme plus simple, puis comme mettant mieux en évidence le principe et le degré d'exactitude de l'approximation. En effet, si l'on se reporte à la *fig.* 24, qui nous a servi de type, la première partie de $d' - d$, qui est α', homologue à A′, s'obtient d'abord, ainsi que δ, avec la

alors remplacer les expressions abstraites des arcs par les rapports $\frac{d}{R''}$, $\frac{d'}{R''}$, $\frac{\alpha}{R''}$, dans les termes qui les contiennent explicitement. Cela rendra la première puissance du facteur $\frac{1}{R''}$ commune à tous ces termes, et, après l'avoir fait disparaître, il restera

$$[1]\quad (d'-d)''=\alpha''\cos i+\frac{1}{2}\frac{\alpha''^2}{R''}\frac{\sin^2 i}{\tang d}-\frac{1}{6}\frac{\alpha''^3}{R''^2}\left(1+\frac{3}{\tang^2 d}\right)\cos i\sin^2 i.$$

Il faut se rappeler que, selon l'évaluation rapportée page 62, on a, en se bornant à sept décimales,

$$\log R''=5{,}3144251\text{ ; conséquemment, }\log\left(\frac{1}{R''}\right)=\bar{6}{,}6855749.$$

Si, au contraire, on veut obtenir la relation semblable qui existe entre les arcs D, D', A de la sphère terrestre, il faudra éliminer les arcs d, d', α de la sphère centrale par leurs rapports de proportionnalité avec ceux-là, c'est-à-dire les remplacer par leurs valeurs équivalentes $\frac{D}{R}$, $\frac{D'}{R}$, $\frac{A}{R}$, dans les termes où ils se trouvent explicitement. Alors une des puissances de $\frac{1}{R}$ disparaît encore comme facteur commun, et il reste

$$[1]\quad D'-D=A\cos i+\frac{1}{2}\frac{A^2}{R}\frac{\sin^2 i}{\tang d}-\frac{1}{6}\frac{A^3}{R^2}\left(1+\frac{3}{\tang^2 d}\right)\cos i\sin^2 i.$$

L'arc terrestre D'—D, ou SM', *fig.* 24, sera ainsi connu en unités de longueur de la même espèce que celles que l'on aura employées pour exprimer l'arc A ; et le rayon local R, qui devra être exprimé aussi dans cette même espèce d'unites, n'entrera que dans l'évaluation des termes correctifs associés à la partie principale A cos i. Ainsi, en raison de leur petitesse, il n'aura besoin d'être connu qu'approximativement, comme nous l'avons prouvé page 110. Pour obtenir commodément et avec exactitude la valeur du produit A cos i, il conviendra de remplacer le second facteur par son expression équivalente $1-2\sin^2\frac{1}{2}i$, ce qui le changera en

$A - 2A \sin^2 \frac{1}{2} i$, dont la première partie sera toute donnée, et la seconde s'évaluera facilement, par les Tables logarithmiques ordinaires, avec une précision toujours suffisante.

126. Dans la *fig.* 24, qui nous a servi pour établir cette formule, la station extra-méridienne S′ est représentée comme plus éloignée du pôle que la station S; et l'azimut donné i est figuré comme moindre qu'un angle droit. Quand cette dernière circonstance aura lieu en effet, cos i sera positif; et la formule donnera $d' - d$ positif, comme la figure type le représente. Mais si l'angle i se trouvait obtus, son cosinus deviendrait négatif; et s'il était assez grand dans ce sens pour que le produit $\alpha \cos i$, devenu négatif, l'emportât sur le terme toujours positif $\frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\sin^2 i}{\tang d}$, et sur le suivant, ou seulement fût égal à leur somme, la formule donnerait $d' - d$ négatif ou nul, conséquemment d' moindre que d ou égal à d. C'est-à-dire que la station S′ se trouverait plus rapprochée du pôle que la station S, ou s'en trouverait à une même distance. Ainsi, quoique établie sur un type particulier de construction, la formule [1] s'appliquera également à toutes les relations de distances polaires des stations S, S′, pourvu que l'on donne fidèlement à cos i le signe algébrique que lui assigne l'amplitude de l'angle auquel il appartient.

127. Lorsqu'on aura trouvé ainsi la valeur de l'angle d', d'après les données d, α, i, qui ont servi de base à notre calcul, on obtiendra l'azimut réciproque i' de notre *fig.* 24, par la formule rigoureuse

Si dans cette formule on fait $d = 90^\circ$, elle donnera le degré équatorial ; je le représente par $D_q^{(0)}$. Si l'on y fait $d = 0$, elle donnera le degré polaire ; je le représente par $D_p^{(0)}$; on aura ainsi

$$\log D_q^{(0)} = \log a - \log\left(\frac{180}{\varpi}\right) - k\left(e^2 + \tfrac{1}{2}e^4 + \tfrac{1}{3}e^6 + \tfrac{1}{4}e^8 \ldots\right),$$

$$\log D_p^{(0)} = \log a - \log\left(\frac{180}{\varpi}\right) + \tfrac{1}{2}k\left(e^2 + \tfrac{1}{2}e^4 + \tfrac{1}{3}e^6 + \tfrac{1}{4}e^8 \ldots\right),$$

et généralement

$$D^{(0)} = \log D_q^{(0)} + \tfrac{3}{2}k\left(e^2\cos^2 d + \tfrac{1}{2}e^4\cos^4 d + \tfrac{1}{3}e^6\cos^6 d + \tfrac{1}{4}e^8\cos^8 d \ldots\right).$$

Ainsi, lorsqu'on aura calculé le logarithme du degré équatorial dans l'ellipse obtenue, on aura celui qu'elle assigne pour toute autre distance polaire donnée d, en calculant la partie corrective qui s'ajoute à ce premier résultat. On verra tout à l'heure que, dans l'ellipse terrestre, la petitesse de e^2 fait que les trois premiers termes suffisent toujours. Ce développement équivaut à celui que nous avons déduit dans la page 197 de l'expression explicite de $D^{(0)}$, en y supposant connue la longueur du degré équatorial, qui est un de ses facteurs.

163. J'emploierai d'abord ces formules pour combiner le degré du Pérou avec le degré moyen de France et d'Espagne. D'après notre tableau de la page 181, les données du calcul seront

$$D_2^{(0)} = 56736^{\mathrm{T}},81; \qquad d_2 = 88^\circ\,28'\,59'';$$

$$D_1^{(0)} = 57024^{\mathrm{T}},64; \qquad d_1 = 43^\circ\,51'\,54'';$$

de là on tire $\dfrac{D_2^{(0)}}{D_1^{(0)}} = 1 - \dfrac{287,83}{57024,64} = 1 - \mu$;

et, en calculant μ par les Tables de logarithmes à sept décimales, avec le seul soin d'évaluer directement les parties proportionnelles par division ou multiplication des différences totales, on trouve

$$\log \mu = 3,7050735, \qquad \mu = 0,0050174674.$$

Le degré $D^{(0)}$ appartient au cercle qui est osculateur de l'ellipse génératrice, à la distance polaire d. Le rayon de ce cercle, que je désigne par γ, aura donc pour expression générale

$$\gamma = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\cos^2 d)^{\frac{3}{2}}},$$

a, e^2 étant les deux constantes inconnues de l'ellipsoïde qu'il s'agit de déterminer.

Le degré $\Pi^{(0)}$ appartient à la circonférence du parallèle situé sur l'ellipsoïde à la même distance polaire d. Soit r le rayon de cette circonférence ; r sera $N \sin d$, N étant la longueur du segment de la normale qui se termine à l'axe polaire. Mettant donc pour N son expression générale, on aura

$$r = \frac{a \sin d}{(1-e^2\cos^2 d)^{\frac{1}{2}}}.$$

Or, les rayons des deux cercles doivent être respectivement proportionnels aux arcs de 1°, mesurés sur chacun d'eux. On devra donc avoir

$$\frac{\gamma}{r} = \frac{D^{(0)}}{\Pi^{(0)}}, \quad \text{ce qui donne ici} \quad \frac{1-e^2}{(1-e^2\cos^2 d)\sin d} = \frac{D^{(0)}}{\Pi^{(0)}};$$

d'où l'on tire aisément

$$(1) \qquad \frac{e^2 \sin^2 d}{1-e^2\cos^2 d} = \frac{\Pi^{(0)} - D^{(0)}\sin d}{\Pi^{(0)}}.$$

e^2 pourra donc être déterminé par cette équation. Quand il sera conclu, on obtiendra le demi-grand axe a d'après la longueur absolue de l'un ou l'autre des degrés mesurés, puisque l'on a évidemment

$$(2) \qquad \gamma = D^{(0)}\frac{R''}{3600''} \qquad r = \Pi^{(0)}\frac{R''}{3600''}.$$

Égalant donc ces valeurs aux expressions analytiques de γ ou de r, on en déduira a, puisque e^2 aura été préalablement déterminé.

écrire,

$$\text{Azimut de S' vu de S} \ldots\ldots \quad Z = 360^\circ - i;$$
$$\text{Azimut de S vu de S'} \ldots\ldots \quad Z' = 180^\circ - i'.$$

D'après cela, quand l'azimut Z sera donné selon ces conventions, s'il est moindre que 180°, il faudra faire, dans notre formule [2], $\sin i = +\sin Z$, et appliquer la valeur résultante de i' à la première combinaison pour avoir Z'. Mais si Z surpasse 180°, il faudra faire $\sin i = -\sin Z$, et appliquer la valeur de i' à la seconde forme de Z'. Dans tous les cas, ce seront ces valeurs, ainsi déduites du premier azimut de la chaîne des triangles, qu'on devra comparer aux azimuts qui auraient été déterminés astronomiquement, dans une on plusieurs des stations suivantes.

On obtiendrait des formules analogues si l'on voulait compter les azimuts en allant du sud vers l'ouest, comme on le fait souvent. Alors, en les désignant par [Z], [Z]', on aurait généralement

$$[Z] = 360^\circ - Z, \qquad [Z]' = 360^\circ - Z';$$

ce qui donnerait

fig. 25 : $[Z] = 360^\circ - i, \qquad [Z]' = 180^\circ - i';$
fig. 26 : $[Z] = i, \qquad [Z]' = 180^\circ + i'.$

130. Enfin, après qu'on aura obtenu ces résultats, on pourra trouver directement l'angle au pôle p, par la proportionnalité des sinus des angles aux sinus des côtés opposés, ce qui, en revenant à la *fig.* 24, donnera, pour $\sin p$, ces deux expressions équivalentes :

$$[3] \qquad \sin p = \frac{\sin i}{\sin d'} \sin \alpha, \quad \text{ou encore,} \quad \sin p = \frac{\sin i'}{\sin d} \sin \alpha.$$

On réduira donc ces équations en nombres, soit immédiatement, par les Tables de sinus, soit en faisant usage de l'artifice auxiliaire, dont j'ai rappelé l'application à l'équation [2]. On obtiendra ainsi deux valeurs de p qui devront se trouver identiques; et leur accord servira de preuve pour assurer l'exactitude des calculs arithmétiques par lesquels on aura déterminé d' et i'. L'angle dièdre p, ainsi calculé, sera commun au sphéroïde et à la sphère osculatrice, puisque, par les conditions de construction assi-

ce qui donne ici

$$\log\mu = \bar{3},570831 0.$$

Je me borne à l'exprimer ainsi ; car, en ne poussant pas les évaluations au delà des centièmes de toise, ce qui serait fort inutile, puisque l'on ne peut déjà pas y répondre de ces centièmes, il suffit d'employer les Tables logarithmiques ordinaires à sept décimales dans tout ce calcul. Alors, en dégageant e^2 de l'équation (1), on a

$$e^2 = \frac{\mu}{\sin^2 d + \mu\cos^2 d}.$$

Pour profiter de la petitesse de μ, je mets cette expression sous la forme

$$e^2 = \frac{\mu}{\sin^2 d}\left(\frac{1}{1 + \frac{\mu}{\tang^2 d}}\right),$$

et, en développant le second facteur en série par la division, elle donne

$$e^2 = \frac{\mu}{\sin^2 d}\left(1 - \frac{\mu}{\tang^2 d} + \frac{\mu^2}{\tang^4 d}\ldots\ldots\right).$$

L'extrême petitesse de μ rend la convergence très-rapide. Le troisième terme ne donne déjà plus qu'une unité sur les décimales du septième ordre ; en s'y bornant, on trouve

$$e^2 = 0,00772\,087, \qquad \log e^2 = \bar{3},8876663.$$

Nous avons vu, dans la page 184, que e^2 est lié à l'aplatissement ε de l'ellipsoïde par l'équation

$$e^2 = 2\varepsilon - \varepsilon^2,$$

d'où l'on tire

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{8}e^4 + \tfrac{1}{16}e^6 + \tfrac{5}{128}e^8\ldots.$$

Mettant donc ici pour e^2 sa valeur, on trouve

$$\varepsilon = 0,00386\,9715 = \frac{1}{258,54}.$$

les transformations analogues que nous avons eu déjà l'occasion d'effectuer, j'ai cru devoir les exposer en détail pour faire bien sentir la double acception que prend le rapport $\frac{A}{R}$, dans le second membre, selon que l'on veut obtenir l'angle p exprimé par un arc de la sphère centrale dont le rayon est 1, ou en secondes de la graduation sexagésimale du cercle.

132. Revenant à la première forme, si l'on suppose le rapport α ou $\frac{A}{R}$ assez petit pour que l'on puisse négliger les α^3, la première des équations (3) donnera

$$p = \alpha \frac{\sin i}{\sin d'}.$$

Or, le développement qui donne $i - i'$ étant restreint de même, se réduit à

$$i - i' = \alpha \frac{\cos \frac{1}{2}(d' + d) \cos \frac{1}{2}(d' - d)}{\sin d'} \sin i.$$

Prenant le facteur $\frac{\alpha \sin i}{\sin d'}$ dans la première, celle-ci devient

$$i - i' = p \cos \tfrac{1}{2}(d' + d) \cos \tfrac{1}{2}(d' - d).$$

Multipliez le second membre par l'unité mise sous la forme $\frac{\cos \frac{1}{2}(d' - d)}{\cos \frac{1}{2}(d' - d)}$, cela donnera au numérateur le facteur $\cos^2 \frac{1}{2}(d' - d)$, ou $1 - \sin^2 \frac{1}{2}(d' - d)$, qui pourra être réduit à l'unité, à cause de la petitesse de $d' - d$ qui rendra le produit $p \sin^2 \frac{1}{2}(d' - d)$ toujours négligeable, l'angle p étant déjà supposé très-petit par lui-même. Il en résulterait donc

$$i - i' = p \frac{\cos \frac{1}{2}(d' + d)}{\cos \frac{1}{2}(d' - d)}.$$

Je rapporte cette expression parce qu'elle a été presentée dans des ouvrages très-répandus, et qu'elle a été aussi fort généralement appliquée. Mais elle ne me paraît avoir aucun avantage sur les expressions plus directes que j'ai rapportées; et elle me semble même

conserver inutilement, à son dénominateur, $\cos\frac{1}{2}(d' - d)$, qui ne diffère de l'unité que par des quantités de l'ordre $\sin^2\frac{1}{2}(d' - d)$ qu'on a déjà supposées négligeables précédemment.

133. Lorsqu'on a trouvé, comme nous venons de le dire, l'angle au pôle p, compris entre les méridiens sphériques des deux stations S, S', ainsi que le distance polaire d' de cette dernière, on peut aisément calculer l'arc de parallèle SΠ, *fig.* 27, qui, partant de S, est compris entre ces mêmes méridiens. Pour cela, reportons notre triangle sphérique PSS' sur la sphère complète POEE', *fig.* 28, dont O est le centre, OP ou R le rayon polaire, EE' le grand cercle équatorial décrit du même centre, avec le même rayon R, dans un plan perpendiculaire à OP. Si, par la station S, on conçoit un plan SO'Π, également perpendiculaire à OP, la section sera un cercle parallèle au cercle équatorial, mais décrit du centre O' avec un rayon r moindre que R, et dont la longueur sera $R \sin d$, d étant la distance polaire POS de la station S. La portion SΠ de ce cercle comprise entre les deux méridiens PS, PS', est l'arc de parallèle que nous voulons évaluer, et il soutend au centre O' le même angle dièdre p que nous venons d'obtenir. Or, cet angle exprimé en α représente l'arc équatorial ee' de la sphère centrale décrite du rayon 1, qui est intercepté entre les plans méridiens PSE, PS'E' de nos deux stations. Ainsi l'arc SΠ qui soutend le même angle à l'extrémité du rayon r aura proportionnellement pour longueur pr ou $pR \sin d$. Prenant donc la première expression de p en α, qui est

comme on le verra tout à l'heure, on le déduirait aisément de ce résultat. Car il suffirait évidemment de le multiplier par le rapport du nouveau rayon r_n au rayon r, conséquemment par le rapport $\frac{\sin d_n}{\sin d}$ des distances polaires qui correspondent respectivement à ces rayons. Alors, en désignant généralement par $S\Pi_n$ la longueur du nouvel arc de parallèle ainsi défini, on aurait

$$[4] \quad S\Pi_n = \frac{A \sin i \sin d_n}{\sin d'} - \frac{1}{6} \frac{\sin i \sin d_n \sin (d' + i) \sin (d' - i) A^3}{\sin^3 d' \quad R^2},$$

expression dans laquelle il faudrait toujours conserver aux éléments i, d', A, les valeurs propres aux deux stations primitives S, S', ainsi qu'à l'arc intercepté entre elles sur la sphère du rayon R.

134. On emploie cette formule pour tracer sur le sphéroïde terrestre de grands arcs de parallèles situés à une même distance polaire d_n, comme on y trace des arcs de méridiens. Pour cela on établit une triangulation générale, dirigée approximativement dans le sens du parallèle de la première station. On détermine, par l'observation, tous les angles sphériques des triangles qui la composent, et on la lie trigonométriquement à une ou plusieurs bases mesurées, d'où l'on déduit la longueur du côté qui s'y rattache, puis successivement tous les autres, par l'intermédiaire des côtés communs aux triangles consécutifs. Pour tout cela, les méthodes d'observation et les procédés de calcul sont les mêmes que dans les triangulations méridiennes. De même encore, à la première station, supposée S, *fig.* 27, on détermine astronomiquement la distance angulaire d, du pôle au zénith, et l'azimut i que le côté SS' ou A du premier triangle forme avec la direction de son méridien PSm. Considérant alors le triangle polaire PSS' comme établi sur la sphère qui est osculatrice en S, transversalement au méridien PS, on en conclut, comme nous l'avons expliqué tout à l'heure, 1° la longueur de l'arc SΠ, compris, sur le parallèle de S, entre les deux plans méridiens PS, PS'; 2° l'azimut i' du côté A sur l'horizon sphérique de S'; 3° la distance d'

du pôle au zenith en S', comptée à partir du rayon mené à S' du centre de la sphère. Si la terre était exactement sphérique, ou seulement si elle pouvait être supposée telle dans une petite étendue d'un même parallèle, le même calcul pourrait se continuer ultérieurement sans modification ; et les résultats obtenus dans le premier triangle polaire, étant successivement transportés à la station S', puis aux suivantes, suffiraient pour obtenir toutes les portions de parallèles comprises entre leurs méridiens propres, lesquelles, transportées par réduction sur le parallèle de S et ajoutées les unes aux autres, composeraient l'arc total. En effet, si l'on désigne par S'' la station qui suit immédiatement S', elle s'y rattachera par l'arc sphérique S'S'' ou A' qui est connu par la résolution des triangles principaux. En outre, l'angle S''S'S, ayant été préalablement déterminé dans ces mêmes triangles, on en retranchera i' qui vient d'être obtenu, et l'on aura l'angle S''S'P, dont le supplément S''S'm' sera l'azimut du côté A' sur l'horizon sphérique de S', compté dans le même sens que i. Enfin on connaîtra aussi la distance angulaire du pôle au zénith en S', qui sera d'. On se trouvera donc dans les mêmes conditions qu'en S, avec des données pareilles, d'où l'on déduira des résultats analogues propres à la station S'; et de celle-ci on passera de même à S'', puis à toutes les autres progressivement. Mais la surface terrestre n'étant pas exactement sphérique, ce transport ne peut plus s'effectuer avec tant de simplicité. Pour faire nettement comprendre les modifications qu'il exige, je me borne, comme précédemment, au cas réel où la terre est assimilable à un sphéroïde très-peu diffé-

autre centre n_1, suivant la normale $m_1 n_1$, différente de mn en lo gueur, et située dans un autre méridien. Ces circonstances, joint à l'égalité des angles opposés formés en m_1 sur l'horizon de n empêchent ces plans de coïncider, si ce n'est dans deux cas : d'abo quand l'azimut de départ i est nul, ce qui rend tous ses dériv pareillement nuls, et fait coïncider tous les méridiens des poin m, m_1, m_2, avec le méridien primitif; secondement, lorsq l'angle i est égal à 90° et le point m placé en A à la distance p laire de 90°, sur l'équateur même. Car alors, l'azimut PM_1A éta aussi 90° comme celui de départ, et la normale OM_1 partant d même centre O, dans le même plan équatorial, l'opposition d angles en M_1 maintient l'élément M_1M_2 dans ce même plan; sorte que, pour ce système de données, la ligne de plus courte di tance est la circonférence équatoriale elle-même. Or, ce dern résultat a toujours lieu sur la sphère, parce que les données in tiales peuvent toujours être ramenées à des conditions pareille En effet, soit, *fig.* 42 *bis*, m le point de départ pris, partout où l'o voudra, sur le méridien Pm, et soit i l'azimut initial quelconq que doit suivre le premier élément mm_1. Menez en m un arc grand cercle perpendiculaire à cet élément, et soit P′ son pôle, qui fera l'arc $P'm$ égal à un quart de la circonférence. Alors, en pr nant le plan qui contient $P'm$, pour le méridien de départ de no construction, ce qui ne changera rien aux conditions ultérieures tracé, l'arc $P'm_1$, mené du même pôle, sera aussi perpendicula à $m_1 m$, et l'opposition des angles azimutaux formés en m_1 co nuera la même condition de perpendicularité qui, dès lors

ci-dessus établies, peuvent servir à calculer la longueur totale d'un arc méridien compris entre deux stations S, S_n, liées entre elles par un réseau de triangles sphériques, sans avoir besoin de subdiviser ce réseau en triangles partiels appuyés sur la méridienne prolongée de S, comme nous l'avons fait précédemment. Pour cela je reproduis, dans la *fig.* 30, le même réseau que nous avions déjà considéré *fig.* 18. On suppose de même que l'on connaît les angles sphériques de tous les triangles, les longueurs absolues de tous leurs côtés, l'angle azimutal Z que l'un de ces côtés, par exemple SS′, forme, en S, avec la direction de la méridienne locale, enfin les distances angulaires d, d_n du pôle au zénith vrai des deux stations extrêmes S, S_n. Pour simplifier la première exposition du raisonnement, supposons d'abord toute la chaîne des triangles établie sur une même sphère dont P soit le pôle et R le rayon, exprimé dans l'espèce d'unité de longueur qu'on aura choisie, par exemple en toises. Il n'y aura plus aucune construction à faire. Car, connaissant la longueur de l'arc SS_1, l'angle azimutal Z, et la distance d du pôle au zénith observée en S, la formule [1], page 159, donnera immédiatement la longueur de l'arc SM_1, compris sur le méridien de S entre les parallèles des deux stations S, S_1. Soit $(D)_1$ la longueur de cet arc, exprimé en unités de même nature que R; sa valeur angulaire, en secondes de degré, sera $\frac{(D)_1}{R} R''$. En l'ajoutant à d qui est connu, la somme d_1 sera la distance angulaire du pôle P au zénith de la station S_1. Avec ces deux angles, et l'arc SS_1 ou A qui, réduit aussi en

appliquant les mêmes formules, on en conclura de même l'arc $S_1\mu_4$, compris sur le méridien de S_1 entre les parallèles des stations S_1, S_1, plus l'azimut de S_1 vu de celle-ci. Or, ce parallèle est ici supposé tracé autour du même pôle commun P. Donc, si on le prolonge idéalement jusqu'au méridien primitif PS*m*, qu'il rencontrera en M_4, l'arc M_1M_4 sera égal à $S_1\mu_4$, puisque tous les méridiens sont pareils et partent du même pôle; de sorte que l'on connaîtra ainsi l'arc total SM_4 compris entre les parallèles de S et de S_4 sur ce premier méridien. On voit même, par la figure, qu'on aurait pu l'évaluer d'une autre manière, en prenant pour intermédiaire la station S_3, ce qui fournira une vérification des calculs par lesquels cet intervalle aura été conclu. Arrivé ainsi à la station S_4, on passera aux suivantes de la même manière, en calculant les différences d'arcs méridiens compris entre leurs parallèles successifs jusqu'à ce que l'on parvienne à la plus australe S_n. Le parallèle de celle-ci, conduit jusqu'au méridien primitif PS*m*, donnera la dernière portion d'arc méridien compris entre elle et la précédente. La somme de tous ces intervalles consécutifs composera l'arc total du méridien primitif SM_n, compris entre les parallèles extrêmes du réseau total. On pourra, en outre, déterminer, par la formule [3] les angles polaires compris entre les méridiens de toutes les stations que l'on aura accouplées successivement; et la formule [4] donnera encore, si l'on veut, les longueurs des arcs de parallèles que ces méridiens interceptent à partir de chacune des mêmes stations.

136. Dans la série des opérations que je viens de décrire, le rayon R de la sphère qui porte les triangles sert d'abord pour réduire en secondes les portions successives des intervalles méridiens donnés par la formule (1), afin d'obtenir la distance angulaire du pôle au zénith dans la station suivante; et il sert encore pour opérer une conversion pareille sur les côtés mêmes des triangles, afin d'obtenir les azimuts de ces côtés sur les horizons successifs des diverses stations. Mais il importe de remarquer que, si l'on a pour but unique ou principal d'obtenir la longueur de l'arc méridien compris entre les parallèles des stations extrêmes S, S_n, la longueur absolue du rayon R n'a pas besoin d'être connue avec la dernière

rigueur. Car, si l'on examine la formule [1], qui donne les portions (D) d'arc méridien comprises entre les parallèles des stations consécutives, on verra d'abord que les distances angulaires d du pôle au zénith n'y entrent que dans les termes correctifs toujours très-petits, de sorte qu'une légère erreur sur cet élément n'aurait qu'une très-faible influence sur les valeurs totales de (D). La même considération s'applique aux valeurs des azimuts i qui entrent dans ces mêmes termes. Quant au terme principal de (D), qui est $A \cos i$, si on le décompose en $A - 2A \sin^2 \frac{1}{2} i$, les petites erreurs qui pourraient affecter l'évaluation de i n'y auront qu'une influence très-atténuée. Donc, lorsque le rayon R sera seulement connu avec une approximation qui ne laisse que très-peu d'incertitude sur les rapports $\frac{A}{R}$ et $\frac{(D)}{R}$, les portions de l'arc méridien comprises entre les parallèles des stations consécutives devront s'obtenir ainsi très-exactement.

157. Maintenant, si nous supposons le réseau des triangles établi sur un sphéroïde presque sphérique et de révolution autour de l'axe polaire céleste, il faudra placer les stations successives sur autant de sphères différentes, transversalement osculatrices à leurs méridiens propres, ayant ainsi toutes leurs centres placés sur ce même axe, et leurs rayons polaires coïncidents avec lui en direction. Commençant alors par la station S, où la distance vraie d du pôle au zénith a été observée, on la concevra établie sur une sphère pareille ayant pour rayon R, dont la valeur approximative devra être supposée connue. Alors, ayant aussi, comme précédem-

ment. Mais la distance angulaire d' du pôle au zénith, qui a été donnée par le calcul à partir du rayon CS_1 de la sphère précédente, devra subir une petite correction pour être rapportée à la normale vraie de S_1, laquelle formera généralement avec ce rayon un petit angle qu'on devra évaluer d'après la connaissance générale du sphéroïde. Cette réduction étant supposée faite, on se retrouvera en S_1, dans les mêmes conditions où l'on était en S, avec des données pareilles. On y évaluera donc de la même manière l'intervalle méridien $S_1\mu_1$, qui se transportera encore sur le méridien primitif de S et s'y appliquera à la suite de SM_1, avec sa vraie valeur, puisque tous les méridiens sont pareils, le sphéroïde étant supposé de révolution. En continuant ainsi progressivement jusqu'à la dernière station S_n, on connaîtra la longueur totale de l'arc méridien compris entre son parallèle et celui de la première station S d'où l'on est parti.

138. Les mêmes considérations que nous avons appliquées tout à l'heure au cas d'une sphère unique montreront ici encore que les rayons osculateurs successifs R, R_1,... n'ont besoin d'être connus qu'approximativement, pour l'évaluation des termes correctifs où ils entrent comme dénominateurs. Mais ils seront nécessaires, en outre, pour calculer, par déduction, les azimuts successifs i', dont l'angle calculé d' est aussi un élément. Heureusement, dans ces applications, les rayons successifs R, R_1,... ne varient que par des différences très-petites, que l'on peut toujours évaluer avec une approximation suffisante, d'après la connaissance générale de la forme du sphéroïde obtenue antérieurement.

139. Delambre considérait la méthode précédente comme la plus simple et la plus directe que l'on pût employer pour trouver l'arc total SM_n, *fig.* 30, et il la préférait, à cause de la régularité de son application, à celle qui fait obtenir les mêmes résultats en prolongeant les côtés des triangles successifs jusqu'au méridien primitif PS*m*, comme je l'ai exposé d'abord sur la *fig.* 18. En supposant que l'on calcule les azimuts successifs et les angles polaires par les formules [1] et [2], il est évident que les deux méthodes doivent conduire à des résultats identiques si on les applique exactement. Car les distances successives du pôle au zénith, dont on fait usage dans la dernière

méthode que je viens d'exposer, s'obtiennent avec un degré d'approximation exactement égal à celui que donne la règle de Legendre pour résoudre les triangles sphériques primitifs ou auxiliaires que l'on emploie dans la première ; et tous les autres éléments des calculs successifs résultent rigoureusement des formules [2] et [3], d'après cette unique évaluation. Chacun pourra donc employer celui des deux procédés qui lui paraîtra le plus commode ; et, en effet, l'application qui en a été souvent faite à un même réseau de triangles a donné des résultats complétement pareils quand les calculs ont été exactement effectués.

140. M. Largeteau a judicieusement combiné l'emploi des deux méthodes pour calculer le plus simplement possible l'arc de méridien compris, dans la triangulation d'Espagne, entre les parallèles de Montjouy et de Formentera. Le réseau qui lie ses stations extrêmes est représenté *fig.* 50 et 51, avec deux systèmes différents de constructions géométriques, par lesquelles M. Largeteau a déterminé concurremment l'arc méridien intercepté. Ces deux systèmes partent d'une origine commune que j'indiquerai d'abord. En jetant les yeux sur ces figures, on voit que les deux stations extrêmes, Montjouy et Formentera, sont situées sur des méridiens peu différents. Mais la nécessité de traverser la mer qui les sépare a forcé de rejeter d'abord le réseau des triangles vers l'ouest, puis de le ramener vers l'est sur cette dernière station, par des côtés d'une étendue considérable. C'est pourquoi, si l'on voulait déterminer les intervalles méridiens des stations les plus écartées vers l'ouest, par la première méthode, en prolongeant les constructions

angulaire d du pôle au zénith. La résolution des triangles qui rattachent S′ à M, étant effectuée de proche en proche, par les formules que nous avons établies, a fait connaître l'angle p, et la distance angulaire d' du pôle, au zénith de S′ sur l'ellipsoïde adopté. De là on peut déduire l'arc D′—D de l'ellipse génératrice, qui est compris entre les parallèles de ces points. On l'obtient directement par une formule que j'exposerai dans la Note II, annexée à la présente section. Maintenant, en S′, on conçoit la sphère qui serait osculatrice transversalement au méridien PS′; et, comme elle continue de l'être sur toute la circonférence du même parallèle, on admet qu'elle comprendra, sans erreur appréciable, les portions du méridien PM qui en seraient très-peu distantes. Le pôle propre de cette sphère, que je désigne par P′, est situé sur l'axe polaire de l'ellipsoïde comme le pôle vrai P, dont il s'écarte d'une quantité que j'exagère dans la figure pour l'y rendre perceptible; car elle est du même ordre de petitesse que l'excentricité. Mais, comme les plans méridiens des deux surfaces coïncident, l'angle dièdre p, compris entre eux, est le même; et, en outre, la distance polaire *angulaire* P′N′S′, du rayon S′N′, est égale à d', puisqu'il est normal à l'ellipse en S′. Cela posé, je mène sur la sphère l'arc de grand cercle S′Π perpendiculaire au méridien primitif, et je désigne sa longueur inconnue par Δ. Je désigne aussi par Π la longueur de l'arc P′Π, compris sur le méridien sphérique, entre le point Π et le pôle P′. Je vais d'abord déterminer les valeurs de ces deux éléments; après quoi nous examinerons quelles corrections ils peuvent nécessiter pour être employés sur l'ellipsoïde, à la solution

notation. En faisant ce calcul avec les Tables ordinaires de sinus à sept décimales, et bornant les évaluations aux centièmes de seconde, on trouve

$$i = 70^\circ 59' 45'',07, \qquad i' = 70^\circ\ 3' 50'',07, \qquad p = 1^\circ 19' 32'',39;$$

conséquemment

$$i - i' = 0^\circ 55' 55'',00.$$

Maintenant, de ces résultats extrayons seulement d, i, α, qui sont les données admises dans nos formules, et cherchons les valeurs que celles-ci assignent, en conséquence, aux trois autres éléments d', i', p.

Je calcule d'abord la différence $d' - d$ par son expression approximative [1] de la page 159 qui, en supposant l'arc α exprimé en secondes, est

$$(d' - d)'' = \alpha \cos i + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{R''}\frac{\sin^2 i}{\tang d} - \frac{1}{6}\frac{\alpha^3}{R''^2}\left(1 + \frac{3}{\tang^2 d}\right)\cos i \sin^2 i,$$

où il faut mettre pour données

$$\alpha = 1^\circ = 3600'', \qquad i = 70^\circ 59' 45'',07, \qquad d = 45^\circ 10',$$

et

$$\log R'' = 5,3144251.$$

Et, en me bornant, comme ci-dessus, aux centièmes de seconde, limite que nous avons adoptée dans les évaluations rigoureuses, je trouve, par les différents termes de cette expression,

$$(d' - d)'' = 1172'',29 + 27'',92 - 0'',21 = 1200'',00 = 20' 0'',00.$$

Ce résultat coïncide jusque dans les centièmes de seconde avec l'é-

Dans cette expression, l'arc $d' - \pi$ est exprimé en parties du rayon de la sphère centrale, qui est égal à l'unité de longueur. Si l'on veut l'exprimer en parties du rayon N', sa valeur sera $\frac{D' - \Pi}{N'}$ si l'on veut l'exprimer en secondes de degré, ce sera $\frac{(d' - \pi)''}{R''}$. On aura donc, dans ces deux suppositions,

$$(2)\quad D' - \Pi = \frac{N' \sin^2 \frac{1}{2} p \sin 2d'}{1 - 2 \sin^2 d' \sin^2 \frac{1}{2} p}\ ; \quad (d' - \pi)'' = \frac{R'' \sin^2 \frac{1}{2} p \sin 2d'}{1 - 2 \sin^2 d' \sin^2 \frac{1}{2} p}.$$

218. Venons maintenant à l'application de ces résultats. Δ est la distance cherchée de S' au méridien principal. On l'emploiera comme telle, sans modification, lorsque δ'' sera calculé. $D' - \Pi$ exprime la longueur du segment de méridien qui est compris, sur la sphère osculatrice, entre le parallèle de S' et le parallèle du point Π. Or, le parallèle de S' coupe le méridien primitif PM à la même distance polaire elliptique d' correspondante à l'arc elliptique D' comptée du pôle P, puisque tous les méridiens de l'ellipsoïde sont pareils. Ainsi, sa distance en arc au point M est $D' - D$, que l'on peut évaluer en toises, d'après les distances polaires elliptiques d et d' qui la limitent. Conséquemment, si l'on place, sur le méridien primitif, le petit arc sphérique $D' - \Pi$ que nous venons d'évaluer sur la sphère osculatrice, et qu'on l'y retranche de $D' - D$, le reste sera la distance en arc du point Π au point M, sur ce même méridien. On aura donc encore, sans aucune réduction:

Distance en arc de la station S' à la perpendiculaire de M

[redacted]

π_1, formé avec ce même axe par la normale elliptique vraie ΠN, menée du point Π. Mais nous avons déjà établi généralement la petite correction que nécessite un pareil transport aux pages 242-245, en prenant pour type les *fig.* 37 et 39, dont la dernière convient au cas actuel, puisque le point Π est plus rapproché du pôle que le point S'. L'application sera donc immédiate. C'est-à-dire que, lorsqu'on aura calculé le petit angle positif $(d'-\pi)$, en secondes de degré, sur la sphère osculatrice, ce qui y donnera l'angle π égal à $d'-(d'-\pi)''$, il faudra le multiplier par $1+e^2\sin^2 d'$ pour avoir l'angle π_1. On obtiendra ainsi, définitivement:

Distance polaire elliptique vraie du pied de l'arc perpendiculaire S'Π sur le méridien primitif,

$$\pi_1 = d' - \frac{R''\sin^2\frac{1}{2}p\sin 2d'}{1-2\sin^2 d'\sin^2\frac{1}{2}p}(1+e^2\sin^2 d').$$

Voilà, je crois, la solution la plus simple et surtout la plus évidente du problème que nous nous étions proposé. Elle me semble préférable, par ses caractères, à celles qu'on trouve dans d'autres ouvrages, établies sur des développements analytiques extrêmement complexes, auxquels on impose des restrictions dont l'esprit ne peut pas apprécier la portée, et qui conduisent en définitive à des résultats numériques identiques, ou physiquement équivalents, à ceux que nous obtenons directement ici.

217. La petitesse du terme correctif qui dépend de $\sin^2\frac{1}{2}p$ permet de lui appliquer un mode d'évaluation approximatif qui en facilitera habituellement le calcul. Représentons-le généralement par x. Si l'on développe son dénominateur en série par la division, et que l'on se borne aux termes de l'ordre $\sin^4\frac{1}{2}p$, on aura d'abord

$$x = \frac{\sin^2\frac{1}{2}p\sin 2d'}{1-2\sin^2 d'\sin^2\frac{1}{2}p} = \sin^2\tfrac{1}{2}p\sin 2d' + 2\sin^4\tfrac{1}{2}p\sin 2d'\sin^2 d';$$

or, on a, dans les mêmes limites d'approximation,

$$\sin^2\tfrac{1}{2}p = \tfrac{1}{4}p^2 - \tfrac{1}{48}p^4;\quad \sin^3\tfrac{1}{2}p = \tfrac{1}{8}p^3 - \tfrac{1}{16}p^5;\quad \sin^4\tfrac{1}{2}p = \tfrac{1}{16}p^4.$$

Ceci étant substitué dans le second membre donne

$$x = \tfrac{1}{4} p^2 \sin 2d' + \tfrac{1}{48} p^4 \sin 2d' (6 \sin^2 d' - 1);$$

ou, si l'on exprime p en secondes de degré, ce qui sera pl commode pour le calcul numérique,

$$x = \frac{1}{4} \frac{p''^2}{R''^2} \sin 2d' + \frac{1}{48} \frac{p''^4}{R''^4} \sin 2d' (6 \sin^2 d' - 1).$$

218. Lorsqu'on substituera x sous cette dernière forme da l'expression précédente de π_1, un des facteurs, R'', disparaîtra dénominateur, ce qui conservera l'homogénéité. Mais on obtiend tout de suite cet effet, avec une application plus générale de l'év luation de x, si on l'exprime en secondes de degré, en faisant

$$(3) \qquad x'' = \frac{1}{4} \frac{p''^2}{R''} \sin 2d' + \frac{1}{48} \frac{p''^4}{R''^3} \sin 2d' (6 \sin^2 d' - 1).$$

Car on aura alors :

Distance en arc de la station S' à la perpendiculaire de M,

$$(2) \qquad D' - D - N' \frac{x''}{R''}.$$

Distance polaire elliptique du pied de la perpendiculaire S'II sur le méridien primitif,

$$\pi_1 = d' - x'' (1 + e^2 \sin^2 d').$$

Longueur de cette perpendiculaire $\quad (2) \quad N' \frac{x''}{R''}$

[redacted]

219. Pour constater que cette évaluation approximative de x'' ou $(d' - \pi)''$ sera toujours suffisante, je prends le cas extrême où l'angle p serait égal à 10°; et je supposerai, en outre, d' égal à 45°, ce qui donne à l'angle $d' - \pi$, à très-peu près, sa valeur maximum, pour une même valeur de p. On aura alors :

Par l'expression rigoureuse,

$$\tang(d' - \pi) = \tang^2 \tfrac{1}{2} p; \qquad d' - \pi = 26'18'',775 = 1578'',775.$$

Par l'expression approchée,

$$x'' = (d' - \pi)'' = \frac{1}{4}\frac{p''^2}{R''} + \frac{1}{24}\frac{p''^4}{R''^3}, \qquad (d' - \pi)'' = 1578'',77.$$

La différence des deux évaluations sera donc toujours insensible.

220. Pour sujet d'application numérique, je prendrai une des stations appartenant à la triangulation générale de la France, exécutée par les ingénieurs géographes du Dépôt de la Guerre. Tout le réseau de cette grande opération se rattache à la ligne méridienne qui passe par un point central d'une des salles de l'Observatoire royal de Paris, appelée *salle de la méridienne*. La résolution progressive des triangles, effectuée sur un ellipsoïde de révolution convenu, a fait connaître les distances polaires, tant relatives qu'absolues, de tous les sommets, ainsi que les angles dièdres p compris entre leurs méridiens propres et celui de l'Observatoire royal, qui passe par le point M adopté pour centre dans la salle désignée. On a, en outre, dans plusieurs stations, déterminé par des observations astronomiques, leur distance polaire absolue, les angles azimutaux des côtés qui s'y joignent, et même en quelques-unes leur longitude relative p, afin d'apprécier les irrégularités occasionnelles de la figure de la Terre sur l'étendue superficielle que le réseau embrasse, en comparant ces éléments de position réels avec ceux qui se déduisent du calcul géodésique pour ces mêmes points. De là on a conclu la distance de chacun d'eux à la méridienne, et à la perpendiculaire du point M; on y a joint leurs hauteurs relatives au-dessus du niveau de l'Océan, obtenues par les observations comparées du baromètre, ou des distances zénithales réciproques; et la réunion de ces résultats con-

effectuées jusqu'ici n'offrent pas un pareil caractère d'identité, cela n'aura qu'une influence très-secondaire sur les résultats généraux que nous en pourrons déduire, parce qu'à des distances égales du pôle céleste au zénith, les longueurs des degrés mesurées sur des méridiens divers approchent tellement de l'égalité, qu'on n'a pu encore y constater de différences générales. De sorte que la forme de la surface terrestre, dans ce qu'elle a de régulier, paraît être, sinon rigoureusement, du moins très-approximativement assimilable à un sphéroïde de révolution, dont l'axe coïncide en direction avec l'axe polaire céleste, et dont tous les méridiens sont sensiblement pareils. Cette hypothèse est donc, du moins, la première qu'il faille essayer de lui adapter, et le tableau suivant nous fournira les éléments nécessaires pour en faire l'épreuve :

LIEUX ou les degrés ont été mesurés.	DISTANCES moyennes du zénith au pôle boréal observées. *d.*	LONGUEURS corresp. du degré terrestre en toises de l'étalon de l'Acad. D(°).	OBSERVATIONS.
Les Andes du Pérou.	88°28′5,″	56736,81 T	Opération de Bouguer et la Condamine, recalculée par Delambre, *Base du système métrique*, tome III.
Inde.....	77.27.39	56762,30	Opérat. du colonel Lambton.
France et Espagne..	43.51.54	57024,64	Opération française.
Angleterre.....	37.57.40	57066,06	Opération du général Mudge, recalculée, pour l'amplitude terrestre, par Rodrigués, *Ph. Trans.*, 1812, part. II, p. 332.
Laponie.....	23.39.50	57196,16	Opération de Clairaut, Outhier et Maupertuis, effectuée de nouveau et rectifiée par Swanberg.

Ici, nous voyons se réaliser avec une évidence indubitable le

mode de variation que l'arc de France et d'Espagne nous avait déjà présenté. Les longueurs des degrés vont en croissant à mesure que la distance du pôle céleste au zénith du lieu devient moindre, par conséquent à mesure que les normales de la surface sphéroïdale se rapprochent de son axe de révolution. Les incertitudes que l'on peut supposer dans les déterminations de ces longueurs seraient tout à fait insuffisantes pour y produire des différences si grandes, et si continûment progressives. La surface terrestre, corrigée de ses inégalités locales, et ramenée au niveau régulier des mers, n'est donc pas exactement sphérique. Ses méridiens, supposés pareils, ne sont pas des cercles parfaits. Mais la différence est petite, à en juger par le peu de variation totale des degrés comparativement à leur longueur absolue. Le sphéroïde doit donc être, relativement, un peu aplati à ses pôles où les degrés sont les plus longs, et légèrement renflé à son équateur où ils sont les plus courts. La courbe génératrice qui représente les méridiens doit ainsi différer très-peu d'un cercle, et reproduire ces inégalités relatives de configuration, dans les points correspondants de son contour. L'idée la plus naturelle, et qui devra déjà en fournir une représentation, au moins très-approchée, c'est de l'assimiler à une ellipse, ayant son axe polaire PP_1 un peu plus court que l'équatorial AA_1, comme le représente la *fig.* 31. Mais, pour réaliser cette assimilation, et même pour savoir si elle est admissible, il faut d'abord assigner généralement les lois suivant lesquelles les longueurs des degrés varient sur le contour d'une ellipse en raison de l'inégalité de ses

court que l'autre. Faisons généralement

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a}, \qquad \text{ce qui donnera} \qquad b = a(1-\varepsilon).$$

La lettre ε représente ce que l'on appelle d'ordinaire l'*aplatissement* de l'ellipse, par conséquent aussi celui de l'ellipsoïde qu'elle devra engendrer en tournant autour de son axe polaire PP_1 (*).

Faisons encore $$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

Le radical $\pm\sqrt{a^2-b^2}$ est l'excentricité OF ou OF_1 de l'ellipse. La lettre e représente donc ici le rapport de cette excentricité au demi-grand axe a.

Si l'on prend la valeur de b en a et ε, puis qu'on la substitue

---

(*) C'est la définition établie par Delambre, *Base du système métrique*, tome II, page 662, et il s'y est conformé dans tous les calculs de ce même ouvrage. Il l'a reproduite dans son *Traité d'Astronomie*, tome III, page 555. Elle a été adoptée par les auteurs qui ont écrit après lui sur la Géodésie; en conséquence, j'ai cru devoir m'y assujettir dans un ouvrage destiné aux applications pratiques. Mais je dois cependant avertir que cette définition de l'aplatissement n'est pas celle qu'ont employée les géomètres théoriciens, par exemple Laplace et Legendre. Le premier dans l'*Exposition du Système du monde*, chap. XIV, le second dans ses recherches sur la Trigonométrie sphéroïdique, *Mémoires de l'Institut* pour 1806, page 142, appellent aplatissement le rapport $\frac{(a-b)}{b}$. Si l'on désigne celui-ci par ε', en continuant de représenter $\frac{a-b}{a}$ par ε, la condition d'égalité des valeurs de a et de b, tirées de ces deux notations, donnera

$$1-\varepsilon = \frac{1}{1+\varepsilon'}, \qquad \text{conséquemment} \qquad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

On voit ainsi que ε' surpasse ε, et que la différence est de l'ordre ε^2. Or, les termes de cet ordre, quoique très-faibles, ne sont pas toujours négligeables dans les opérations géodésiques, de sorte qu'il est bien essentiel d'y distinguer celle des deux définitions de l'aplatissement que l'on veut adopter pour l'énoncé des résultats.

dans l'expression de e^2, a disparaît, et il reste

$$e^2 = 2\varepsilon - \varepsilon^2,$$

les deux quantités e, ε sont donc toujours liées l'une à l'autre par cette relation.

Pour rendre sensibles les détails de notre figure type, j'y ai représenté le demi-axe a comme beaucoup plus long que le demi-axe polaire b. Mais, dans l'ellipse que nous voulons adapter aux méridiens terrestres, ces deux axes différeront très-peu l'un de l'autre, relativement à leur valeur totale, ce qui fait que les rapports ε, e^2 y seront exprimés par de très-petites fractions. Cela permet de calculer très-exactement et très-simplement ε, quand on connaît e^2 qui, ainsi qu'on le verra tout à l'heure, est donné immédiatement par la comparaison des différents degrés. En effet, si l'on tire ε de la relation précédente, en ne prenant que celle des deux racines qui lui donne une valeur très-petite de l'ordre e^2, on a

$$\varepsilon = 1 - (1 - e^2)^{\frac{1}{2}};$$

la petitesse de e^2, relativement à l'unité, permet de développer l'expression radicale en une série très-convergente, par la formule du binôme; et comme on a, en général,

$$(1 - u)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 - \tfrac{1}{16}u^3 - \tfrac{5}{128}u^4 \ldots,$$

en remplaçant u par e^2, il en résultera

[redacted]

entre les deux stations extrêmes ainsi rattachées trigonométriquement l'une à l'autre.

205. Tous les éléments, tant généraux que particuliers, de l'ellipsoïde terrestre que j'ai déduits, dans cette section, des longueurs des degrés mesurés sur les méridiens ou les parallèles peuvent être établis par des calculs analytiques, où l'on emploie, comme éléments, les amplitudes totales des arcs embrassés par chaque opération locale. C'est la méthode que Delambre a suivie dans son ouvrage intitulé : *Base du système métrique*, et l'on peut voir au tome II, pages 674 et suiv., la formule générale que la rectification analytique des arcs d'ellipse lui a fournie pour ce but. Mais, si l'on considère l'incertitude inévitable des données physiques sur lesquelles la solution du problème repose, on pourra légitimement douter que cette méthode, mathématiquement plus rigoureuse, et aussi plus complexe, conduise à des résultats beaucoup plus certains. Je me borne donc à l'indiquer, ayant préféré ici la marche naturelle et simple qui emploie les degrés eux-mêmes comme des éléments de combinaison suffisamment rapprochés de l'infiniment petit. C'est, au reste, la même forme de données que Laplace a employée dans le tome III de la *Mécanique céleste*, et cet exemple me justifiera suffisamment.

206. Les géomètres ont donné le nom général de *lignes géodésiques* aux courbes *de plus courte distance* que l'on puisse tracer, soit sur le sphéroïde terrestre, soit sur un sphéroïde quelconque, entre deux points donnés de sa surface. Sur la sphère, une telle ligne est l'arc de grand cercle qui passe par les points donnés; alors elle est toujours plane. Mais, pour toute autre forme de surface, les lignes de plus courte distance ne sont planes que par exception; elles sont généralement *à double courbure*. Le nom de *géodésique* leur a été donné d'après l'application spéciale qu'on en a faite à la surface terrestre. Comment peut-on les y décrire, et les déduire des triangulations sphériques établies sur cette surface? C'est ce que l'on va aisément comprendre quand j'aurai expliqué les conditions de tracé d'une ligne de ce genre sur un ellipsoïde de révolution, d'après la propriété de plus courte distance qu'on lui attribue.

rrestre. Je prends donc, d'après la page 221, où a est exprimé en toises,

$$\log a = 6,5147957 ; \qquad \log e^2 = \bar{3},8039924.$$

lors en faisant l'angle v égal à 1° ou v'' égal à 3600", on trouve d'abord, ır l'équation (1),

$$M'_1 M_1 = \tfrac{1}{2} a e^2 \sin^2 v = 3^T,173;$$

ensuite par les éléments de l'équation (2),

$$\tfrac{1}{4} a e^2 \frac{v''}{R''} = 90^T,9085$$

$$-\tfrac{1}{8} a e^2 \sin 2v = -\ 90\ ,8900$$

onséquemment, $$\frac{av''}{R''} - s = 0^T,0185$$

s sont les nombres que j'ai rapportés dans le texte. La compensation presse exacte qui s'opère dans les deux termes de $\frac{av''}{R''} - s$ pouvait se prévoir 'après la petitesse de l'angle v. Car, si l'on considérait le cube de $\sin 2v$ ımme négligeable, on pourrait remplacer ce sinus par $\frac{2v''}{R''}$; et alors, le rme $-\frac{1}{4}\sin 2v$ détruirait complétement le précédent auquel il est associé ıns la différence cherchée.

---

dans la figure. Le plus petit est celui qui coïncide avec la direction du grand axe, pour lequel $d = 90^\circ$; et sa longueur est représentée par AC_a. En donnant successivement à d ces deux valeurs dans les expressions précédentes, on trouve :

Pour le premier cas,

$$d = 0, \qquad N = \gamma; \qquad \gamma = \frac{a}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^2}{b};$$

pour le deuxième,

$$d = 90^\circ, \qquad N = a; \qquad \gamma = a(1-e^2) = \frac{b^2}{a}.$$

Dans les ellipses que nous considérons, le demi-axe équatorial a est plus grand que le demi-axe polaire b; ainsi le plus grand rayon osculateur qui correspond à $d = 0$ est plus long que b, et le plus petit correspondant à $d = 90^\circ$ est moindre que a. On a marqué ces deux centres de courbures extrêmes, aux points C_p et C_a de la figure, d'après les valeurs des deux rayons qui convenaient à ses dimensions.

150. Si, dans un même quadrant PA de l'ellipse, on conçoit, à partir du pôle P, une série de normales infiniment voisines, elles se couperont successivement, puisqu'elles auront des directions différentes et qu'elles sont dans un même plan. Leurs points d'intersection, supposés ainsi infiniment proches, seront les centres d'osculation successifs ; et la série de ces centres formera une courbe continue $C_p\, C_1\, C_2\, C_3\, C_a$ que l'on appelle *la développée du quadrant considéré*. Cette dénomination est fondée sur ce que, si l'on conçoit un fil parfaitement flexible et inextensible, qui, partant du sommet équatorial A, s'enroule sur cette courbe et se termine en C_p, puis, que l'on développe graduellement ce fil en le tenant toujours tendu sur la courbe, son extrémité A décrirait le quadrant AP de l'ellipse, en lui restant toujours normal. Une conséquence évidente de cette génération, c'est que toutes les normales menées dans un même quadrant de l'ellipse sont successivement tangentes à sa développée dans les centres d'osculation propre à chaque normale.

La grande différence de longueur relative que l'on a donnée

aux axes a et b de notre figure type, fait que la développée du quadrant PA a une étendue considérable et s'éloigne beaucoup du centre O. Cela était nécessaire pour rendre ces détails sensibles. Mais, dans les ellipses des méridiens terrestres, où b diffère très-peu de a, l'étendue de la développée est relativement beaucoup moindre et se rapproche beaucoup plus du centre O, dans lequel elle se rassemblerait tout entière si l'on faisait $b = a$, c'est-à-dire si l'ellipse devenait un cercle. En ce sens, on peut donc dire que la développée du cercle se réduit à un point unique qui est le centre même O (*).

151. Ceci va nous servir pour éclaircir une difficulté qui se présente continuellement dans le calcul des arcs méridiens, et à laquelle, je crois, on n'avait jamais fait attention. Soit $M_1 M_3$ un très-petit arc de méridien, dont $M_1 N_1$, $M_3 N_3$ représentent les normales extrêmes, et $M_2 N_2$ la normale au point moyen. Supposons cet arc assez restreint pour qu'on puisse le considérer comme se confondant sensiblement avec le contour du cercle qui serait osculateur en M_2, ce qui sera l'assimilation la plus exacte qu'on en puisse faire. C'est aussi celle que l'on emploie généralement pour évaluer les amplitudes angulaires des petits arcs de méridien, mesurés sur la surface terrestre. Nommons A la longueur de cet arc exprimé en toises, et ρ la longueur du rayon osculateur en M_2, exprimé dans la même espèce d'unités. L'angle $M_1 I M_3$, ou I, compris entre les deux normales extrêmes, est donné par les observations astronomiques. C'est la différence des distances angu-

$A = 2\varpi\rho \frac{I}{360^\circ}$. Si, au contraire, l'arc A est donné en toises, ainsi que ρ, on en conclut l'angle au centre I par l'expression inverse $I = 360^\circ \frac{A}{2\varpi\rho}$. Mais cela suppose, *ou semble supposer,* que les deux rayons menés du centre d'osculation moyen C_2, aux points extrêmes de l'arc, coïncident sensiblement avec les deux normales extrêmes, ou s'en écartent de quantités angulaires si petites, qu'on peut légitimement les négliger. Or, d'abord, la coïncidence dont il s'agit ne peut pas exister rigoureusement si le méridien n'est pas exactement circulaire; et pour les méridiens elliptiques, cela se voit par notre figure même. Car le centre d'osculation moyen C_2 étant nécessairement placé entre les centres d'osculation extrêmes, par la nature de la développée qui est convexe vers le centre O, les deux rayons C_2M_1, C_2M_3, menés de ce centre moyen aux deux points extrêmes de l'arc M_1M_3, diffèrent évidemment des deux normales correspondantes. Reste donc à examiner s'ils formeraient avec ces normales des angles négligeables. Mais ceci n'aurait lieu, même pour des méridiens aussi peu différents du cercle que ceux de la terre, qu'en restreignant l'arc M_1M_3 auquel on applique ces conversions beaucoup plus qu'on ne le fait habituellement. En effet, si l'on suppose que l'angle I, compris entre les normales, soit seulement de 2°, on trouve que les angles C_2M_1I, C_2M_3I seraient de 0″,300, ce qui est loin d'être une quantité négligeable dans des calculs précis. Toutefois le résultat de la conversion effectuée comme je l'ai dit tout à l'heure devient exact, par un effet de compensation que l'on peut concevoir sur notre figure. Car, d'après la forme convexe de la développée, les deux rayons d'osculation extrêmes C_2M_1, C_2M_3, s'écartent dans un même sens des normales correspondantes; et dans une ellipse très-peu aplatie, comme celle des méridiens terrestres, les valeurs angulaires de ces deux écarts sont sensiblement égales jusque dans les millièmes de seconde, pour un angle total I de 2°, en quelque point du quadrant de l'ellipse qu'on le suppose formé. Ainsi, en n'appliquant pas la formule de conversion à des angles plus grands que cette amplitude, et c'est ce qu'on

est bien loin de faire, l'angle $M_1C_2M_3$, soutendu par l'arc A au centre du cercle osculateur, se trouve, en somme, égal à l'angle des deux normales, jusque dans les dernières limites d'évaluation appréciables, comme on l'avait toujours supposé, sans en avoir, je crois, la démonstration. Ce résultat sera établi dans une Note qui fait suite à la section présente. Le calcul, et la *fig.* 32 elle-même, s'accordent, en outre, à montrer que, pour des relations de position pareilles, les segments M_1I, M_3I des deux normales extrêmes sont sensiblement égaux entre eux, ainsi qu'au rayon osculateur moyen M_2C_2.

152. Notre ellipse génératrice étant ainsi bien étudiée, faisons-la tourner autour de son axe polaire PP_1 pour former l'ellipsoïde de révolution que nous voulons assimiler à la surface terrestre. Dans ce mouvement, tous les points de l'ellipse décriront simultanément des circonférences de cercle dont les rayons seront leurs distances respectives à l'axe polaire. Conséquemment, l'ellipsoïde ainsi constitué aura pour méridiens l'ellipse génératrice elle-même. Or, les normales de cette ellipse deviendront les normales de l'ellipsoïde en chaque point que l'on voudra considérer. Car, d'abord elles seront perpendiculaires à la tangente de l'ellipse en ce point, et elles seront ainsi perpendiculaires à la tangente transversale du cercle, mené en ce même point perpendiculairement au plan de rotation. Étant perpendiculaires à ces deux droites, elles le seront aussi au plan qui les contient, lequel sera tangent à l'ellipsoïde dans le point spécifié. D'après cela, les points situés dans

dans le chapitre cité, pages 251 et suivantes. Il s'agit maint
l'étendre à des stations réparties sur un ellipsoïde de rév
dont la configuration est donnée conventionnellément
vais montrer qu'il s'y applique avec la plus grande facilité,
sans modification de calcul.

231. Pour le faire voir, je considère d'abord le cas simp
deux stations, dont on veut connaître la hauteur relative
fig. 47, seraient comprises dans le plan d'un même méridi
tique PM_1M_2A. On connaît, par la triangulation, les dista
laires d_1, d_2 de leurs normales propres, la position des point
où elles coupent le méridien elliptique, et la longueur
elliptique M_1M_2 qui les sépare. En effet, dans le cas que n
sidérons, cet arc sera un côté des triangles principaux; et
du peu d'étendue qu'on leur donne, on pourra, sans erreu
ciable pour l'application actuelle, l'assimiler, quant à
gueur, à un arc de cercle décrit du centre N, avec le rayon
à la normale N, menée au point M, qui est intermédiaire
et M_2. La première idée qui se présente serait donc d
d'abord, par les distances zénithales réciproques, la diffé
hauteur des deux stations S_1, S_2, au-dessus du cercle ainsi d
de transporter le résultat à l'ellipse par quelque correctio
pourrait être que fort petite. Mais cette marche présenter
inconvénients graves. A la vérité, les intervalles compris su
normale entre l'ellipse et le cercle tangent en M seront fo

inégales, diversement selon sa position, il deviendrait nécessaire de calculer la variation locale de leur inégalité, et il serait embarrassant de le faire. Ensuite, l'évaluation de la différence de niveau, même sur la sphère, suppose que les distances zénithales y sont mesurées à partir des sécantes qui seraient ici $NM_1 \Sigma_1$, $NM_2 \Sigma_2$; tandis qu'en réalité on les observe à partir des normales réelles $N_1M_1V_1$, $N_2M_2V_2$, lesquelles font avec les sécantes des angles variables qu'on ne peut pas négliger. Cela exigerait encore une autre réduction. Delambre, qui a suivi cette voie dans son ouvrage sur la *base du système métrique*, tome II, page 738, a été conduit ainsi à des calculs horriblement complexes, dont la conclusion finale a été, que toutes ces corrections lui paraissent pouvoir être habituellement négligées; et il a été imité en cela par la plupart des auteurs qui ont voulu traiter cette question après lui. Mais toutes ces difficultés disparaissent, comme par enchantement, quand on envisage le problème sous un autre aspect, et qu'on y applique les formules très-simples de la réfraction terrestre que j'ai exposées dans le tome Ier de cet ouvrage.

232. Pour cela, continuant à considérer d'abord le cas de deux stations situées dans un même méridien elliptique, *fig.* 48, je les rapporte, non pas à la sphère tangente qui serait décrite du centre N avec le rayon NM, comme dans la *fig.* 47, mais à la sphère osculatrice dans le sens du méridien même, qui serait décrite du centre C, avec le rayon osculateur elliptique γ. Cela aura deux avantages. D'abord, l'intervalle compris sur les normales de chaque station, entre l'ellipsoïde et cette sphère, sera beaucoup moindre que pour la sphère tangente décrite du centre N; et, dans son excessive petitesse, il sera, en outre, égal pour les deux stations, de sorte que leur *différence de niveau*, mesurée sur cette sphère, sera exactement la même que sur l'ellipsoïde. Ensuite, dans les plus grandes amplitudes que l'on donne à l'arc M_1M_2, les rayons osculateurs sphériques CM_1, CM_2 ne feront que des angles de quelques dixièmes de seconde, avec les normales menées des deux stations S_1, S_2, comme nous l'avons démontré pages 189 et 232. Par conséquent, si l'on emploie les distances zénithales observées à partir des normales, comme partant des prolongements M_1C, M_2C de ces deux rayons,

le résultat sera absolument le même que si l'on supposait une erreur du même ordre dans les réfractions qui affectent ces distances, lesquelles comportent toujours individuellement des variations et des altérations physiques incomparablement plus considérables, que l'on est forcé de négliger. Le calcul se fera donc ainsi très-exactement avec l'emploi du rayon osculateur au milieu M de l'arc M_1M_2, rayon dont la longueur γ peut toujours être évaluée en nombres sur l'ellipsoïde adopté, puisque les positions absolues des points M_1, M_2 sur le contour de l'ellipse sont connues.

233. Venant alors au cas où les deux stations S_1, S_2 ne sont pas comprises dans un même méridien, je les rapporte de même à la sphère qui serait osculatrice à l'ellipsoïde dans le sens de l'arc de plus courte distance mené par les pieds de leurs normales propres, *fig.* 49. Soient C le centre de cette sphère, ρ la longueurde son rayon qui peut toujours se calculer. Les résultats de cette construction seront les mêmes que tout à l'heure. Car d'abord, les intervalles compris sur chaque normale entre l'ellipsoïde et la sphère étant encore excessivement petits et sensiblement égaux, la différence de niveau des deux stations, au-dessus de la sphère, sera la même qu'au-dessus de l'ellipsoïde. Quant aux angles formés par chaque rayon CM_1, CM_2 avec les normales, ils seraient rigoureusement nuls si les deux stations étaient situées sur un même parallèle, puisqu'alors le centre de la sphère coïnciderait avec le point de rencontre des deux normales sur l'axe polaire. A partir de ce cas d'exacte nullité, ces deux angles croissent à mesure que les deux stations se rapprochent d'un même méridien. Mais puisqu'alors, à

[redacted]

des degrés, rapportées dans notre tableau de la page 181, représentent autant de petits arcs du méridien terrestre, soutendant chacun un angle de 1° au centre du cercle qui est osculateur à ce méridien, même dans les lieux où ils ont été individuellement mesurés. Mais ils ont été conclus de triangulations dont nous avons considéré toutes les parties comme appliquées sur des sphères de rayons progressivement variables, et transversalement osculatrices au méridien terrestre, ce qui suppose ces rayons égaux aux segments N des normales, et non pas aux rayons osculateurs γ de l'ellipse. N'y a-t-il pas une contradiction logique entre ces deux manières d'envisager successivement les mêmes résultats?

Pour résoudre cette difficulté, qui n'est qu'apparente, il faut revenir un moment sur la marche des calculs qui nous ont donné les longueurs des arcs. Nous avons d'abord l'arc de Pensylvanie, où elle a été déterminée par une mensuration immédiate. En divisant cette longueur par l'amplitude angulaire de l'arc céleste compris entre ses normales extrêmes, nous avons, sans nous en rendre compte alors, obtenu le même résultat que si nous l'eussions placé sur le cercle osculateur local de l'ellipse méridienne, puisque, en raison de sa petitesse, il aurait soutendu au centre de ce cercle le même angle que nous avons employé. Quant aux longueurs des arcs méridiens qui ont été déduites des triangulations, si on les suppose calculées par le théorème de Legendre, la connaissance des rayons osculateurs consécutifs sur le réseau des triangles ne devient nécessaire que pour évaluer la portion d'arc méridien comprise entre le der-

Il faut se rappeler, d'ailleurs, que la corde C et l'angle au centre sont liés l'un à l'autre, par la relation rigoureuse

$$C = 2\rho \sin \tfrac{1}{2} v.$$

L'expression précédente de C n'est que le développement de celle-ci, limitée aux troisièmes puissances du rapport $\frac{A}{\rho}$.

236. Maintenant, conformément à la notation adoptée dans le tome I, page 265, soient Z', Z'' les deux distances zénithales *apparentes*, observées ou observables en S_1 et S_2; et nommons $+\delta'$, $+\delta''$, les réfractions locales, connues ou inconnues, qu'il faudrait *ajouter* respectivement à chacune d'elles, pour avoir les distances zénithales *vraies*, rapportées à la corde rectiligne que l'on mènerait de S_1 à S_2. Le triangle rectiligne S_1CS_2 établira d'abord entre celles-ci la relation générale

$$Z' + Z'' + \delta' + \delta'' = 180^\circ + v;$$

prenant ensuite une quantité auxiliaire x telle qu'on ait

$$x = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (Z'' - Z' + \delta'' - \delta'),$$

l'expression de la différence de niveau cherchée sera

$$r'' - r' = \frac{2r'x}{1 - x}.$$

Cette expression est générale : elle ne spécifie nullement si les distances zénithales apparentes ont été observées simultanément sur la même trajectoire lumineuse, ou à des époques différentes et sur

triangulation, qu'on pourrait la négliger presque sans erreur dans les termes correctifs qui seuls la contiennent. Pour le montrer, il suffira de dire par avance, que, sur l'arc total de France et d'Espagne qui embrasse une amplitude totale de 12°48′47″, l'angle formé par la dernière normale avec la sécante menée du centre de la première sphère osculatrice, au point correspondant de la surface réelle, est moindre que 3′56″, comme je le prouverai plus tard. De sorte que l'on obtiendrait encore les valeurs individuelles des termes correctifs, avec des erreurs presque nulles, ou même insensibles, en négligeant ses variations intermédiaires, ce qui reviendrait à calculer ces termes, comme si tout le réseau entier était appliqué sur la sphère localement osculatrice à la première station. Or la longueur totale de l'arc méridien comprise entre les parallèles des stations extrêmes étant ainsi obtenue exactement, son application sur les cercles localement osculateurs dans le sens de l'ellipse se fait sans erreur en divisant sa totalité, ou ses diverses portions, par l'amplitude céleste qu'elles embrassent, et que l'observation donne, rapportées aux normales vraies de leurs points extrêmes. Ce mode de calcul, de même que le précédent, n'impliquent donc pas de cercle vicieux logique, mais seulement l'emploi des approximations successives dont l'application est universelle dans l'astronomie. Même au point où se trouve aujourd'hui la géodésie, ces approximations peuvent être converties de prime abord en résultats définitifs, la forme générale de la surface terrestre étant assez bien connue pour que l'on puisse, si on le juge convenable, cal-

conque de ces arcs exprimé en toises à l'endroit de l'ellipse où la distance angulaire du pôle céleste au zénith est d, et plaçons-le sur le cercle qui est osculateur à l'ellipse à ce même endroit, en désignant par γ la longueur du rayon de ce cercle exprimé aussi en toises. Le contour de la circonférence osculatrice sera $2\varpi\gamma$, ϖ étant le rapport de la circonférence au diamètre ; et comme ce contour comprend 360°, la longueur $D^{(0)}$ du degré considéré en devra être la 360ᵉ partie. Cela donnera l'égalité

$$D^{(0)} = \frac{\varpi\gamma}{180},$$

ou, en mettant pour γ sa valeur analytique, propre à la distance polaire d, dans une ellipse,

$$(1) \qquad D^{(0)} = \frac{\varpi}{180}\,\frac{a\,(1-e^2)}{(1-e^2\cos^2 d)^{\frac{3}{2}}}.$$

188. Lorsque e^2 est une très-petite fraction de l'unité, comme on verra que c'est le cas de l'ellipsoïde terrestre, le facteur $\frac{1}{(1-e^2\cos^2 d)^{\frac{3}{2}}}$ peut se développer, par la formule du binôme, en une série convergente qui est

$$\frac{1}{(1-e^2\cos^2 d)^{\frac{3}{2}}} = 1+\tfrac{3}{2}e^2\cos^2 d+\tfrac{15}{8}e^4\cos^4 d+\tfrac{35}{16}e^6\cos^6 d+\tfrac{315}{128}e^8\cos^8 d+\ldots;$$

ce qui donne

$$D^{(0)} = \frac{\varpi}{180}a(1-e^2)(1+\tfrac{3}{2}e^2\cos^2 d+\tfrac{15}{8}e^4\cos^4 d+\tfrac{35}{16}e^6\cos^6 d+\tfrac{315}{128}e^8\cos^8 d+\ldots).$$

Le facteur commun $\frac{\varpi a}{180}(1-e^2)$ représente la longueur du degré lorsque $\cos^2 d$ est nul, ce qui suppose $d = 90°$. C'est donc le degré équatorial; je le désignerai par $D^0_{/}$. Si e^2 est une fraction très-petite, le terme dépendant de sa première puissance est beaucoup plus considérable que ceux qui le suivent. Alors on voit que, dans une ellipse ainsi constituée, les longueurs des degrés vont en

croissant de l'équateur au pôle, presque proportionnellement au carré du cosinus de la distance polaire.

En combinant des degrés mesurés sur des parties des méridiens terrestres correspondantes à des distances polaires très-différentes, nous reconnaîtrons bientôt que, par les appréciations les plus exactes, on a à fort peu près, en toises,

$$D_q^0 = 56741^T,22 \quad \text{et} \quad \log e^2 = \overline{3},8039924.$$

Prenant donc le premier nombre comme représentant le facteur $\frac{\varpi}{180} a(1-e^2)$, on pourra évaluer tous les autres coefficients numériques des puissances de $\cos^2 d$, par les Tables de logarithmes ordinaires à sept décimales, et l'on trouvera pour la valeur d'un degré quelconque correspondant à la distance polaire d,

$$D^{(0)} = 56741^T,22 + 541^T,986 \cos^2 d + 4^T,314 \cos^4 d + 0^T,032 \cos^6 d + 0^T,00023 \cos^8 d + \ldots$$

Les deux derniers termes de cette évaluation sont déjà si faibles, que l'on ne peut répondre de pareilles quantités dans des mesures effectives; à peine peut-on espérer de reproduire celui qui les précède. Maintenant, si l'on a plusieurs mesures de degrés faites à des distances polaires peu différentes les unes des autres, le terme $4^T,314 \cos^4 d$ y sera presque constant, et les petites variations qu'il éprouvera pourront être censées se confondre avec les erreurs des observations, ainsi qu'avec les irrégularités réelles du sphéroïde terrestre. On se donnera donc une chance de compensation très-présumable, en prenant la moyenne arithmétique de tous

219. Pour constater que cette évaluation approximative de x'' ou $(d' - \pi)''$ sera toujours suffisante, je prends le cas extrême où l'angle p serait égal à 10°; et je supposerai, en outre, d' égal à 45°, ce qui donne à l'angle $d' - \pi$, à très-peu près, sa valeur maximum, pour une même valeur de p. On aura alors :

Par l'expression rigoureuse,

$$\tang(d' - \pi) = \tang^2 \tfrac{1}{2} p; \qquad d' - \pi = 26'18'',775 = 1578'',775.$$

Par l'expression approchée,

$$x'' = (d' - \pi)'' = \frac{1}{4}\frac{p''^2}{R''} + \frac{1}{24}\frac{p''^4}{R''^3}, \qquad (d' - \pi)'' = 1578'',77.$$

La différence des deux évaluations sera donc toujours insensible.

220. Pour sujet d'application numérique, je prendrai une des stations appartenant à la triangulation générale de la France, exécutée par les ingénieurs géographes du Dépôt de la Guerre. Tout le réseau de cette grande opération se rattache à la ligne méridienne qui passe par un point central d'une des salles de l'Observatoire royal de Paris, appelée *salle de la méridienne*. La résolution progressive des triangles, effectuée sur un ellipsoïde de révolution convenu, a fait connaître les distances polaires, tant relatives qu'absolues, de tous les sommets, ainsi que les angles dièdres p compris entre leurs méridiens propres et celui de l'Observatoire royal, qui passe par le point M adopté pour centre dans la salle désignée. On a, en outre, dans plusieurs stations, déterminé par des observations astronomiques, leur distance polaire absolue, les angles azimutaux des côtés qui s'y joignent, et même en quelques-unes leur longitude relative p, afin d'apprécier les irrégularités occasionnelles de la figure de la Terre sur l'étendue superficielle que le réseau embrasse, en comparant ces éléments de position réels avec ceux qui se déduisent du calcul géodésique pour ces mêmes points. De là on a conclu la distance de chacun d'eux à la méridienne, et à la perpendiculaire du point M; on y a joint leurs hauteurs relatives au-dessus du niveau de l'Océan, obtenues par les observations comparées du baromètre, ou des distances zénithales réciproques; et la réunion de ces résultats con-

stitue les éléments d'une nouvelle carte générale de la France, qui est en cours d'exécution. Les résultats généraux des opérations géodésiques et astronomiques, jusqu'ici effectuées, ont été rendus publics dans un ouvrage intitulé : *Description géométrique de la France*, dont deux volumes ont déjà paru. J'en extrais, comme sujet de calcul, les données suivantes, relatives à la position du clocher de Biarritz, l'une des stations du parallèle de Rodez, tome Ier, page 327 :

Distance polaire, obtenue par le calcul géodésique . . . . . $d' = 46°31'29'',11$

Longitude relative, comptée à l'occident du point M de l'Observatoire de Paris. $p = 3°53'37'',714$

On demande la distance de ce point à la méridienne et à la perpendiculaire du point M.

J'ai choisi ce cas parce qu'il est présenté comme exemple de calcul dans ce même ouvrage, tome Ier, page 329. Je n'ai fait que convertir en division sexagésimale les éléments de position qui, d'après des considérations plus influentes alors qu'elles ne le paraîtraient aujourd'hui, ont été malheureusement exprimées en parties de la graduation décimale, dont l'usage n'a pas prévalu.

Avec ces données je trouve d'abord :

Par l'équation (1),

$\delta'' = 2°49'28'',548 = 10168'',548;$ $\log \frac{\delta''}{R''} = \bar{2},6928338;$

cation numérique, j'adopterai ici les éléments moyens de l'ellipsoïde, qui sont donnés par notre tableau de la page 221, et je calculerai le logarithme de N′ pour la distance polaire donnée d', par son expression en série, rapportée dans la page 222. Quand on a un grand nombre de calculs de ce genre à effectuer, on forme d'avance une Table des logarithmes des normales de 20′ en 20′ pour toute l'étendue de distances polaires que la triangulation embrasse, et l'on conclut les valeurs intermédiaires par parties proportionnelles. Ici, nous devrons effectuer le calcul direct pour la distance polaire d' par la série indiquée. Je trouve ainsi, sur notre ellipsoïde :

$$\log N' = \log a + 0{,}00065\,55877 = 6{,}51545\,55877;$$

nous avons, en outre,

$$\log e^2 = \bar{3}{,}8039924.$$

En associant ces nombres aux valeurs précédentes de δ'' et x'', on obtient :

Distance du clocher de Biarritz à la perpendiculaire de M, en toises (formule 2),

$$D' - D - 3781^{T},30.$$

Distance à la méridienne de M (formule 3),

$$161542^{T}.$$

Distance polaire elliptique du pied π de cette perpendiculaire sur le méridien de M,

$$\pi_1 = d' - 238'',819 = 46^{\circ}27'30'',291.$$

Cette distance polaire surpasse seulement de 0″,001 celle qui est rapportée dans l'ouvrage cité, tome I, page 330, et l'on ne peut pas répondre d'une si petite fraction avec les Tables à sept décimales. La valeur qu'on y assigne pour la distance à la méridienne est moindre de 10^{T} que celle que nous obtenons, ce qui s'explique suffisamment par la différence des dimensions de l'ellipsoïde adopté pour la calculer. Mais l'influence de ce choix, sensible sur

les résultats numériques, ne le serait point sur la construction graphique d'une carte.

221. Si l'on voulait pour quelque but théorique tracer rigoureusement une perpendiculaire au méridien principal, en partant d'un point m, pris à volonté sur sa ligne méridienne, on y parviendrait facilement par le mode de construction successif que nous avons décrit *fig.* 42. Pour cela, on supposerait d'abord l'angle p égal à 1°, et l'on calculerait par nos formules, 1° la longueur du premier élément sphérique mm_1; 2° son azimut final i' sur le second méridien Pm_1; 3° la distance polaire sphérique d_1 du point m_1, que l'on transformerait en distance polaire elliptique d'_1, comptée sur ce second méridien, par l'emploi de la correction exprimée page 249. Avec ces données, on ferait un calcul pareil, pour passer du point m_1 au point m_2, situé sur un troisième méridien formant aussi, avec le deuxième, un angle de 1°; et l'on prolongerait ainsi progressivement la courbe par des intervalles semblables, aussi loin que l'on voudrait.

Quantité auxiliaire . . . . . $x' = -\dfrac{C}{\cos\frac{1}{2}\theta \operatorname{tang}[Z'' - \frac{1}{2}(1 - e^2)\theta]}$.

Différence de niveau :

$$r'' - r' = \left(1 + \frac{h'}{\rho}\right) x' \left(1 + \frac{x'}{2\rho} + \frac{x'^2}{4\rho^2} \ldots\right). \tag{3}$$

La marche à suivre dans les détails du calcul sera toujours la même. On formera d'abord x', puis on en déduira les diverses puissances de $\frac{x'}{2\rho}$ .. le tout par les Tables de logarithmes à sept décimales. Dans ces formules, les éléments affectés d'un seul accent appartiennent *invariablement* à la station S_1, dont les opérations antécédentes sont censées avoir fait connaître la hauteur absolue h' au-dessus de la surface de l'ellipsoïde, par conséquent au-dessus de la sphère osculatrice dont le rayon est ρ; et la corde C est toujours prise dans cette sphère même. On va voir tout à l'heure que, dans les applications pratiques, on n'aura jamais besoin de pousser l'évaluation de la série au delà de son premier terme $\frac{x'}{2\rho}$, les autres étant toujours insensibles. Je ne les ai indiqués que pour rappeler l'expression finie dont ils dérivent par développement.

242. Pour compléter l'exposition de ces formules par un exemple numérique, je choisis un système de données qui dépassera toutes les limites d'amplitude que les opérations géodésiques peuvent présenter. Je l'extrais de mon Mémoire sur les réfractions

restreindre cet angle, nous pourrons borner la série au terme où e^2 se trouve à la première puissance, ce qui nous donnera

$$(1) \qquad M'_1 M_1 = a - r = \tfrac{1}{2} a e^2 \sin^2 v.$$

Si l'on transforme de même l'expression de ds^2 en r et v, on pourra l'écrire ainsi :

$$ds^2 = r^2 \left[1 + e^4 \frac{\sin^2 v \cos^2 v}{(1 - e^2 \cos^2 v)^2} \right] dv^2.$$

Alors, en y négligeant les termes en e^4, comme nous venons de le faire, elle donnera simplement

$$ds = r\, dv = a\,(1 - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 v)\, dv.$$

Cela aurait pu se voir directement sans substitution ; car la condition de tangence établie en A rend dr de l'ordre $e^2 \sin^2 v$, par conséquent dr^2 de l'ordre des termes que nous négligeons, ce qui réduit ds à $r dv$ comme nous venons de le trouver.

Pour intégrer l'expression de ds, il faut y remplacer $\sin^2 v$ par la quantité équivalente $\frac{1 - \cos 2v}{2}$, ce qui donne

$$ds = a\,(1 - \tfrac{1}{4} e^2 + \tfrac{1}{4} e^2 \cos 2v)\, dv,$$

et alors, en l'intégrant, on a

$$s = a\,[(1 - \tfrac{1}{4} e^2) v + \tfrac{1}{8} e^2 \sin 2v].$$

Je n'ajoute point de constante, parce que je fais commencer l'arc s en A, où v est nul en même temps que lui. Dans ce calcul, l'arc v est censé exprimé en parties du rayon pris pour unité de longueur. Si l'on veut l'exprimer en secondes de degré, il faudra remplacer la lettre v par $\frac{v''}{\rho''}$. Alors l'équation

Le calcul s'effectue comme il suit :

$$\log A = 5,22184\ 20829$$
$$\log \rho = 6,80387\ 34563$$
$$\bar{1},41796\ 86266$$
$$\log R'' = 5,31442\ 51332$$
$$\log r'' = 3,73239\ 37598, \text{ d'où } v'' = 5400'' = 1^{\circ}30$$

Conséquemment,

$$\tfrac{1}{2}v'' = 0^{\circ}45'; \quad \log\cos\tfrac{1}{2}v = \bar{1},9999628.$$

Les deux distances zénithales apparentes Z', Z'' étant suppo observées simultanément, ce sera le cas de la formule (1). Co dérant d'abord le facteur extérieur à la parenthèse, j'ai p données :

$$\tfrac{1}{2}(Z''-Z') = 0^{\circ}38'13'',95; \qquad h' = 98^{m}.$$

Alors j'achève le calcul comme il suit, en restreignant désor les logarithmes à sept décimales :

$$\log C = 5,2218297$$
$$\log \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(Z''-Z') = \bar{2},0461767$$
$$3,2680064$$
$$\log\cos\tfrac{1}{2}v = \bar{1},9999628$$

[redacted]

NOTE II.

Sur la rectification générale de l'ellipse.

222. Prenons à volonté, sur le contour de l'ellipse, un point M situé à la distance polaire v, exprimant l'angle formé avec l'axe polaire par la normale menée à ce point. Soient, à cette même distance polaire, ds l'élément infiniment petit de l'arc, et γ le rayon du cercle osculateur à l'ellipse en M, on aura

$$\gamma = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\cos^2 v)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ce cercle a son centre sur la normale du point M. Par la condition de l'osculation, sa circonférence coïncide en ce point avec le contour de l'ellipse sur toute l'étendue de l'élément ds, et deux rayons menés de son centre aux extrémités de cet élément sont dirigés suivant des normales à cette courbe. L'angle qu'ils comprennent représente donc la variation infiniment petite que l'angle v subit en passant de l'une à l'autre. Exprimons généralement la valeur locale de cet angle par l'arc qu'il soutendrait au centre d'un cercle décrit avec un rayon égal à l'unité de longueur. Alors le petit angle soutendu au centre du cercle osculateur par l'élément ds sera la différentielle dv de l'angle v ainsi exprimé. Ainsi le petit arc du même cercle, qui sera compris entre ses branches et aura pour longueur $\gamma\, dv$, devra être égal à l'élément ds de l'ellipse. Cette identité, qui n'était qu'approximative quand nous l'avons appliquée à des angles d'une amplitude sensible telle que 1°, devient rigoureuse dans les amplitudes infiniment petites. Remplaçant donc γ par son expression analytique générale, la condition de cette coïncidence élémentaire sera

$$ds = \frac{a(1-e^2)\,dv}{(1-e^2\cos^2 v)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dans l'ellipse des méridiens terrestres que nous voulons spécialement en

croix, Introduction, page 90, on trouve les égalités suivantes, qui ont été établies par Euler :

$$2\cos^2 v = \cos 2v + 1,$$
$$8\cos^4 v = \cos 4v + 4\cos 2v + 3,$$
$$32\cos^6 v = \cos 6v + 6\cos 4v + 15\cos 2v + 10.$$

Ces transformations peuvent être étendues indéfiniment suivant une loi générale de leurs coefficients numériques, qui est rapportée dans l'ouvrage que je viens de citer. Je les borne ici à la puissance sixième de $\cos^2 v$, à laquelle nous avons arrêté notre développement; mais il est essentiel de remarquer que, quelque loin qu'on les prolonge, tous leurs termes demeurent constamment positifs et ne contiennent jamais que des multiples pairs de l'angle v, lorsque la puissance de $\cos v$ qu'elles remplacent est également paire, ce qui aura toujours lieu dans notre expression de ds, quelque loin qu'on la suppose prolongée.

En substituant ces expressions des puissances de $\cos v$, le second membre ne contiendra plus que des termes composés de ce genre de multiples. Et si l'on fait, par abréviation,

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 \ldots,$$
$$B = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 \ldots,$$
$$C = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 \ldots,$$
$$D = \frac{35}{512}e^6 \ldots,$$

on trouvera ici

$$ds = a(1-e^2)(A + B\cos 2v + C\cos 4v + D\cos 6v \ldots)\,dv.$$

224. Chaque terme de la série ainsi transformée peut être intégré immédiatement; et, en faisant commencer toutes les intégrales partielles, de manière que l'angle total s soit nul quand v est nul, sa longueur, depuis le pôle jusqu'à la distance polaire v, se trouve être évidemment

$$s = a(1-e^2)\left(Av + \frac{1}{2}B\sin 2v + \frac{1}{4}C\sin 4v + \frac{1}{6}D\sin 6v \ldots\right).$$

La lettre v, qui entre hors des signes trigonométriques dans le premier terme, représente l'angle v exprimé en parties du rayon pris pour unité de longueur. Cela en fait un rapport abstrait, comme sont aussi les sinus qui entrent dans les termes suivants; et, de cette manière, l'homogénéité des deux termes de l'équation se trouve conservée. Par exemple, si cet angle devait être droit, la valeur de v serait $\frac{1}{2}\varpi$, ϖ étant le nombre 3,1415926..., qui exprime la demi-circonférence dont le rayon est 1. Si sa valeur, exprimée en secondes de degré, était v'', il faudrait faire v égal à $\frac{v''}{R''}$.

225. D'après la remarque faite tout à l'heure sur la forme des cosinus qui

vait être la plus haute des deux. Cette petite différence de $0^m,002$ tient ici à l'erreur de l'hypothèse d'égalité des deux réfractions, qui n'a pas une influence tout à fait égale quand on procède de l'une ou de l'autre manière. Cela n'existe plus quand on fait le calcul sur la trajectoire rigoureuse, en appliquant à chaque distance zénithale observée la réfraction δ' ou δ'' qui l'affecte; c'est ce que j'ai démontré dans le Mémoire cité, page 49. Ici la différence trouvée n'a aucune importance, et je ne la signale que pour faire remarquer que toute approximation, fondée sur des principes théoriques exacts, doit, comme celle-ci, ne donner que des discordances négligeables, dans quelque ordre qu'on l'applique, à deux stations spécifiées par des éléments assignés.

244. Je vais maintenant examiner jusqu'à quel point ces déterminations exigent l'emploi rigoureux du rayon ρ, qui est osculateur à l'ellipsoïde, dans le sens de l'arc A qui joint les pieds des normales des deux stations. Pour cela, je recommencerai le calcul avec les mêmes données, en attribuant à ce rayon une longueur très-notablement différente, quoique néanmoins contenue entre les limites générales des valeurs qu'il peut prendre dans l'ellipsoïde considéré. Je choisis, pour cette épreuve, le rayon qui serait osculateur au point milieu d'un arc terrestre situé à la distance polaire de 45°, et formant aussi un angle de 45° avec la direction du méridien local. Ce sera une sorte de rayon osculateur moyen qui, s'il peut suffire, nous dispensera de chercher le rayon osculateur local, dans chaque cas proposé.

245. Soient: ρ ce rayon inconnu; γ, N les deux rayons respectivement osculateurs dans le sens du méridien, et dans le sens transversal au point moyen de l'arc considéré. En nommant i l'azimut de cet arc, on aura généralement, d'après ce qui a été dit page 192,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\gamma}\cos^2 i + \frac{1}{N}\sin^2 i.$$

Pour l'ellipsoïde terrestre, les valeurs de γ et de N, à la distance polaire d, sont

$$\gamma = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\cos d^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad N = \frac{a}{(1-e^2\cos d^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

SECTION VI. — *Des grands nivellements géodésiques.*

227. Lorsque j'ai exposé la théorie des réfractions atmosphériques dans le chapitre VII du tome Ier, j'ai annoncé, page 267 (note), que, dans les grandes triangulations géodésiques, les observations de distances zénithales réciproques faisaient connaître les différences relatives de hauteur des stations au-dessus du sphéroïde formé par la continuation régulière de la surface des mers environnantes; d'où l'on déduit toutes leurs hauteurs absolues par une seule d'entre elles directement mesurée. J'ai fait seulement pressentir alors le procédé général par lequel on réalise cette importante application. Je vais maintenant l'expliquer dans ses détails.

228. Relativement à une sphère, deux points sont de niveau quand ils sont à une égale distance de la surface sphérique, sur leurs sécantes propres menées à son centre. Relativement à un sphéroïde de forme quelconque, deux points sont de niveau lorsqu'ils sont à égale distance de la surface sphéroïdale, sur leurs normales propres.

Dans l'application au sphéroïde terrestre, l'opération se divise en deux parties. On détermine d'abord directement la hauteur absolue d'une des stations au-dessus du niveau moyen de la mer la plus proche; on détermine ensuite la différence successive de hauteur de toutes les autres stations sur leurs normales propres, au-dessus de l'ellipsoïde de révolution qui est la continuation de cette mer.

229. Pour obtenir le premier résultat, on conduit le réseau des triangles jusqu'à une station voisine du bord de la mer d'où l'on veut partir. Désignons cette station par S, *fig.* 46. On mesure, par un nivellement direct, les hauteurs absolues Sh_1, Sh_2, ou h_1, h_2 du point S au-dessus du niveau de deux hautes mers consécutives, et aussi sa hauteur absolue Sh ou h au-dessus de la basse mer intermédiaire. $\frac{1}{2}(h_1+h_2)$ donne la hauteur de S au-dessus de la haute mer moyenne, et $\frac{1}{2}\left(\frac{h_1+h_2}{2}+h\right)$ ou $\frac{h_1+h_2+2h}{4}$ est sa hauteur au-dessus du niveau moyen. On procède à ces observations par un temps calme, pour éviter les irrégularités accidentelles que les oscil-

Logarithme du mètre légal en toises... $\log m = \bar{1},71018\,00700$

Mais, en exprimant a en toises, nous avons trouvé, page 221..... $\log a = 6,51479\,56789$

Nous aurons donc, en mètres de la longueur légale..... $\log a = 6,80461\,56089$

Je vais employer cette valeur pour calculer la différence de niveau $r'' - r'$ en la substituant à celle du rayon réellement osculateur dont nous avions fait d'abord usage.

Cherchons d'abord l'angle au centre v par son expression

$$v'' = \frac{A}{a} R'',$$

nous aurons, comme précédemment :

$$\begin{aligned} \log A &= 5,22184\,20829 \\ \log a &= 6,80461\,56089 \\ \hline & \bar{2},41722\,64740 \\ \log R'' &= 5,31442\,51332 \\ \hline \log v'' &= 3,73165\,16072 \end{aligned}$$

de là on tire $v'' = 5390'',78 = 1^\circ 29' 50'',78$;

conséquemment $\frac{1}{2} v'' = 0^\circ 44' 55'',39$; $\log \cos \frac{1}{2} v = \bar{1},9999629$.

On voit que ce calcul aurait pu très-bien s'effectuer avec les logarithmes à sept décimales. La valeur obtenue ici pour v'' est relativement trop faible de $9'',22$. Mais cela ne produit qu'une unité de différence sur la septième décimale du logarithme de $\cos \frac{1}{2} v$. Je calcule de même la corde C par son expression

$$C = A - \frac{1}{24} \frac{A^3}{a^2},$$

et je trouve $C = 166664^m,1083 - 4^m,7433 = 166659^m,365$,

d'où $\log C = 5,22182\,97227$.

L'erreur de l'évaluation de C est extrêmement petite, comme on devait s'y attendre; elle ne change pas d'une unité la septième décimale de son logarithme. Il n'en pourra résulter aucune différence sensible dans la valeur de $r'' - r'$.

J'achève le calcul avec ces nouveaux éléments, pour le premie cas que nous avons considéré, dans lequel la hauteur absolu donnée est celle de la station S_1 égale à 98^m. Car cette valeur de λ est indépendante de la longueur que l'on attribue au rayon de l sphère osculatrice; d'ailleurs on a toujours

$$\tfrac{1}{2}(Z''-Z') = 0°38'13'',95.$$

Il en résulte donc :

$$\begin{aligned}
\log C &= 5,2218297 \\
\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(Z''-Z') &= \bar{2},0461767 \\
\hline
&\ 3,2680064 \\
\log \cos \tfrac{1}{2} v &= \bar{1},9999629 \\
\hline
\log x' &= 3,2680435 \qquad x' = 1853^m,7174 \\
\log \left(\frac{h'}{a}\right) &= \bar{5},1866105 \\
\hline
&\ \bar{2},4546540 \quad .. \quad \frac{h'x'}{a} = 0^m,0285 \\
\hline
F &= 1853^m,7459 \\
\log F &= 3,2680502
\end{aligned}$$

La partie principale de $r''-r'$ se trouve ainsi à peine différent de ce qu'elle était précédemment. Je passe au calcul des term correctifs.

$$\log x' = 3,2680435$$

$$\log 2a = 7,1056456$$

[redacted]

L'emploi du demi-grand axe a en remplacement du rayon osculateur dans le sens de l'arc n'a donc produit ici aucune différence sensible dans l'évaluation de la différence de niveau. Par conséquent, il en sera de même dans toutes les applications habituelles où la longueur de l'arc A sera généralement beaucoup moindre que dans notre exemple. Ainsi, lorsque les distances zénithales réciproques seront en outre simultanées, la recherche du rayon local qui est spécialement osculateur dans le sens de l'arc A ne sera point nécessaire. On pourra calculer tous les résultats en lui substituant le demi-grand axe de l'ellipsoïde, considéré comme rayon osculateur moyen. Mais celle des deux hauteurs absolues h' ou h'' qui sera donnée devra être toujours comptée à partir de la surface même de l'ellipsoïde, sur la normale vraie de chaque station. En outre, ceci suppose que la longueur de l'arc terrestre A est *exactement* connue.

247. Je vais procéder à des épreuves semblables pour le cas où les distances zénithales Z′, Z″, quoique réciproques, n'ont pas été prises simultanément; de sorte qu'il faut alors calculer la différence de niveau par leurs valeurs individuelles, associées au coefficient c de la proportionnalité qui convient aux circonstances locales de chaque observation. L'expression de ce coefficient se trouve dans mon Mémoire sur les réfractions terrestres, page 54, et je l'ai reproduite au tome I du présent ouvrage, page 262 (*). Pour les conditions atmosphériques propres à la station inférieure désignée ici par S_1, la formule le donne égal à 0,1473252, comme je l'ai rapporté à la page 263 du tome I, et comme on pourrait le constater en mettant dans cette formule les éléments météorologiques qui se trouvent consignés dans la même page. En l'admet-

(*) Je profite de cette occasion pour signaler deux fautes d'impression qui se sont glissées dans la transcription de cette formule, à la page 54 du Mémoire cité. La lettre θ y désigne la somme des deux réfractions locales qui est proportionnelle à l'angle au centre v, dans cette forme d'approximation. Or, dans l'expression de θ, telle qu'on l'a imprimée, on a commis deux erreurs, heureusement faciles à apercevoir. D'abord, on lui a donné le signe — au lieu du signe +, qu'elle doit avoir évidemment; en outre, dans un des facteurs de son numérateur, on a écrit $\frac{r_1+r_2}{2r_1}$ au lieu de $\frac{r_1+r_2}{2r_2}$, qui est sa vraie

tances zénithales réciproques, ou non réciproques, sur une sphère d'un rayon donné. Nous pourrons ensuite examiner jusqu'à quel degré de précision la connaissance et l'emploi spécial du rayon osculateur ρ sont nécessaires pour les réduire en nombres, quand on connaît la longueur de l'arc circulaire M_1M_2 ou A qui joint les pieds des normales sur la sphère considérée. Car cet arc est toujours donné par la triangulation dans les circonstances actuelles, puisqu'il est un des côtés des triangles principaux.

235. Dans les formules citées, on a désigné par r', r'' les distances respectives des deux stations S_1, S_2 au centre de la sphère. L'indice $'$ s'applique aux éléments de celle pour laquelle cette distance est connue, sans s'inquiéter si elle est la plus haute ou la plus basse, le jeu des signes algébriques décidant cette alternative dans le résultat. Soit donc h', *fig.* 49, la hauteur *absolue* de la station S_1 au-dessus de l'ellipsoïde, hauteur que l'on devra supposer connue par les opérations antécédentes. On aura alors

$$r' = \rho + h',$$

et $r'' - r'$ sera la différence de niveau, qui se trouvera positive si S_2 est plus élevée que S_1, et négative dans le cas contraire.

Les formules contiennent l'angle au centre S_1CS_2 ou v compris entre les sécantes menées aux deux stations. L'arc M_1MM_2 étant donné, on en pourra toujours déduire la valeur de cet angle. Si on veut l'exprimer par l'arc qui le mesure dans un cercle dont le rayon est 1, on aura

$$v = \frac{A}{\rho}.$$

Si on veut l'exprimer en secondes de degré, et le désigner sous cette forme par v'', on aura

$$v'' = \frac{A}{\rho} R''.$$

Nous aurons aussi besoin de connaître la longueur de la corde rectiligne M_1M_2. En la désignant par C, les expressions établies page 68 donneront, avec une exactitude toujours suffisante,

$$C = A - \frac{1}{24}\frac{A^3}{\rho^2}.$$

Il faut se rappeler, d'ailleurs, que la corde C et l'angle au centre sont liés l'un à l'autre, par la relation rigoureuse

$$C = 2\rho \sin \tfrac{1}{2} v.$$

L'expression précédente de C n'est que le développement de celle-ci, limitée aux troisièmes puissances du rapport $\frac{A}{\rho}$.

236. Maintenant, conformément à la notation adoptée dans le tome I, page 265, soient Z', Z'' les deux distances zénithales *apparentes*, observées ou observables en S_1 et S_2; et nommons $+\delta'$, $+\delta''$, les réfractions locales, connues ou inconnues, qu'il faudrait *ajouter* respectivement à chacune d'elles, pour avoir les distances zénithales *vraies*, rapportées à la corde rectiligne que l'on mènerait de S_1 à S_2. Le triangle rectiligne S_1CS_2 établira d'abord entre celles-ci la relation générale

$$Z' + Z'' + \delta' + \delta'' = 180^\circ + v;$$

prenant ensuite une quantité auxiliaire x telle qu'on ait

$$x = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (Z'' - Z' + \delta'' - \delta'),$$

l'expression de la différence de niveau cherchée sera

$$r'' - r' = \frac{2r'x}{1 - x}.$$

Cette expression est générale : elle ne spécifie nullement si les distances zénithales apparentes ont été observées simultanément sur la même trajectoire lumineuse, ou à des époques différentes et sur

petite : d'abord, parce que la corde C est toujours très-petite comparativement au rayon osculateur ρ ; puis, les triangulations s'appliquant à la convexité de la surface terrestre, deux sommets de triangles réciproquement visibles l'un de l'autre ont toujours une différence de niveau très-petite comparativement à la longueur de l'arc qui les sépare. Cela fait que l'angle contenu sous le signe tangente dans l'autre facteur de x est habituellement très-peu différent de zéro, qui serait sa valeur si la différence de niveau était nulle ainsi que les réfractions ; et, par suite, la tangente de cet angle, qui forme le second facteur de x, n'a jamais qu'une très-petite valeur. Profitant donc de cette circonstance, je développe en série le facteur $\frac{1}{1-x}$ qui entre dans l'expression de $r''-r'$; ce qui donne

$$r''-r'=2r'x(1+x+x^2\ldots);$$

alors, remplaçant r' dans le second membre par sa valeur $\rho+h'$, et mettant pour x son expression en C que nous venons de former, on a

$$r''-r'=C\left(1+\frac{h'}{\rho}\right)\frac{\tang\frac{1}{2}(Z''-Z'+\delta''-\delta')}{\cos\frac{1}{2}\nu}\left\{\begin{array}{l}1+\frac{C}{2\rho}\frac{\tang\frac{1}{2}(Z''-Z'+\delta''-\delta')}{\cos\frac{1}{2}\nu}\\ +\frac{C^2}{4\rho^2}\frac{\tang^2\frac{1}{2}(Z''-Z'+\delta''-\delta')}{\cos^2\frac{1}{2}\nu}\\ \text{etc.}\end{array}\right\}.$$

238. Examinons d'abord la composition du facteur qui précède la parenthèse. Le rayon osculateur ρ ne s'y montre *explicitement* que comme diviseur de h'. Or le rapport $\frac{h'}{\rho}$ sera toujours excessivement petit, même quand la triangulation traverserait les plus hautes chaînes de montagnes du globe ; et, hors de ces circonstances exceptionnelles, il sera habituellement négligeable. L'emploi précis du rayon local ρ ne sera donc jamais nécessaire pour évaluer ce rapport avec une suffisante précision, et l'on pourra y substituer toute autre quelconque de ses valeurs. La longueur de ce rayon entre aussi *implicitement* dans l'évaluation de la corde C, comme on

ployant le demi-grand axe a de l'ellipsoïde, au lieu du rayon osculateur vrai ρ, comme je l'ai fait dans le premier exemple sur les distances réciproques, afin d'apprécier l'erreur qui pourra résulter ici de cette substitution.

Il en résultera d'abord quelques différences dans les valeurs de la corde C et de l'angle au centre v qui se déduisent de l'arc donné A. Nous les avons déjà calculées dans la page 313. Mais ici, la nouvelle évaluation de l'angle v acquerra plus d'influence par sa présence dans le produit $(1-c')v$. Nous avons trouvé pour ce cas v'' égal à $1^\circ 29' 50'',78$ ou $5390'',78$. En combinant cette valeur avec celle du coefficient c' qui est $0,1473252$ pour la station S_1 que nous considérons, on trouve

$$\tfrac{1}{2}(1-c')v'' = 0^\circ 44' 59'',39 - 6' 37'',099 = 0^\circ 38' 18'',291,$$

donc
$$\frac{1}{\operatorname{tang} Z' - \frac{1}{2}(1-c')v} = \operatorname{tang} 38' 18'',291.$$

L'arc qui entre ici sous le signe tangente est moindre de $4''$ que dans le cas précédent. Il se rapproche davantage de la valeur que lui assignent les deux distances zénithales simultanées. La différence de niveau $r''-r'$ en deviendra donc un peu plus faible, et moins différente de celles que ces distances avaient données par leur association. Avec ces données et les résultats déjà obtenus page 313, en prenant a pour rayon osculateur, le calcul s'achève comme il suit :

$$\log C = 5,2218297$$
$$\log \operatorname{tang}(38' 18'',291) = \bar{2},0469979$$
$$3,2688276$$
$$\log \cos \tfrac{1}{2} v = \bar{1},9999629$$
$$\log x' = 3,2688647 \qquad x' = 1857^{m},2256$$
$$h' = 98^{m} \qquad \log\left(\frac{h'}{a}\right) = \bar{5},1866105 \qquad \left(\frac{h'}{a}\right)x' = 0^{m},0285$$
$$2,4554752 \qquad F = 1857^{m},2541$$
$$\log F = 3,2688714$$

pose généralement que les deux réfractions locales δ', δ'' sont égales entre elles et de même signe, ce qui les fait disparaître dans les symboles trigonométriques, et ramène la différence de niveau $r'' - r'$ à contenir, sous ces symboles, les seules distances zénithales observées. J'ai discuté la réalité de cette hypothèse dans un Mémoire spécial, sur les réfractions terrestres, lu à l'Académie des Sciences le 19 novembre 1838, et inséré dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour l'année 1842. J'ai prouvé alors que, même dans le cas d'un équilibre régulier, où la densité des couches d'air décroît également sur toutes les sécantes menées du centre de la sphère que l'atmosphère recouvre, les réfractions qui affectent deux distances zénithales réciproques, prises sur une même trajectoire lumineuse, sont inégales. Celle qui appartient à la station la plus basse est plus forte que celle qui appartient à la station la plus élevée, et leur inégalité croît à mesure que l'angle au centre augmente. Mais, lorsque cet angle est borné aux amplitudes restreintes qu'on lui donne dans les opérations géodésiques, la différence des deux réfractions s'affaiblit au point de pouvoir être négligée, sans qu'il en résulte une erreur sensible. Ainsi, dans les circonstances météorologiques sur lesquelles j'ai établi mes calculs, et qui représentaient l'état de l'atmosphère lors de l'ascension de M. Gay-Lussac, l'excès de la réfraction inférieure sur la supérieure s'est trouvé être $19'',68$ pour un angle au centre de $1°30'$. En négligeant cet excès, et supposant les deux réfractions égales, aux deux points de la trajectoire compris entre cet angle et ses rayons vecteurs, la différence de niveau obtenue entre les deux points a été $1854^m,017$ au lieu de $1846^m,060$, qui était sa valeur rigoureuse, ce qui fait seulement une erreur de $7^m,957$ sur une mesure totale si grande. Cette erreur décroît rapidement à mesure que l'angle au centre devient moindre. Car en le réduisant, par exemple, à $30'$, ce qui est encore une amplitude peu commune dans les opérations géodésiques, la différence des deux réfractions n'a plus été que $0'',478$, et ne pouvait plus produire qu'une erreur insensible dans la différence de niveau, devenue aussi considérablement moindre que dans le cas précédent.

240. Cette hypothèse d'égalité ne peut toutefois être admise,

même par approximation, qu'à condition que la densité des couches réfringentes décroît suivant une même loi sur toutes les sécantes de la sphère, dans la portion de l'atmosphère qui sépare les stations considérées. Heureusement c'est là l'état habituel; et ainsi, l'on peut en compenser les petites variations accidentelles en réitérant plusieurs fois les observations à différents jours, par des temps calmes. Mais, en outre, il faut toujours que les distances zénithales réciproques, qu'on veut assembler par couples, aient été observées aux mêmes instants physiques, pour qu'elles puissent appartenir à une même trajectoire lumineuse. Car, sans cette condition, comme elles devront presque infailliblement appartenir à des trajectoires lumineuses différentes, on ne pourrait plus admettre, avec aucune vraisemblance, l'égalité, même approximative, des deux réfractions extrêmes. C'est cependant ce qu'ont fait, pendant longtemps, tous les observateurs, et en particulier Delambre, qui a combiné, comme physiquement réciproques, des distances zénithales observées à des jours différents, entre les sommets consécutifs du réseau de triangles qui s'étend des bords de l'Océan, à Dunkerque, jusqu'aux bords de la Méditerranée, à Barcelone. A la vérité, le défaut de simultanéité s'affaiblit, quand on combine ainsi beaucoup de séries d'observations réitérées à chaque station, pendant des jours calmes, à des époques de l'année peu différentes pour toutes deux, ce qui y ramène, à peu près, l'atmosphère à un état moyen commun. Et c'est probablement pour cela que la différence totale de niveau obtenue ainsi par Delambre, entre l'Océan et la Méditerranée, à ses deux stations extrêmes, s'est trouvée nulle, ou de

étant combinée avec les distances zénithales réciproques qu'on y observerait simultanément, suffirait pour calculer la différence de niveau comprise entre ces deux points, indépendamment de l'angle au centre e, ou de l'arc terrestre A, qui sépare les pieds de ces verticales. Mais, comme je l'ai fait remarquer tome I, page 270, ce mode d'évaluation emploie réellement, pour base, la longueur totale du rayon terrestre, menée du centre de la sphère osculatrice à celle des stations dont on connaît la hauteur absolue au-dessus de cette sphère, et la grandeur de cet élément rend le résultat obtenu fort incertain. C'est précisément ce qui arrive lorsque l'on conclut les hauteurs d'après la mesure des dépressions de l'horizon de la mer. La formule qu'on emploie alors est précisément celle qui s'applique au cas général où les deux distances zénithales réciproques seraient observées simultanément. Mais s'il faut bien se résoudre alors à cette incertitude inévitable, il est essentiel de l'éviter dans tous les cas où cela est possible, en introduisant, comme élément déterminatif, la corde de l'arc terrestre compris entre les deux stations.

253. Dans une communication que j'adressai à l'Académie des Sciences le 18 juin 1838, sur l'application des circonstances météorologiques à la mesure des différences de niveau par les distances zénithales réciproques et simultanées, je n'avais pas suffisamment insisté sur cette distinction, et je m'étais beaucoup trop exagéré les avantages de la formule purement théorique. Cette inadvertance donna lieu, de la part de feu Puissant, à des remarques critiques, fort justes en ce point, mais qui cessaient de l'être en

si, au contraire, on a observé Z'', on exclura Z', en prenant

$$\tfrac{1}{2}(Z' + \delta') = 90^\circ + \tfrac{1}{2}v - \tfrac{1}{2}(Z'' + \delta''),$$

ce qui donnera

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(Z''-Z'+\delta''-\delta') &= \tfrac{1}{2}(Z''+\delta'')-90^\circ-\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{2}(Z''+\delta'')\\ &= -90^\circ+(Z''+\delta''-\tfrac{1}{2}v),\end{aligned}$$

et par suite $\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(Z''-Z'+\delta''-\delta') = -\dfrac{1}{\operatorname{tang}(Z''+\delta''-\frac{1}{2}v)}.$

Alors si l'on a trouvé, par les circonstances météorologiques, le coefficient c de la proportionnalité, égal, dans le premier cas, à c', dans le second à c'', on fera δ' égal à $\frac{1}{2}c'v$, ou δ'' égal à $\frac{1}{2}c''v$, et l'on aura

Par la seule distance zénithale Z',

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(Z''-Z'+\delta''-\delta') = \frac{1}{\operatorname{tang}[Z'-\frac{1}{2}(1-c')v]};$$

Par la seule distance zénithale Z'',

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(Z''-Z'+\delta''-\delta') = -\frac{1}{\operatorname{tang}[Z''-\frac{1}{2}(1-c'')v]}.$$

J'y mets les coefficients de v sous cette forme, parce que les valeurs du coefficient c sont habituellement peu différentes de 0,15, ce qui rend $1 - c'$ et $1 - c''$ positifs. Quoique les tangentes se trouvent maintenant en dénominateur, les termes où elles se trouvent ne cesseront pas d'être très-petits, parce que, dans les applications, Z' et Z'' sont toujours peu différentes de 90°. Ces expressions, substituées dans le développement de $r'' - r'$, lui laisseront donc encore sa rapide convergence, et l'on aura :

Par la seule distance zénithale Z',

Dans les applications habituelles, le facteur qui précède la parenthèse, sera fréquemment le seul, soit de l'expression générale, soit de ces dernières, auquel il faille avoir égard; et l'on aura tout au plus besoin de calculer le terme de l'autre facteur qui contient la première puissance de $\frac{C}{2\rho}$. C'est ce que le calcul même montrera pour chaque cas. Mais, dans les expressions où l'on n'emploie qu'une seule distance zénithale, l'angle v entrant sous le signe tangente, on peut croire que son évaluation nécessitera plus spécialement l'emploi du rayon osculateur exact ρ, que l'expression générale où cet angle entre seulement par le cosinus de la moitié de sa valeur. C'est ce que nous apprendront les applications numériques que nous allons faire. Les calculs qu'elles exigent s'abrègent en mettant en évidence la dépendance mutuelle des termes dont se composent les formules que nous venons de préparer. Tel est l'objet des quantités auxiliaires que je vais y introduire.

1er CAS : Les deux distances zénithales réciproques Z', Z'', ont été observées simultanément.

Formez la quantité auxiliaire..... $x' = \frac{C \operatorname{tang} \frac{1}{2}(Z'' - Z')}{\cos \frac{1}{2} v}$.

Vous aurez la différence de niveau :

$$(1) \qquad r'' - r' = \left(1 + \frac{h'}{\rho}\right) x' \left(1 + \frac{x'}{2\rho} + \frac{x'^2}{4\rho^2} \cdots\right).$$

2e CAS : Z' seul observé. c' le coefficient de proportionnalité actuel, ou $\delta' + \delta'' = c' v$.

Quantité auxiliaire..... $x' = \frac{C}{\cos \frac{1}{2} v \operatorname{tang}[Z' - \frac{1}{2}(1 - c')v]}$.

Différence de niveau :

$$(2) \qquad r'' - r' = \left(1 + \frac{h'}{\rho}\right) x' \left(1 + \frac{x'}{2\rho} + \frac{x'^2}{4\rho^2} \cdots\right).$$

3e CAS : Z'' seul observé. c'' le coefficient de proportionnalité actuel, ou $\delta' + \delta'' = c'' v$.

La manière dont ils en ont été déduits ne sera pas inutile à expliquer pour montrer aux personnes qui voudraient approfondir cette théorie, avec quelle fidélité toutes ses parties se correspondent.

Dans ce Mémoire, j'avais pris pour base les observations simultanées du baromètre, du thermomètre et de l'hygromètre, faites par M. Gay-Lussac aux diverses hauteurs où il s'était progressivement élevé lors de sa mémorable ascension. Je les avais discutées dans un premier Mémoire annexé à la *Connaissance des Temps* de 1841. En combinant ces données avec les conditions d'équilibre des couches atmosphériques, j'en avais déduit une constitution d'atmosphère qui, partant du sol de l'Observatoire de Paris, s'élevait à toutes les hauteurs parcourues, en reproduisant partout les rapports observés entre les températures, les densités et les pressions. Dans les couches les moins distantes de la surface terrestre, la relation qui unissait ces deux derniers éléments était une parabole du second degré très-peu courbe, dont les pressions étaient les abscisses; et, pour les stations les plus hautes, cette parabole dégénérait en une simple ligne droite. Dans ce même Mémoire, en appliquant des considérations analogues aux observations météorologiques faites par M. de Humboldt sur les flancs et jusqu'à la cime du Chimboraço, je prouvai qu'elles établissaient aussi une relation rectiligne finale entre les densités et les pressions. J'arrivai encore au même résultat en discutant de la même manière trois séries distinctes d'observations analogues faites par M. Boussingault sur les hautes cimes des Andes, ce que je fis dans un Mémoire inséré au tome XVII des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, page 768. Ainsi, cette loi finale paraît généralement exister dans toutes les couches élevées de l'atmosphère où l'on peut porter des instruments, en quelque lieu qu'on les étudie. Une de ses conséquences, c'est que le décroissement de la température va toujours en s'accélérant dans les couches aériennes dont il s'agit, à mesure qu'elles deviennent plus hautes; et toutes les observations s'accordent, en effet, pour établir l'existence d'une telle accélération, d'autant plus manifeste que l'on se soustrait davantage aux perturbations qu'y produit le rayonnement du sol dans les couches inférieures. C'est aussi ce que l'on

ions de mètre qui les complètent, et j'y joindrai leurs logarithmes dix décimales. Cette rigueur numérique, qui serait aussi exagérée qu'inutile dans une application réelle, aura ici l'avantage de ious reproduire exactement les données angulaires sur lesquelles es calculs du Mémoire ont été fondés. Ceci convenu, voici les éléments correspondants aux deux distances zénithales apparentes Z', Z'' supposées observées simultanément, avec les valeurs de ces listances zénithales elles-mêmes.

Longueur de l'arc compris entre les pieds des normales des deux stations,

$$A = 166664^{m},1083, \quad \log A = 5,22184\,20829.$$

Hauteur absolue de la station S_1 au-dessus de la surface de l'ellipsoïde, identifiée avec la surface de la sphère osculatrice dans le sensde l'arc A,

$$h' = 98^{m},00, \qquad \log h' = 1,9912261.$$

Longueur du rayon osculateur dans le sens de l'arc A,

$$\rho = 6366100^{m},00, \qquad \log \rho = 6,8038734563.$$

Distances zénithales apparentes observées simultanément dans les deux stations,

$$Z' = 90^{\circ}0'0'', \qquad Z'' = 91^{\circ}16'27'',90.$$

Avec ces données, je cherche d'abord la longueur de la corde de l'arc A par son expression

$$C = A - \frac{1}{24} A^{3},$$

et je trouve

$$C = 166664^{m},1083 - 4^{m},7596 = 166659^{m},3487,$$

d'où l'on déduit

$$\log C = 5,22182\,96802.$$

Je cherche ensuite l'angle au centre v par son expression en secondes de degré, qui est :

$$v'' = \frac{A}{\rho} R''.$$

aussi les distances zénithales vraies et apparentes des deux mêmes points, vus réciproquement l'un de l'autre, ce qui me donna les deux réfractions locales qui s'y produisaient. Ces résultats sont rassemblés dans un tableau placé à la page 43 de mon Mémoire. J'effectuai aussi des calculs pareils pour un angle au centre seulement de $0°30'$, et j'en rassemblai les résultats dans un second tableau placé à la page 45. Pour ce deuxième cas, la différence de niveau exacte $r-a$ fut trouvée seulement de $204^m,313$.

Ce sont ces mêmes résultats que j'ai employés comme éléments d'observation fictifs dans la section précédente. Mais l'application en aurait paru trop particulière pour le but que je me proposais si j'avais présenté ici la première station S_1 comme située au niveau même du sol. C'est pourquoi, ôtant 98^m du rayon a, qui était 6366198^m, je supposai cette première station située à la hauteur $h'=98^m$, au-dessus d'un sphéroïde dont le rayon osculateur local était seulement 6366100^m. Puis j'attribuai à l'arc terrestre A la valeur calculée $166664^m,1083$ qu'il devait avoir, pour un angle au centre de $1°30'$, dans un cercle décrit avec ce rayon. Il est clair que ces modifications ne changeaient absolument rien à la forme ni à la marche de la trajectoire calculée, pourvu que l'on remplaçât idéalement la couche supprimée du sphéroïde solide par une couche aérienne de même hauteur, où les densités croîtraient en descendant au-dessous de S_1, suivant la loi de continuité propre à l'atmosphère considérée. Cette substitution tacite me permettait donc de transporter à l'exemple actuel tous les éléments de la trajectoire lumineuse déjà obtenus dans mon Mémoire, et c'est aussi ce que j'ai fait.

Quoique cette fiction suffise pour le but que je m'étais ici proposé, on peut être curieux de la réaliser et de connaître quels auraient dû être les éléments météorologiques de la couche aérienne fictive, à sa surface inférieure, où elle serait en contact avec le nouveau sphéroïde solide dont le rayon osculateur se réduirait à 6366100^m, au lieu de 6366198^m, qu'il avait dans mon premier calcul. Cela est très-facile, d'après la constitution de l'atmosphère considérée, et ce sera une occasion de faire bien sentir la connexion des formules qui en établissent toutes les particularités dans mon Mémoire de 1842.

Pour cela, j'y prends d'abord, à la page 33, un développe en série qui, partant du sol de l'Observatoire, exprime la d de toute autre couche aérienne, dont la hauteur est donnée, tivement à celle-là, jusqu'à une limite d'épaisseur d'au moins 4 Ce développement est déduit de la relation parabolique ent densités et les pressions, que j'ai appelée *initiale*. La notatic térale qu'on y a employée est rappelée dans le tableau suivan

	RAYON sphérique de la couche.	SA DENSITÉ.	PRESSION en millim. de mercur. à 0°.	TEMP cent
Éléments de la couche aérienne située au niveau du sol de l'Observatoire	r_1 ou a	ρ_1	p_1	1
D'une autre couche aér. quelconq.	r	ρ	p	1

L'expression de la densité ρ est donnée en fonction d'une va indépendante s, telle qu'on ait

$$\frac{r - r_1}{r} = s,$$

et elle a pour forme

$$\rho = \rho_1 [1 - i_1 s - \beta (i_1 s)^2 - \gamma (i_1 s)^3 - \delta (i_1 s)^4 \ldots],$$

i_1, β, γ, ... étant des coefficients numériques dont les valeurs

$1846^m,06$. Cela donnera donc h' égal à $1944^m,06$. Alors x' viendra négative, en conservant d'ailleurs la même valeur abs que précédemment. Mais la valeur de $\frac{h'}{2\rho}$, qui se combinera : elle, deviendra plus grande que tout à l'heure; et, en effect le calcul numérique de la même manière, pour obtenir d'ab le facteur extérieur F, on aura :

$$\log h' = 3,2887097$$
$$\log \rho = 6,8038735$$
$$\log\left(\frac{h'}{\rho}\right) = \bar{4},4848362$$
$$\log x' = 3,2680436- \qquad x' = -1853^m,7179$$
$$\log\left(\frac{h'}{\rho}\right)x' = \bar{1},7528798- \qquad \frac{h'}{\rho}x' = -0^m,56608$$
$$F = -1854^m,2840$$

Conséquemment $\log F = 3,2681762-$

Le facteur F, devenu négatif, se trouve notablement plus fort q précédemment. Mais la compensation va être opérée par le prod $F\left(\frac{x'}{2\rho}\right)$ qui devient ici positif à cause du signe négatif de ses de facteurs. En effet, le calcul des deux premiers termes de la sér effectué comme tout à l'heure, donne

$$\log\left(\frac{x'}{2\rho}\right) = \bar{4},1631402- \qquad \log\left(\frac{x'}{2\rho}\right)^2 = \bar{8},3262804+$$

[redacted]

est d'ailleurs supposé égal à 6366198^m, comme je l'ai dit précédemment. Pour faire la vérification demandée, il faut donner à ρ, dans le second membre, sa valeur $\rho_1(1+u)$ trouvée tout à l'heure, et voir si z en résulte égal à 98^m, comme nous l'avions supposé. Cette substitution, étant d'abord faite algébriquement, donne

$$\frac{r_1 z}{r_1 + z} = -\frac{lA}{m}\log(1+u) - 2lBu.$$

La petitesse de u permet de développer ici $\log(1+u)$ en une série très-rapidement convergente; après quoi, en réunissant les termes affectés des mêmes puissances de u, on a

$$\frac{r_1 z}{r_1 + z} = -l(A+2B)u + \tfrac{1}{2}lAu^2 - \tfrac{1}{3}lAu^3 \ldots$$

Comme $A + 2B$ diffère peu de 1, il faut, pour plus de précision, effectuer séparément le produit de lu par ses deux parties au moyen des logarithmes, ce qui permet de borner ceux-ci à sept décimales. On trouve ainsi

$$\frac{r_1 z}{r_1 + z} = -98^m,00163.$$

Alors, si l'on représente par c le second membre, on en tire

$$z = c + \frac{c^2}{r_1 - c},$$

Dans l'application que nous en voulons faire à la distance polaire de 45°, $\cos^2 d$ devient $\frac{1}{2}$, ce qui donne

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{(1-\frac{1}{2}e^2)^{\frac{3}{2}}}{a(1-e^2)},\qquad \frac{1}{N}=\frac{(1-\frac{1}{2}e^2)^{\frac{1}{2}}}{a};$$

et comme l'azimut $i=45°$, que nous attribuons à l'arc A, donne aussi $\cos^2 i=\sin^2 i=\frac{1}{2}$, on aura, pour cet ensemble de conventions,

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{2a}\left[\frac{(1-\frac{1}{2}e^2)^{\frac{3}{2}}}{1-e^2}+(1-\frac{1}{2}e^2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Je développe en série les deux parties du facteur qui est compris dans les parenthèses, et j'arrête les développements aux termes en e^4. J'obtiens ainsi

$$\frac{(1-\frac{1}{2}e^2)^{\frac{3}{2}}}{1-e^2}=1+\frac{1}{4}e^2+\frac{11}{32}e^4\ldots,\qquad (1-\frac{1}{2}e^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{32}e^4\ldots$$

La première puissance de e^2 disparaît donc dans la somme de ces deux quantités, et, en les substituant dans l'expression de ρ, il reste

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{a}(1+\frac{5}{32}e^4\ldots).$$

Le rayon osculateur, défini par les conventions précédentes, ne diffère donc du demi-grand axe a, que par des quantités de l'ordre e^4, qui sont extrêmement petites dans l'ellipsoïde terrestre.

Logarithme du mètre légal en toises... $\log m = \bar{1},71018\,00700$

Mais, en exprimant a en toises, nous avons trouvé, page 221..... $\log a = 6,51479\,56789$

Nous aurons donc, en mètres de la longueur légale..... $\log a = 6,80461\,56089$

Je vais employer cette valeur pour calculer la différence de niveau $r'' - r'$ en la substituant à celle du rayon réellement osculateur dont nous avions fait d'abord usage.

Cherchons d'abord l'angle au centre v par son expression

$$v'' = \frac{A}{a} R'',$$

nous aurons, comme précédemment :

$$\begin{aligned} \log A &= 5,22184\,20829 \\ \log a &= 6,80461\,56089 \\ \hline & \bar{2},41722\,64740 \\ \log R'' &= 5,31442\,51332 \\ \hline \log v'' &= 3,73165\,16072 \end{aligned}$$

de là on tire $v'' = 5390'',78 = 1^\circ 29' 50'',78$;

conséquemment $\frac{1}{2} v'' = 0^\circ 44' 55'',39$; $\log \cos \frac{1}{2} v = \bar{1},9999629$.

On voit que ce calcul aurait pu très-bien s'effectuer avec les logarithmes à sept décimales. La valeur obtenue ici pour v'' est relativement trop faible de $9'',22$. Mais cela ne produit qu'une unité de différence sur la septième décimale du logarithme de $\cos \frac{1}{2} v$. Je calcule de même la corde C par son expression

$$C = A - \frac{1}{24} \frac{A^3}{a^2},$$

et je trouve $C = 166664^m,1083 - 4^m,7433 = 166659^m,365$,

d'où $\log C = 5,22182\,97227$.

L'erreur de l'évaluation de C est extrêmement petite, comme on devait s'y attendre; elle ne change pas d'une unité la septième décimale de son logarithme. Il n'en pourra résulter aucune différence sensible dans la valeur de $r'' - r'$.

J'achève le calcul avec ces nouveaux éléments, pour le premier cas que nous avons considéré, dans lequel la hauteur absolue donnée est celle de la station S, égale à 98^m. Car cette valeur de h' est indépendante de la longueur que l'on attribue au rayon de la sphère osculatrice; d'ailleurs on a toujours

$$\tfrac{1}{2}(Z'' - Z') = 0°38'13'',95.$$

Il en résulte donc :

$$\begin{aligned}
\log C &= 5,2218297 \\
\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(Z'' - Z') &= \bar{2},0461767 \\
&\overline{3,2680064} \\
\log \cos \tfrac{1}{2} v &= \bar{1},9999629 \\
\log x' &= 3,2680435 \qquad x' = 1853^m,7174 \\
\log \left(\frac{h'}{a}\right) &= \bar{5},1866105 \\
&\overline{\bar{2},4546540} \;\ldots\; \frac{h'x'}{a} = 0^m,0285 \\
F &= 1853^m,7459 \\
\log F &= 3,2680502
\end{aligned}$$

La partie principale de $r'' - r'$ se trouve ainsi à peine différente de ce qu'elle était précédemment. Je passe au calcul des termes correctifs.

$$\log x' = 3,2680435$$
$$\log 2a = 7,1056456$$

[redacted]

L'emploi du demi-grand axe a en remplacement du rayon osculateur dans le sens de l'arc n'a donc produit ici aucune différence sensible dans l'évaluation de la différence de niveau. Par conséquent, il en sera de même dans toutes les applications habituelles où la longueur de l'arc A sera généralement beaucoup moindre que dans notre exemple. Ainsi, lorsque les distances zénithales réciproques seront en outre simultanées, la recherche du rayon local qui est spécialement osculateur dans le sens de l'arc A ne sera point nécessaire. On pourra calculer tous les résultats en lui substituant le demi-grand axe de l'ellipsoïde, considéré comme rayon osculateur moyen. Mais celle des deux hauteurs absolues h' ou h'' qui sera donnée devra être toujours comptée à partir de la surface même de l'ellipsoïde, sur la normale vraie de chaque station. En outre, ceci suppose que la longueur de l'arc terrestre A est *exactement* connue.

247. Je vais procéder à des épreuves semblables pour le cas où les distances zénithales Z', Z'', quoique réciproques, n'ont pas été prises simultanément; de sorte qu'il faut alors calculer la différence de niveau par leurs valeurs individuelles, associées au coefficient c de la proportionnalité qui convient aux circonstances locales de chaque observation. L'expression de ce coefficient se trouve dans mon Mémoire sur les réfractions terrestres, page 54, et je l'ai reproduite au tome I du présent ouvrage, page 262 (*). Pour les conditions atmosphériques propres à la station inférieure désignée ici par S_1, la formule le donne égal à 0,1473252, comme je l'ai rapporté à la page 263 du tome I, et comme on pourrait le constater en mettant dans cette formule les éléments météorologiques qui se trouvent consignés dans la même page. En l'admet-

(*) Je profite de cette occasion pour signaler deux fautes d'impression qui se sont glissées dans la transcription de cette formule, à la page 54 du Mémoire cité. La lettre θ y désigne la somme des deux refractions locales qui est proportionnelle à l'angle au centre v, dans cette forme d'approximation. Or, dans l'expression de θ, telle qu'on l'a imprimée, on a commis deux erreurs, heureusement faciles à apercevoir. D'abord, on lui a donné le signe — au lieu du signe +, qu'elle doit avoir évidemment; en outre, dans un des facteurs de son numérateur, on a écrit $\frac{r_1+r_2}{2r_1}$ au lieu de $\frac{r_1+r_2}{2r_2}$, qui est sa vraie

tant, je vais calculer la valeur de $r'' - r'$ par la formule (2). J'effectue d'abord cette opération avec le véritable rayon osculateur ρ, déjà employé dans le premier exemple, de sorte que les autres données c, v, h' seront ici les mêmes que nous les avons eues alors; et de plus il faudra y joindre la distance zénithale apparente $Z' = 90°$.

248. L'angle au centre v est encore égal à $1°30'0''$; en l'associant à $c' = 0,1473252$, nous en tirerons, par multiplication,

$$\tfrac{1}{2}(1 - c')v'' = 0°45'0'' - 6'37'',778 = 0°38'22'',222;$$

conséquemment, $$\frac{1}{\tang[Z' - \frac{1}{2}(1 - c')v]} = \tang 38'22'',222.$$

Le produit $\frac{1}{2}c'v$, égal à $6'37'',778$, représente ici la réfraction locale δ' que l'on suppose devoir être ajoutée à la distance apparente Z' pour la transformer en distance zénithale vraie. La valeur exacte de cette réfraction, calculée rigoureusement d'après les données météorologiques propres à la station S_1, est $6'55'',89$, comme on le peut voir à la page 43 de mon Mémoire, et c'est aussi ce que je lui attribue dans le tome I du présent ouvrage, page 258. L'erreur de $18'',11$, qui se trouve dans son évaluation actuelle, est le résultat combiné des deux hypothèses par lesquelles on suppose ici les deux réfractions δ', δ'' égales entre elles, et leur somme proportionnelle à l'amplitude de l'arc v. Ces deux causes d'inexactitude subsisteront toujours dans le calcul des différences de niveau où l'on ne pourra

employer qu'une seule distance zénithale. Et l'on aura, en outre, à craindre les erreurs que l'on pourra commettre sur l'évaluation du coefficient de proportionnalité c, si on ne l'a pas calculé d'après les circonstances météorologiques contemporaines à l'observation de la distance apparente, comme nous l'avons fait ici.

249. Partant donc de ces données, je les introduis dans la formule (2) pour en tirer la valeur de la différence de niveau $r'' - r'$, et je rapporte en détail le type du calcul, pour que l'on puisse suivre pas à pas l'influence des quantités qui le font différer de celui que nous avons effectué d'abord, dans le cas où l'on employait les deux distances zénithales Z', Z''.

$$\log C = 5,2218297$$
$$\log \operatorname{tang}(38'22'',222) = \bar{2},0477401$$
$$3,2695698$$
$$\log \cos \tfrac{1}{2}\rho = \bar{1},9999628$$
$$\log x' = 3,2696070 \qquad x' = 1860^m,4030$$
$$h' = 98^m \qquad \log\left(\frac{h'}{\rho}\right) = \bar{5},1873527$$
$$\bar{2},4569597 \qquad \left(\frac{h'}{\rho}\right)x' = 0^m,0286$$
$$F = 1860^m,4316$$
$$\log F = 3,2696137$$

Termes correctifs:

$$\log x' = 3,2696070$$
$$\log 2\rho = 7,1049034$$
$$\log\left(\frac{x'}{2\rho}\right) = \bar{4},1647036 \qquad \log\left(\frac{x'}{2\rho}\right) = \bar{8},3294088$$
$$\log F = 3,2696137 \qquad \log F = 3,2696137$$
$$\bar{1},4343173 \qquad \bar{5},5990225$$
$$\left(\frac{x'}{2\rho}\right) F = 0^m,27184 \qquad \left(\frac{x'}{2\rho}\right)^2 F = 0^m,00003\,9721$$
$$F = 1860^m,4316 \qquad \text{négligeable.}$$
$$r'' = r' = 1860^m,7034$$

Évaluation précédente.. $1854^m,016$.

La différence de niveau trouvée ici, est donc plus forte que celle que nous avions obtenue par l'emploi des deux distances simultanées et réciproques. Elle s'écarte aussi davantage de la différence réelle $1846^m,06$. C'est une conséquence inévitable des deux hypothèses approximatives qui entrent dans cette nouvelle évaluation; et, tant par cette cause que par les erreurs que l'on commettrait sur la valeur du coefficient c si on ne le déterminait pas d'après des observations météorologiques, les différences de hauteurs ainsi calculées ne devront pas être employées pour un nivellement géodésique que l'on voudrait rendre exact, à moins que les amplitudes des arcs A ne fussent beaucoup moindres que nous ne l'avons supposé dans cet exemple (*)

250. Je vais maintenant recommencer le même calcul en em-

(*) Il doit s'être glissé une erreur numérique dans l'évaluation de $r''-r'$ par la méthode précédente, que j'ai rapportée dans mon Mémoire sur les réfractions terrestres, page 56; car elle y est présentée inexactement comme étant égale à $1862^m,351$. La remarque n'est pas sans importance. En effet, dans cette même page du Mémoire, la valeur de $r''-r'$, déduite de l'observation faite à la station supérieure avec l'emploi du coefficient c'' propre à cette station, a été trouvée égale à $1847^m,329$. Or, si on l'associe, par une moyenne, avec l'évaluation exactement calculée que nous venons d'obtenir, on aura les résultats suivants :

Valeur de $r''-r'$, obtenue par la distance zénithale inférieure Z' combinée avec son coefficient c' ..... $1860^m,703$

Valeur de $r''-r'$, obtenue par la distance zénithale supérieure Z'' combinée avec son coefficient c'' ..... $1862^m,300$

287. Le mètre légal se trouve ainsi d'environ $\frac{44}{1000}$ de ligne plus court que la dix millionième partie du quart du méridien déduit de ces deux combinaisons. Les ellipses conclues de l'une et de l'autre offrant des différences si petites, on peut espérer d'en obtenir, par compensation, une évaluation encore plus exacte, en prenant une moyenne arithmétique entre leurs éléments déterminants logarithmiques. C'est ainsi que j'ai formé le tableau de la page 221 qui, d'après le système de données combinées, présente les dimensions moyennes du sphéroïde terrestre, considéré comme un ellipsoïde régulier de révolution, en faisant abstraction de ses irrégularités locales. En appliquant ce système de moyennes à la détermination actuelle, on trouverait :

Longueur moyenne du mètre en toises....	$0^{T},513124553\,4$
Longueur moyenne du mètre en lignes....	$443^{l},339614$

[illegible] des dernières décimales qui sont trop forte[illegible] des mesures ainsi qu'on vient de [illegible] que le mètre légal contenant [illegible] plus court que la dix-millionième [illegible] suppose elliptique, ce qui [illegible] avait espéré pouvoir lui [illegible]

[illegible] encore déterminer la longueur du mètre par une combinaison qui donne une influence prédominante à l'arc de France et d'Espagne; de sorte que le résultat devient presque indépendant, ou au moins très-peu dépendant, des opérations étran-

nant à y comprendre les termes de l'ordre e^8, on trouve aisément

$$u^2 = \tfrac{1}{16}e^4 + \tfrac{3}{128}e^6 + \tfrac{49}{4096}e^8,$$
$$u^3 = \tfrac{1}{64}e^6 + \tfrac{9}{1024}e^8,$$
$$u^4 = \tfrac{1}{256}e^8.$$

Il ne reste plus qu'à multiplier ces diverses puissances de u par leurs coefficients respectifs $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, qui les affectent dans le développement de $\log(1-u)$; et en ajoutant les produits, puis rassemblant les termes de même ordre, on a finalement

$$\log Q = \log \tfrac{1}{2}\varpi + \log a - k\left(\tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{5}{64}e^4 + \tfrac{7}{192}e^6 + \tfrac{337}{16384}e^8 \ldots\right).$$

Or, si l'on désigne par $D^{(0)}$ la longueur d'un degré quelconque correspondant à la distance polaire d, l'expression de $\log a$ trouvée page 201 donne

$$\begin{aligned} = \log(90\,D^{(0)}) - \log(\tfrac{1}{2}\varpi) &- \tfrac{3}{2}k\left(e^2\cos^2 d + \tfrac{1}{2}e^4\cos^4 d + \tfrac{1}{3}e^6\cos^6 d + \tfrac{1}{4}e^8\cos^8 d \ldots\right) \\ &+ k\left(e^2 \quad + \tfrac{1}{2}e^4 \quad + \tfrac{1}{3}e^6 \quad + \tfrac{1}{4}e^8 \quad\right) \end{aligned}$$

en ajoutant cette équation à la précédente, $\log a$ et $\log \frac{1}{2}\varpi$ disparaissent par compensation; les termes en e^2, indépendants de $\cos^2 d$, se détruisent en partie; et, après qu'on a effectué les réductions numériques auxquelles ils se prêtent, il reste

$$\begin{aligned} \log Q = \log(90\,D^{(0)}) &+ k\left(\tfrac{3}{4}e^2 \quad + \tfrac{27}{64}e^4 \quad + \tfrac{57}{192}e^6 \quad + \tfrac{3759}{16384}e^8 \ldots\right) \\ &- \tfrac{3}{2}k\left(e^2\cos^2 d + \tfrac{1}{2}e^4\cos^4 d + \tfrac{1}{3}e^6\cos^6 d + \tfrac{1}{4}e^8\cos^8 d \ldots\right). \end{aligned}$$

Si le degré $D^{(0)}$ était mesuré précisément à la distance polaire de 45°, intermédiaire entre l'équateur et le pôle, on aurait $\cos^2 d = \frac{1}{2}$. Alors les deux termes qui contiennent la première puissance de e^2 se détruiraient mutuellement; et le reste de la correction à faire à $\log(90\,D^{(0)})$ pour avoir $\log Q$, ne dépendant plus que des puissances supérieures de cette quantité, une petite incertitude sur son évaluation n'aurait qu'une faible influence sur le résultat total. L'arc moyen de France et d'Espagne n'est pas placé tout à fait dans cette condition, mais il en approche beaucoup, puisqu'on a pour lui

$$d = 43^\circ 51' 54'';$$

[illegible] ...vement participer à l'avantage que nous venons [illegible] ...s'en convaincre, il suffit de se rappeler que l'on

$$\cos^2 d = \frac{1 + \cos 2d}{2}.$$

[illegible] de cette relation pour transformer seulement le [illegible] ...ent la première puissance de $\cos^2 d$; alors le terme [illegible] ...ra, et notre expression, ainsi réduite, deviendra

$$\log Q = \log(90\,D^{(0)}) \quad + k\left(\tfrac{21}{64}e^4 \quad + \tfrac{57}{192}e^6 \quad + \tfrac{3759}{16384}e^8 \ldots\right)$$
$$- \tfrac{3}{4}k\left(\tfrac{1}{2}e^2\cos 2d + \tfrac{1}{2}e^4\cos^4 d + \tfrac{1}{3}e^6\cos^6 d + \tfrac{1}{4}e^8\cos^8 d \ldots\right).$$

[illegible] ...terme qui contient la première puissance de e^2 n'est donc pas [illegible] ...ment détruit; mais il sera fort affaibli si d diffère peu [illegible], parce que $2d$ étant presque un angle droit, $\cos 2d$ sera une [illegible] ...tion très-petite. Par exemple, pour notre arc de France et d'Espagne, on aura

$$2d = 87^\circ 43' 48'' = 90^\circ - 2^\circ 16' 12'';$$

ce qui donne. . . . . $\log \cos 2d = \bar{2},5977896$

On a, en outre, pour ce même arc. . . . . $\log \cos^2 d = \bar{1},7158396$

Si l'on combine ces valeurs avec la valeur moyenne trouvée plus haut pour e^2, laquelle donne $\log e^2 = \bar{3},8039924$, on trouvera

Somme des termes positifs de la correction. .	+ 0,0000074627
Somme des termes négatifs.	— 0,0000857304
Excès des termes négatifs.	— 0,0000782677

étant combinée avec les distances zénithales réciproques qu'on y observerait simultanément, suffirait pour calculer la différence de niveau comprise entre ces deux points, indépendamment de l'angle au centre ε, ou de l'arc terrestre A, qui sépare les pieds de ces verticales. Mais, comme je l'ai fait remarquer tome I, page 270, ce mode d'évaluation emploie réellement, pour base, la longueur totale du rayon terrestre, mené du centre de la sphère osculatrice à celle des stations dont on connaît la hauteur absolue au-dessus de cette sphère, et la grandeur de cet élément rend le résultat obtenu fort incertain. C'est précisément ce qui arrive lorsque l'on conclut les hauteurs d'après la mesure des dépressions de l'horizon de la mer. La formule qu'on emploie alors est précisément celle qui s'applique au cas général où les deux distances zénithales réciproques seraient observées simultanément. Mais s'il faut bien se résoudre alors à cette incertitude inévitable, il est essentiel de l'éviter dans tous les cas où cela est possible, en introduisant, comme élément déterminatif, la corde de l'arc terrestre compris entre les deux stations.

253. Dans une communication que j'adressai à l'Académie des Sciences le 18 juin 1838, sur l'application des circonstances météorologiques à la mesure des différences de niveau par les distances zénithales réciproques et simultanées, je n'avais pas suffisamment insisté sur cette distinction, et je m'étais beaucoup trop exagéré les avantages de la formule purement théorique. Cette inadvertance donna lieu, de la part de feu Puissant, à des remarques critiques, fort justes en ce point, mais qui cessaient de l'être en

plus favorables, il s'était arrêté à faire

$$\varepsilon = 0{,}00324, \quad \text{ce qui donne} \quad \log\varepsilon = \bar{3}{,}51054\,50102$$

et, par suite, $e^2 = 0{,}0064695024$, d'où $\log e^2 = \bar{3}{,}81087\,09$.

Avec ces valeurs, il trouve pour $\log a$, en mètres théoriques,

$$\log a = 6{,}80458\,39646.$$

Pour convertir cette expression en toises, conformément à ses calculs, il faut y appliquer la valeur qu'il attribuait au mètre théorique exprimé dans cette dernière espèce d'unités. Or, on voit, page 193 du même volume, qu'en déduisant le mètre de la portion de l'arc mesurée par lui et Méchain vers le parallèle de 45°, combinée avec l'aplatissement 0,00324, il en avait conclu, par un calcul analogue à celui que nous avons fait en dernier lieu, la longueur du mètre en lignes, $443^{l},328 = \frac{4^{T},618}{9}$.

Or, le logarithme de ce rapport est $\bar{1}{,}71021\,14192$.

En l'ajoutant à la valeur de $\log a$ en mètres théoriques, que j'ai tout à l'heure rapportée, on aura le $\log a$ en toises d'après les hypothèses de Delambre, ce qui donnera

$$\log a = 6{,}51479\,53838, \qquad \text{d'où} \qquad a = 3271865^{T},06.$$

Je ne rapporte ces résultats que pour montrer qu'ils diffèrent très-peu de ceux que nous avons obtenus; et, dans l'état actuel des données d'où l'on peut les déduire, personne ne pourrait assurer posi-

page 286. Puis il présente ces mêmes degrés exprimés en toises dans une autre Table insérée page 294. Mais celle-ci est partout affectée d'une erreur résultante de l'inexactitude de la conversion. En effet, pour transformer ces valeurs métriques en toises, il aurait dû les multiplier par la valeur du mètre théorique en toises conclue de ses hypothèses, c'est-à-dire par $\frac{4^{T},618}{9}$. Au lieu de cela, il a effectué cette conversion au moyen de deux Tables insérées pages 228 et 237, dont la première sert à transformer des nombres quelconques de toises en mètres légaux, ayant pour valeur $0^{T},513074o$, et la seconde pour transformer les mètres légaux en toises. C'est donc comme s'il avait multiplié les nombres théoriques de ses formules par $0^{T},513074o$ ou $\frac{4^{T},617666}{9}$. Ainsi le facteur de conversion qu'il a employé est trop faible de $\frac{0^{T},000334}{9}$ ou $\frac{0^{T},000111\frac{1}{3}}{3}$. De sorte qu'il faut multiplier par celui-ci les degrés en mètres théoriques de la page 286, et ajouter chaque produit aux nombres de la page 294 pour obtenir les vraies valeurs des degrés en toises. Cela donne $4^{T},1$ qu'il faut ajouter à tous les nombres de cette dernière Table, pour les avoir tels qu'il aurait dû les obtenir s'il avait fait cette réduction exactement. Quoique cette erreur soit d'un ordre de petitesse que les observations pourraient difficilement atteindre, il se peut du moins qu'elles y prétendent, et il est inutile de la laisser subsister dans une évaluation théorique, après qu'elle est constatée. C'est pourquoi j'ai jugé utile de la signaler ici.

---

pris Montagut-Montserrat-Montjouy = Montagut-Montserrat-Morella + la Morella-Montserrat-Matas — Matas-Montserrat-Montjouy.

Je forme le triangle (3) en joignant Montjouy et Saint-Jean. Dans ce triangle les données sont : le côté Montjouy-Montagut [triangle (2)], le côté Montjouy-Saint-Jean (triangle III), et l'angle compris Saint-Jean-Montagut-Montjouy = Saint-Jean-Montagut-la Morella + la Morella-Montagut-Montserrat — Montserrat-Montagut-Montjouy.

Maintenant si de l'azimut ci-dessus relaté de Matas sur l'horizon de Montjouy je retranche la somme des angles

Matas-Montjouy-Montserrat...	=	75° 22′ 38″,70
Montserrat-Montjouy-Montagut	=	37° 37′ 57″,55
Montagut-Montjouy-Saint-Jean..	=	24° 54′ 26″,56
Somme	=	137° 55′ 2″,81

j'obtiens l'azimut de Saint-Jean sur l'horizon de Montjouy = 69° 44′ 54″,69. Avec cet azimut, le côté Montjouy-Saint-Jean = 37339t,47 et la latitude de Montjouy, je calcule :

Azimut de Montjouy sur l'horizon de Saint-Jean.....	=	249° 12′ 44″,15
Retranchant l'angle Montjouy-Saint-Jean-Montagut.....	=	58° 24′ 21″,24 [(triangle (3)]
j'ai : Azimut de Montagut sur l'horizon de Saint-Jean	=	190° 48′ 22″,91 (*)

[redacted]

Montjouy ; l'autre au sud de Saint-Jean, comprise entre ce point et l'intersection du méridien de Saint-Jean avec le parallèle de Formentera. Je vais les calculer séparément.

Pour avoir la première, par Montjouy je mène l'arc P — Montjouy perpendiculaire au méridien de Saint-Jean et le coupant au point P. Je forme ainsi le triangle sphérique rectangle P—Saint-Jean-Montjouy dans lequel je connais le côté Saint-Jean-Montjouy = $3733 9^t,47$ triangle (3), l'angle P = 90°, l'angle P — Saint-Jean-Montjouy = azimut de Montjouy sur Saint-Jean — 180° = 69° 12′ 44″, 15, d'où je conclus l'angle P — Montjouy-Saint-Jean = 20° 47′ 20″,33, le côté P — Saint-Jean = $13252^t,54$ et le côté P — Montjouy = $34908^t,64$.

L'azimut de Montjouy sur l'horizon du point P est évidemment 270°; on en conclut la latitude du point P = 41°21′56″,92. Soient L cette latitude, N la normale correspondante, K le côté P — Montjouy, et nommons M le point où le parallèle de Montjouy coupe le méridien de Saint-Jean, nous aurons

$$PM = \frac{K^2 \tang L}{2N} = 163^t,75 ;$$

d'où M — Saint-Jean = P — Saint-Jean — $163^t,75 = 13088^t,79$.

La partie de l'arc méridien située au sud de Saint-Jean peut être obtenue par deux systèmes de triangles entièrement distincts et que je vais examiner successivement.

PREMIER SYSTÈME. *Fig.* 50.

Je prolonge le côté le Tosal-Montsia jusqu'à sa rencontre avec le méridien de Saint-Jean au point *h*, et je joins *h* avec le Desierto. Je forme ainsi les triangles (5) et (6). Dans le triangle (5) je connais le côté Saint-Jean-Montsia (triangle V), l'angle à Saint Jean = azimut de Montagut sur Saint-Jean — somme des angles (Montagut-Saint-Jean-Lleberia et Lleberia-Saint-Jean-Montsia); l'angle à Montsia = 180° — somme des angles (Saint-Jean-Montsia-Lleberia, Lleberia-Montsia-Bosc et Bosc-Montsia-le Tosal). La résolution du triangle (5) donne le côté *h*-Saint-Jean et le côté *h*-Montsia. Dans

le triangle (6) je connais le côté *h*-Montsia [triangle (5)], le côté Montsia-le Desierto (triangle IX) et l'angle compris à Montsia = 180° — somme des angles (le Tosal-Montsia-Arès et Arès-Montsia-le Desierto). J'en conclus le côté *h*-le Desierto et les deux angles Montsia . *h* . le Desierto et *h* . le Desierto-Montsia.

Le triangle (7) a pour sommets le point *h*, le Desierto et le point *k*, intersection du méridien de Saint-Jean avec le côté le Desierto-Campvey ou avec son prolongement. Dans ce triangle (7), je connais le côté *h*-le Desierto [triangle (6)], l'angle en *h* = 180° — somme des angles (Saint-Jean . *h* . Montsia et Montsia . *h* . le Desierto) et l'angle *h* . le Desierto . *k* = 360° — somme des angles (*h* . le Desierto-Montsia, Montsia-le Desierto-Arès, Arès-le Desierto-Espadan, Espadan-le Desierto-Mongo et Mongo-le Desierto-Campvey). La résolution du triangle (7) donne le côté *h*-*k*, le côté de ce triangle *k*-le Desierto et l'angle *h* . *k* . le Desierto. Le côté *k*-le Desierto = 82518^t,04. Il est moindre que le côté Campvey-le Desierto = 82556^t,64 du triangle XV. Cela montre que le méridien de Saint-Jean rencontre le côté Campvey-le Desierto sans que celui-ci doive être prolongé. Par conséquent, le côté Campvey-Mongo est aussi coupé par le méridien en un point *o*; les points *k*, *o* et Campvey sont les sommets du triangle (8).

Dans ce triangle (8) je connais l'angle *k* . Campvey . *o* = l'angle Desierto-Campvey-Mongo; l'angle *o* . *k* . Campvey = *h* . *k* . le Desierto et le côté *k*-Campvey = le Desierto-Campvey — *k*-le Desierto = 38^t,60. Je conclus le côté *k*-*o* et le côté *k*-Campvey.

tera = $o.r$. Mongo. Il en résulte $r.p$ = 1083t,98. Enfin, ›pérant comme pour Montjouy, on trouve que la distance p.F, point p au point F, où le parallèle de Formentera coupe le ridien de Saint-Jean = 8t,06. En récapitulant les diverses lon- ›urs que nous venons de calculer, on trouve

M	—	St-Jean	=	13088t,79
St-Jean	—	h	=	42621,91
h	—	k	=	75494,17
k	—	o	=	34,46
o	—	r	=	21343,96
r	—	p	=	1083,98
p	—	F	=	8,06
Arc méridien cherché		MF	=	153675,33

DEUXIÈME SYSTÈME DE TRIANGLES. *Fig.* 51.

Je prolonge le côté Arès-Montsia jusqu'à sa rencontre avec le ›ridien de Saint-Jean au point m, le côté Bosc-Montsia jusqu'à rencontre avec le même méridien au point y, et je joins y ec le Desierto et avec Mongo. Je forme ainsi les triangles (11), ›), (13) et (14).

Dans le triangle (11), je connais le côté Saint-Jean-Montsia iangle V), l'angle à Saint-Jean = azimut de Montagut sur nt-Jean — somme des angles (Montagut-Saint-Jean-Lleberia, Lleberia-Saint-Jean-Montsia), comme dans le premier système, l'angle à Montsia = 180° — somme des angles (Saint-Jean- ntsia-Lleberia, Lleberia-Montsia-Bosc, Bosc-Montsia-le Tosal, Tosal-Montsia-Arès); en résolvant le triangle, j'obtiens le côté Saint-Jean et le côté m-Montsia.

Dans le triangle (12), je connais le côté m-Montsia, l'angle m.Montsia = 180° — Saint-Jean.m.Montsia, et l'angle Montsia.y = 180° — somme des angles (m.Montsia-Saint- n, Saint-Jean-Montsia-Lleberia, Lleberia-Montsia-Bosc); je nle le côté $m.y$ et le côté y-Montsia.

tiale, relation qui est généralement

$$\frac{p_1 - p}{p_1} = \frac{A(\rho_1 - \rho)}{\rho_1} + \frac{B(\rho_1 - \rho)(\rho_1 + \rho)}{\rho_1^2},$$

les coefficients A et B étant les mêmes que ci-dessus. Alors, en y mettant pour ρ sa valeur $1 + u$, elle deviendra

$$\frac{p_1 - p}{p_1} = -(A + 2B)u - Bu^2,$$

et, en réduisant le second membre en nombres, elle donnera

$$\frac{p_1 - p}{p_1} = -0{,}01104040 7;$$

conséquemment,

$$p = p_1 + p_1 . 0{,}01104040 7.$$

D'après les observations de M. Gay-Lussac rapportées page 40 du Mémoire, la pression initiale p_1, exprimée en millimètres de mercure à 0°, était $761^{mm},44$. Avec cette valeur de p_1 on trouve

$$p = 761^{mm},44 + 8^{mm},4066 = 769^{mm},8466.$$

Telle aurait donc été la hauteur du baromètre dans une couche aérienne située à 98^m au-dessous du sol de l'Observatoire, si l'atmosphère considérée s'était étendue jusque-là.

Enfin, si l'on voulait savoir quelle aurait dû être la température de cette couche, il faudrait se reporter à la page 13 du Mémoire annexé à la *Connaissance des Temps* de 1841, où j'ai discuté les observations de M. Gay-Lussac. Car on y voit qu'en compensant, par construction, les petites irrégularités qu'elles présentent, le décroissement ascendant de la température dans les couches voisines du sol était de 1° centésimal pour un intervalle de hauteur égal à $188^m,5$. Ainsi, pour un intervalle descendant de 98^m, l'augmentation de la température aurait été proportionnellement $1° . \frac{98}{188,5}$ ou $0°,5199$; et, comme la température initiale t_1 était $30°,75$, elle aurait été, dans cette couche inférieure de 98^m, égale

Récapitulation.

M	—	St-Jean	=	13088t,79
St-Jean	—	m	=	19527,87
m	—	y	=	85418,16
y	—	r	=	34548,40
r	—	p	=	1083,98
p	—	F	=	8,06
Arc méridien cherché		MF	=	153675,26
Par le premier système, on a		MF	=	153675,33
Moyenne...			=	153675,29

ADDITION. *Sur quelques précautions qu'il faut prendre pour effectuer avec sûreté et simplicité les calculs numériques dans les applications de Géodésie et d'Astronomie, où ils se répètent sous des formes analogiques pour une longue suite d'opérations.*

Dans les applications isolées où les diverses phases du calcul numérique se suivent avec des formes progressivement différentes, il n'y a pas d'autre recommandation à faire que celle de l'exactitude de chaque détail, qui s'obtient, avec la plus grande probabilité, en réitérant au moins deux fois chaque opération partielle qui conduit au résultat final. Mais, lorsque le travail que l'on doit effectuer comprend une suite plus ou moins prolongée d'applications d'une nature analogue, on trouve beaucoup d'avantage à conserver, autant qu'on le peut, cette analogie dans les opérations de détail, tant par la disposition qu'on leur donne que par l'ordre suivant lequel on les accomplit; et l'on peut encore souvent les abréger, comme aussi les rendre plus sûres, en préparant des Tables auxiliaires qui s'appliquent à toutes, ou en calculant d'avance les quantités constantes dont l'emploi doit s'y répéter.

pour une atmosphère sphérique en équilibre, où le décroissement des températures suit la même loi sur tous les rayons partis du centre. Il faudrait maintenant considérer le cas plus général d'une atmosphère recouvrant un ellipsoïde de révolution tournant autour de son axe polaire, ayant, à diverses latitudes, des températures superficielles inégales, périodiquement changeantes avec les positions annuelles du soleil, et se communiquant aux couches aériennes inférieures qui lui sont superposées. Alors il faudrait avoir égard aux courants constants développés dans cette atmosphère par ces inégalités de température combinées avec le mouvement de rotation de l'ellipsoïde solide, phénomènes dont nous avons établi l'existence dans le tome I, § 104, pages 179 et suivantes. Ce problème, extrêmement difficile à résoudre, devra toujours être l'objet des travaux des analystes futurs. Sans doute les lois de configuration des trajectoires lumineuses, traversant une telle atmosphère, en deviendront beaucoup plus complexes, et le calcul analytique des réfractions qui s'y produisent deviendrait aussi beaucoup plus pénible, sinon tout à fait impraticable. Mais, dans la troisième partie de mon Mémoire annexé à la *Connaissance des Temps* de 1839, page 76, j'ai donné une méthode générale par laquelle on peut éluder cette dernière difficulté et déterminer les réfractions dans toute atmosphère de constitution donnée, sans être arrêté par aucun obstacle d'intégration. Ainsi, lorsque la combinaison du calcul et des expériences aura permis d'assigner, dans chaque lieu, le mode réel de superposition instantané des couches aériennes, on pourra, par cette méthode, conclure numériquement les réfractions qui s'y opèrent. Car la rapidité du mouvement de transmission de la lumière fera que les trajectoires lumineuses s'y formeront comme dans une atmosphère en repos. Ce sera là le résultat final auquel ces théories puissent prétendre, et qu'elles doivent s'efforcer d'atteindre un jour.

ion rigoureuse avec le côté donné C est, page 107,

$$\sin C_1 = \sin C \frac{\sin A_1}{\sin A}.$$

:, en prenant les logarithmes tabulaires des deux membres,

$$\log \sin C_1 = \log \sin C + \log \left(\frac{\sin A_1}{\sin A}\right).$$

garithme de $\frac{\sin A_1}{\sin A}$ se prend immédiatement par différence les Tables de sinus, puisque A et A_1 sont donnés en valeurs laires. Il n'y a de difficulté que pour obtenir log sin C d'après eur de l'arc C donné en toises. Mais, si R est le rayon de la e osculatrice à laquelle appartient cet arc, on aura, *sur cette sphère*, par les formules de la page 68,

$$\log \sin C = \log C - \frac{k}{6}\frac{C^2}{R^2};$$

ı déduira donc

$$\log \sin C_1 = \log \left(\frac{C \sin A_1}{\sin A}\right) - \frac{k}{6}\frac{C^2}{R^2}.$$

eau des triangles est assez restreint comparativement aux ns totales du sphéroïde terrestre, pour que l'on puisse, u uffisante exactitude, le supposer étendu sur une même e latrice au milieu de sa longueur, la connaissance de n O fira pour obtenir immédiatement les logarithmes des de les côtés suivants, puisque ces sinus sont liés entre par de ples proportionnalités ayant pour coefficients les orts des s des angles opposés aux côtés que l'on compare. l'après l'ép ve que nous avons faite pages 109 et 110, cette osition d'idem ourra être toujours admise comme suffisam- exacte dans les s grandes triangulations que l'on puisse tuer sur la surface une même contrée. Car, si l'on suppose C égal à 10000 puis, que l'on calcule le terme correctif $\frac{\quad}{R^2}$ avec les deux valeurs extrêmes de R rapportées page 109, e l'on forme log sin C dans ces deux suppositions, les valeurs

de sin C qui en résulteront seront $999984^{T},53$ dans la sphère p laire, et $999984^{T},43$ dans l'équatoriale; de sorte qu'elles diffé ront entre elles de quantités dont on ne saurait pratiquement pondre sur une si grande longueur. Cette différence deviendra do bien moindre et complétement négligeable sur l'étendue d'u même triangulation où le rayon osculateur moyen se rapproche toujours des rayons extrêmes bien plus que ceux que nous veno d'employer comparativement.

Le logarithme de sin C_1, le premier de tous, étant ainsi obte numériquement par l'équation (2), on formera de suite tous l autres par ordre, d'après la condition de proportionnalité aux sin des angles respectivement opposés. Il ne restera plus qu'à reven de ces logarithmes à ceux des côtés C_1, C_2,... qui y correspondent Cela se fera encore par les formules de la page 68, qui donnero

$$(3)\quad \begin{cases} \log C_1 = \log \sin C_1 + \dfrac{k}{6}\dfrac{\sin^2 C_1}{R^2}; \\ \log C_2 = \log \sin C_2 + \dfrac{k}{6}\dfrac{\sin^2 C_2}{R^2}, \ldots; \end{cases}$$

et ainsi de suite, R étant toujours le rayon de la sphère osculatric au milieu du réseau considéré.

En comparant les formules (2) et (3), on voit que le facteur $\frac{k}{6R}$ des termes correctifs y sera le même dans toute la suite des calculs On obtiendra donc facilement ces termes en formant le logarithm de ce facteur et l'associant à celui de C^2, C_1^2, C_2^2,..., ou de $\sin^2 C_1$,

[redacted]

tant donc, pour cela, de la connaissance déjà obtenue sur la forme générale du sphéroïde, on calculera log N par la série de la page 222, en donnant à la distance polaire d la valeur moyenne qui convient au milieu, ou à peu près au milieu de la triangulation considérée.

Supposons, par exemple, que cette triangulation s'étende sur l'arc méridien compris entre les stations extrêmes de Greenwich et de Formentera. D'après le tableau de la page 179, les valeurs extrêmes de d seront 38° 31′ 20″ et 51° 20′ 7″, ce qui donnera pour moyenne 44° 55′ 43″,5. On pourra donc, sans difficulté, prendre d égal à 45° en nombres ronds. Alors, $\cos^2 d$ étant $\frac{1}{2}$, la valeur de log N en toises, calculée, par la série de la page 222, avec sept décimales exactes, se composera des termes suivants :

$$\begin{aligned} \log a &= 6{,}5147957 \\ \tfrac{1}{4}ke^2 &= 0{,}0006914 \\ \tfrac{1}{16}e^4 &= 0{,}0000011 \\ \hline \log N &= 6{,}5154882 \end{aligned}$$

Il est évident, par les considérations précédentes, que l'évaluation avec sept décimales sera parfaitement suffisante pour le calcul des termes correctifs. On a, d'ailleurs, dans le même ordre de décimales,

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{k}{6}\right) &= \bar{2}{,}8596331 \\ \log N^2 &= 13{,}0309764 \\ \hline \text{Il en résultera donc} \quad \log F &= \overline{15}{,}8286567 \end{aligned}$$

Alors on devra ajouter à ce logarithme $2 \log C_n$, ou $2 \log \sin C_{n+1}$, selon que l'on voudra employer les équations (2) ou les équations (3). Mais, d'après ce que nous avons reconnu, le premier mode de correction ne servira qu'une seule fois pour transformer en sinus le premier côté C, base de la triangulation. La petitesse de la caractéristique $\overline{15}$ ne rend pas le terme correctif insensible dans la seconde conversion, parce que les sinus ne sont pas évalués, ici, en parties du rayon de la sphère osculatrice pris pour unité, mais

en toises, dont ce rayon contient toujours un grand nombre. Cel donne aux logarithmes des carrés des sinus une caractéristiqu positive de même ordre que celle des arcs.

Au tome II de la *Base du système métrique*, page 698, Delambr a présenté le calcul des termes correctifs sous cette forme logarith mique, mais avec une petite inadvertance théorique qui, heu reusement, ne saurait avoir qu'une influence négligeable sur le résultats qu'il en déduit. Pour concevoir en quoi elle consiste, i faut se rappeler que le calcul des triangles s'effectue, dans ce procédé, en les supposant placés sur la sphère transversalement osculatrice au méridien. C'est donc évidemment la normale moyenne N qu'il faut prendre comme rayon de cette sphère pour calculer les termes correctifs, comme je l'ai fait ici. Au lieu de cela, Delambre forme le facteur F en employant pour R le rayon du cercle qui est osculateur dans le sens du méridien, car il le déduit du degré moyen mesuré dans ce sens. C'est sur ce principe qu'il a calculé les Tables numériques de réduction I et II, rapportées pages 783 et 789 du même volume, Tables dont je parlerai dans un moment. Mais, sans doute, cette inadvertance théorique lui a échappé, parce qu'elle n'a pas, dans les applications, de conséquence appréciable. En effet, en calculant log F par le rayon osculateur elliptique, comme il le fait à la page 698 du tome II, il trouve

$$\log F = \overline{15},83133\,33700.$$

Le degré du méridien qu'il y emploie répond à peu près, dans ses

[redacted]

Alors, en calculant log F avec cette valeur, comme je l'ai fait plus haut, on trouve

$$\log F = \overline{15},82856\,13934.$$

Cette évaluation s'écarte à peine de celle que nous avons obtenue sur notre ellipsoïde pour une distance polaire presque égale. Telle est donc la valeur de log F que Delambre aurait dû adopter pour être conséquent avec ses constructions. Mais, pour voir que la différence de ces deux évaluations n'a eu qu'une influence négligeable sur ses résultats, il n'y a qu'à les employer successivement pour convertir en sinus la base de Melun, dont la longueur C, exprimée en arc et en toises, tome II, page 698, a pour logarithme

$$\log C = 3,78261\,06224\,;$$

car on en déduit ainsi :

Par le facteur elliptique de Delambre,

$$\log \sin C = 3,78361\,03721\,;$$

Par le facteur normal,

$$\log \sin C = 3,78361\,03736.$$

Or, en repassant aux nombres, on trouve que ces deux sinus diffèrent seulement de $\frac{18}{1000}$ de ligne, quantité dont il était impossible de répondre dans les mesures de l'arc C. Ainsi, les sinus de tous les autres côtés de la chaîne se déduisant de celui-là par simple proportion, les erreurs que leur évaluation comportait ont dû être pareillement insensibles.

Dans le calcul de sa triangulation, Delambre n'a pas employé les termes correctifs sous leur forme logarithmique, comme je les ai donnés plus haut. Il en a formé deux Tables auxiliaires, rapportées au tome II, pages 783 et 789, où les corrections sont calculées numériquement pour des valeurs de C ou de sin C, procédant par des intervalles de 1000 toises pour toutes les grandeurs que sa triangulation embrassait; et il y prenait leurs valeurs précises, par proportionnalité, entre les nombres les plus voisins de ces Tables. Mais, ainsi qu'on peut le voir par un exemple qu'il en

donne lui-même au tome II, page 698, l'évaluation de ces proportionnelles est aussi pénible et beaucoup plus sujette à erreur, que le calcul direct effectué, pour chaque cas, par les expressions logarithmiques mises sous les formes simples que je leur ai donnée plus haut. Cette manière de procéder, qu'il a préférée, était appropriée à l'habitude qu'on a eue trop longtemps, à mon avis, dans les calculs astronomiques et géodésiques, d'épargner, autant qu'on le pouvait, l'emploi immédiat des Tables de logarithmes, comme s'il y avait quelque intérêt à exempter de l'usage de cette invention admirable les personnes auxquelles ces calculs étaient confiés. Il me semble, au contraire, très-essentiel, pour la sûreté des résultats, de recourir immédiatement aux Tables logarithmiques pour la traduction des formules en nombres lorsqu'elles se présentent ainsi exprimées, afin de laisser toujours subsister la trace de leur origine; sauf à réduire, autant que possible, les logarithmes variables qu'il faut y introduire dans chaque application particulière, comme nous l'avons fait ici.

Je terminerai ce que j'ai à dire sur cette partie importante de l'Astronomie qui concerne les opérations géodésiques, en mentionnant, avec de justes éloges, un *Abrégé de Géodésie à l'usage des marins*, qui a été composé par M. Begat, ingénieur-hydrographe de la Marine française. Toutes les questions que les marins peuvent avoir besoin de résoudre pour effectuer les relèvements des côtes, ou pour des nivellements astronomiques, ou même pour des motifs purement scientifiques, y sont exposées avec toute la

CHAPITRE XIX.

Manière de fixer les positions relatives des différents points de la surface terrestre.

262. Les connaissances que nous venons d'acquérir sur la figure de la terre nous permettent de déterminer avec exactitude les positions relatives des divers points de sa surface, c'est-à-dire la situation précise des différents lieux, leurs distances mutuelles; en un mot, tous les résultats rigoureux de la géographie mathématique. Entrons dans quelque détail sur cette utile application.

Lorsqu'on veut représenter exactement la configuration d'un terrain, et fixer la position des principaux objets qui y sont situés, on lie ces objets par des triangles dont on mesure les angles et dont on calcule les côtés; cela s'appelle *lever un plan*.

Si le terrain que l'on doit mesurer est considérable, par exemple s'il s'agit d'une province ou d'un grand pays, on le traverse d'un bout à l'autre par une méridienne, que l'on trace suivant les procédés que nous avons expliqués dans le chapitre XVIII. Ensuite on choisit sur cette méridienne un certain nombre de points plus ou moins rapprochés, et par ces points on trace autant d'arcs de grands cercles, *perpendiculaires à la méridienne*, toujours par les procédés que nous avons décrits. La méridienne et les perpendiculaires forment ainsi un système de coordonnées curvilignes, auxquelles on peut mathématiquement rapporter les différents points de la surface terrestre. En effet, la situation d'un objet est évidemment déterminée lorsqu'on connaît : 1° sa distance à la méridienne, distance qui se mesure sur la perpendiculaire; 2° l'arc de la méridienne compris entre la perpendiculaire et le point que l'on a choisi sur cette méridienne pour lieu de départ. Pour tracer ces résultats sur un plan, on suppose la méridienne développée suivant une ligne droite, et les perpendiculaires sont figurées par d'autres lignes droites parallèles entre elles et perpendiculaires à la précédente. C'est ainsi qu'a été construite la *grande carte de France* que l'on doit à la famille scientifiquement historique des Cassini, et

elle a été appelée de leur nom. La triangulation générale qu'elle a exigée a été entièrement recommencée depuis par les ingénieurs du département de la Guerre, qui l'ont exécutée avec des instruments, des procédés d'observation et des méthodes de calculs beaucoup plus exacts que j'ai exposés dans le chapitre XVIII. On a tiré de ces matériaux les éléments d'une *carte générale de la France* qui sera à la fois meilleure et plus conforme à l'état actuel des localités. Mais le principe de représentation est le même. Tous les points en sont rapportés à la méridienne qui passe par la grande salle de l'Observatoire de Paris. Le point qui sert d'origine des coordonnées, et à partir duquel on commence à compter les arcs de cette méridienne, est au centre de cette salle. La construction de ces cartes offre comme une sorte de réseau étendu sur la surface terrestre, et dont les fils servent de guides pour retrouver la position des lieux.

Dans la supposition de la terre sphérique, supposition bien suffisante pour l'objet qui nous occupe, on a vu que les perpendiculaires sont des grands cercles qui vont tous concourir, sur la sphère, en deux points, ou pôles, situés aux extrémités du diamètre normal au plan du premier méridien. Cependant, pour la construction de la carte, on les représente par des lignes droites parallèles. Les véritables rapports de configuration et d'étendue doivent donc se trouver altérés par cette circonstance. L'erreur est de peu d'importance à une petite distance de part et d'autre du méridien qui sert de point de départ, parce qu'alors la convergence des perpendiculaires n'est pas encore sensible. Mais elle aug

plus favorables, il s'était arrêté à faire

$$\varepsilon = 0{,}00324, \quad \text{ce qui donne} \quad \log\varepsilon = \bar{3}{,}51054\,50102$$

et, par suite, $e^2 = 0{,}0064695024$, d'où $\log e^2 = \bar{3}{,}81087\,09$.

Avec ces valeurs, il trouve pour $\log a$, en mètres théoriques,

$$\log a = 6{,}80458\,39646.$$

Pour convertir cette expression en toises, conformément à ses calculs, il faut y appliquer la valeur qu'il attribuait au mètre théorique exprimé dans cette dernière espèce d'unités. Or, on voit, page 193 du même volume, qu'en déduisant le mètre de la portion de l'arc mesurée par lui et Méchain vers le parallèle de 45°, combinée avec l'aplatissement 0,00324, il en avait conclu, par un calcul analogue à celui que nous avons fait en dernier lieu, la longueur du mètre en lignes, $443^{l},328 = \frac{4^{T},618}{9}$.

Or, le logarithme de ce rapport est $\bar{1}{,}71021\,14192$.

En l'ajoutant à la valeur de $\log a$ en mètres théoriques, que j'ai tout à l'heure rapportée, on aura le $\log a$ en toises d'après les hypothèses de Delambre, ce qui donnera

$$\log a = 6{,}51479\,53838, \qquad \text{d'où} \qquad a = 3271865^{T},06.$$

Je ne rapporte ces résultats que pour montrer qu'ils diffèrent très-peu de ceux que nous avons obtenus ; et, dans l'état actuel des données d'où l'on peut les déduire, personne ne pourrait [illegible]

gitude est l'arc de l'équateur compris entre le premier méridien le méridien local que l'on veut considérer. La *longitude* est *orientale* ou *occidentale*, selon que le lieu est situé à l'orient ou à l'occident du premier méridien. Au moyen de cette convention, les valeurs par lesquelles on l'exprime sont toujours moindres qu'une demi-circonférence.

D'après ces définitions, lorsqu'un astre quelconque passe au premier méridien, par l'effet du mouvement diurne du ciel, il se trouve à l'occident de tout méridien plus oriental, et à l'orient de tout méridien plus occidental. Deux points de la terre qui diffèrent en longitude comptent, au même instant, des heures différentes. Par exemple, si l'angle qui les sépare est la vingt-quatrième partie de la circonférence, ou 15 degrés sexagésimaux, lorsque le soleil sera arrivé au méridien le plus oriental, il sera encore éloigné de l'autre de 15° ou de la vingt-quatrième partie du jour. Les habitants de cette partie plus occidentale de la terre n'auront donc pas encore midi, mais onze heures du matin. Ils ne compteraient que dix heures si l'angle des deux méridiens était de 30°. En général, le retard est proportionnel à cet angle (*).

C'est ainsi que les matelots de Magellan, lorsqu'ils revinrent en Portugal, après avoir fait le tour de la terre, comptaient, à bord de leur vaisseau, un jour de moins que dans le port d'où ils étaient partis. En effet, tandis que le méridien du port restait fixe, ces navigateurs s'en étaient éloignés, en se dirigeant toujours vers l'occident, et en suivant, pour ainsi dire, le mouvement diurne du soleil. Ils avaient transporté, peu à peu, tout autour de la terre,

la différence des longitudes est égale à celle des heures locales, convertie en degrés de l'équateur.

265. On parviendrait à connaître cette différence si l'on pouvait avoir un signal instantané qui fût aperçu en même temps dans les deux lieux. La différence des heures locales absolues, comptées à ce même moment, donnerait la différence des longitudes. Lorsque ces lieux sont assez rapprochés, pour qu'un point intermédiaire de la surface terrestre soit visible de l'un et de l'autre, on opère en ce point des apparitions, ou des disparitions soudaines de signaux lumineux, comme je l'ai expliqué dans le chapitre XVIII en parlant de la mesure des arcs de parallèles. Mais la courbure de la terre rend ce procédé inapplicable entre des lieux plus éloignés.

Heureusement, les phénomènes astronomiques offrent beaucoup de ces apparitions subites propres à servir de signaux. Tels sont, par exemple, les éclipses de lune, de soleil, celles des étoiles par la lune, que l'on nomme *occultations d'étoiles*, et d'autres phénomènes du même genre, que nous ferons connaître par la suite.

On emploie aussi, pour le même objet, l'observation des distances de la lune aux étoiles, que l'on mesure avec des instruments de réflexion, qui peuvent servir même à la mer, et dont nous parlerons plus loin. Le mouvement propre de la lune étant très-rapide, ses distances au soleil ou aux principales étoiles varient à chaque instant. L'observation exacte de cette distance fixe donc et détermine l'instant physique où elle a été faite. Si, par exemple, on observe aujourd'hui en Amérique, à telle heure, telle minute, telle seconde, une distance de la lune au soleil ou à Rigel, et si l'on sait, d'ailleurs, par la *Connaissance des Temps*, que cette distance aura lieu à telle heure, telle minute, telle seconde du méridien de Paris, cette observation sera aussi comme celle d'un signal instantané, et la différence des temps donnera l'angle des méridiens ou la différence des longitudes. C'est pour cela que les distances de la lune au soleil et aux étoiles principales sont calculées, dans la *Connaissance des Temps*, de trois heures en trois heures pour le méridien de Paris. Dans le *Nautical Almanack*, elles le sont pour le méridien de

Greenwich. Nous reviendrons plus tard sur ce procédé, quand nous aurons déterminé les lois du mouvement de la lune, et nous verrons alors quel degré d'exactitude on en peut attendre: sa connaissance est surtout d'une importance extrême pour les marins.

266. On a cherché à atteindre le même but au moyen des instruments nommés *garde-temps*, ou *montres marines*, dont j'ai indiqué la construction mécanique dans le tome II, page 316. Ce sont, comme je l'ai dit alors, des montres portatives construites avec un soin extrême, et munies de compensateurs, de manière à conserver toute leur régularité, malgré les variations de température et malgré les secousses inséparables d'un long voyage. On règle la montre au moment du départ, et si elle marque, par exemple, $0^h 0^m 0^s$ lorsqu'une certaine étoile passe au méridien, quelque part qu'on la transporte ensuite, il en sera toujours de même en supposant sa marche exacte ; et lorsqu'elle marquera $0^h 0^m 0^s$, on sera sûr que l'étoile dont il s'agit passe au premier méridien. Il suffira donc d'attendre que cette étoile passe au méridien du lieu où l'on se trouve, et de voir l'heure que l'horloge indique ; ce sera la distance des deux méridiens exprimée en temps, et l'on en déduira aussitôt la différence des longitudes.

On est obligé, dans cette estimation, d'avoir égard aux petits mouvements particuliers que l'on a remarqués dans les étoiles, et qui font varier un peu l'heure de leur retour au méridien. Mais, dans l'état actuel de l'astronomie, ces mouvements sont très-exactement connus, et il est facile d'y avoir égard. On emploie

tances angulaires des astres au zénith fixe, et mesurer aussi le distances angulaires de ces astres entre eux.

268. En cela, comme dans les autres parties de l'astronomie observatrice, l'exactitude est une acquisition toute moderne. On s'est servi à la mer, pendant bien des siècles, d'instruments grossiers tels que l'*astrolabe, fig.* 52, et l'*arbalestrille, fig.* 53. Je n'en parle que parce qu'ils sont mentionnés fréquemment dans d'anciens voyages, et que leur usage se comprend à la simple inspection. L'astrolabe, appelé aussi *anneau astronomique*, était un cercle de métal divisé, portant à son centre une alidade tournante munie de deux pinnules, et ayant, sur son contour, un anneau A par lequel on le tenait librement suspendu. Le point de suspension figurait le zénith de l'instrument, et le diamètre passant par ce point figurait la verticale. Pour observer, on tournait l'alidade jusqu'à ce que l'œil, placé en O, aperçût l'astre S à travers les pinnules, et on lisait sur la division l'angle formé par la ligne visuelle avec le diamètre vertical AB, ou avec le diamètre horizontal HH. Le premier de ces angles était la distance de l'astre au zénith, le second sa hauteur sur l'horizon. Mais les oscillations du navire, rendant le diamètre vertical instable, devaient causer de grandes erreurs dans l'angle observé. L'arbalestrille, qui a été plus longtemps en usage, et qui est représentée ici, *fig.* 53, se compose d'abord d'une planchette de bois équarrie OL, au milieu de laquelle est implanté un axe cylindrique AX aussi en bois, sur lequel se meut, à frottement, une planchette PP dont le plan lui est perpendiculaire. Pour observer le soleil, unique usage de

pris Montagut-Montserrat-Montjouy = **Montagut-Montserr**
Morella + la Morella-Montserrat-Matas — **Matas-Montserrat-M**
jouy.

Je forme le triangle (3) en joignant **Montjouy et Saint-J**
Dans ce triangle les données sont : le côté **Montjouy-Mont**
[triangle (2)], le côté Montjouy-Saint-Jean (**triangle III**), et l'a
compris Saint-Jean-Montagut-Montjouy = **Saint-Jean-Montag**
Morella + la Morella-Montagut-Montserrat — **Montserrat-Mo**
gut-Montjouy.

Maintenant si de l'azimut ci-dessus relaté **de Matas sur l'hor**
de Montjouy je retranche la somme des angles

Matas-Montjouy-Montserrat...	=	75° 22′ 38″,70
Montserrat-Montjouy-Montagut	=	37° 37′ 57″,55
Montagut-Montjouy-Saint-Jean..	=	24° 54′ 26″,56
Somme	=	137° 55′ 2″,81

j'obtiens l'azimut de Saint-Jean sur l'horizon de **Montjo**
= 69° 44′ 54″,69. Avec cet azimut, le côté **Montjouy-Saint-Je**
= 37339t,47 et la latitude de Montjouy, je calcule :

Azimut de Montjouy sur l'horizon de Saint-Jean.....	=	249° 12′ 44″,15
Retranchant l'angle Montjouy-Saint-Jean-Montagut.....	=	58° 24′ 21″,24 [(triangle (3)]
j'ai : Azimut de Montagut sur l'horizon de Saint-Jean	=	190° 48′ 22″,91 (*)

[redacted]

des côtes. Mais l'incertitude qui peut résulter de cette différen est un accident éventuel que l'on ne saurait éviter, puisqu'il n'e soumis à aucune loi par laquelle on puisse le prévoir.

270. Un perfectionnement notable fut apporté aux dispositions précédentes dans l'instrument représenté *fig.* 54, et que l'on nomme un *quartier anglais.* Il se compose essentiellement d'un quadrant entier en bois ou en métal, divisé sur sa circonférence; mais pour le rendre plus maniable, ce quadrant est formé de deux arcs concentriques d'un rayon différent. Le plus petit porte en M une pinnule mobile dans laquelle on enchâsse une lentille biconvexe dont l'axe, dirigé au centre commun des deux secteurs, fait converger les faisceaux lumineux sur une petite fente O, derrière laquelle on place l'œil; et le plus grand arc porte une seconde pinnule M′ également mobile sur son contour. Pour observer, on se tourne vers le soleil, et, regardant l'horizon apparent à travers la fente O, on amène la pinnule M′ sur cette direction, en coïncidence avec l'image lumineuse du disque formée par la lentille M′. Alors, l'angle au centre MCM′ exprime évidemment la hauteur actuelle de l'astre sur l'horizon, et on lit sa mesure sur les divisions du limbe. Cet instrument ne peut encore servir que pour observer le soleil; mais il est, comme l'arbalestrille, indépendant des oscillations du navire, parce que leur amplitude est toujours insensible comparativement à l'éloignement des objets observés.

271. Enfin, une amélioration importante et définitive fut introduite, dans ces procédés, en armant l'instrument d'une lunette et de deux miroirs, tellement disposés que l'on peut y voir à la

Mais pour observer, on la fait tourner autour d'une charnière K, de sorte qu'elle devienne perpendiculaire au plan du limbe qui est maintenu vertical, ou à peu près vertical, pendant l'opération. Ce limbe est divisé en demi-degrés subdivisés par un vernier fixé à l'extrémité de son alidade mobile CL; et, comme la réflexion double les angles qu'on observe, la graduation les exprime tous réduits à leur vraie valeur. L'alidade porte à son centre de rotation C un miroir étamé MM, qui se meut avec elle, et dont le plan est normal; on l'appelle le *grand miroir*. Sur le rayon extrême de l'instrument, il y a un second miroir fixe *mm*, un peu extérieur, pour ne pas gêner le mouvement de l'alidade. Il est perpendiculaire au plan du limbe, comme le premier, et, d'après sa moindre étendue relative, on l'appelle le *petit miroir*. La glace qui le compose a, ou doit avoir, ses faces exactement parallèles entre elles; mais la face extérieure est étamée seulement sur une moitié de sa superficie, afin que l'on puisse y voir simultanément l'un des astres par double réflexion, et l'horizon, ou le second astre par vision directe. La direction fixe de ce second miroir est, ou doit être telle, qu'il se trouve parallèle au grand miroir MM, lorsque le vernier de l'alidade coïncide avec le zéro de la graduation du limbe, comme le représente la *fig.* 56. Cette disposition, ainsi que la perpendicularité des deux miroirs au plan du limbe, est préparée très-approximativement par l'artiste; mais on vérifie ces conditions par l'expérience, comme je le dirai tout à l'heure, et on en rectifie au besoin l'accomplissement par des rappels préparés pour ce but. En les supposant réalisées, lorsque le vernier de l'alidade sera amené sur le zéro de la division du limbe, comme le représente la *fig.* 56, si l'on dirige la ligne de vision directe sur l'horizon à travers la partie nue du petit miroir, on doit évidemment la voir en coïncidence avec l'image de ce même horizon, formée par double réflexion sur la portion étamée, et la lunette portée par l'instrument sert seulement pour apprécier cette coïncidence plus exactement qu'on ne le ferait à la vue simple; dès lors, si l'on maintient la ligne visuelle directe sur l'horizon, et qu'on fasse tourner l'alidade pour amener sur cette ligne un astre quelconque, il faudra évidemment qu'elle décrive dans le plan du limbe un angle égal à la moitié de la distance

angulaire comprise dans ce même plan, entre l'astre et le point de l'horizon sur lequel on vise; ainsi on lira cette distance sur le limbe, après que la coïncidence aura été opérée. Si l'on veut que le plan d'observation soit vertical, on *balance* l'instrument de manière que l'image réfléchie de l'astre reste tangente à l'image directe de l'horizon apparent. Et si, au lieu de celui-ci, on prend pour point de mire direct un second astre, la coïncidence de son image directe avec l'image réfléchie de l'autre donnera de même l'angle visuel compris entre eux. L'exactitude de ces déterminations est facilitée par l'insertion dans la lunette d'un réticule fixe formé de deux fils dont l'un est parallèle au plan du limbe, et l'autre lui est perpendiculaire. Quand un des astres observés est le soleil, on interpose dans le trajet de ses rayons des verres colorés qui en affaiblissent l'intensité, et il faut que les faces de ces verres soient exactement parallèles pour que les rayons qui les traversent ne soient pas déviés.

On vérifie la perpendicularité du grand miroir au plan de l'instrument, en faisant tourner l'alidade de manière à voir par réflexion sur ce miroir une petite portion du limbe, et observant si elle paraît sur le prolongement de son image directe. Ce résultat étant obtenu, on amène l'image réfléchie d'un objet en contact avec l'image directe, et l'on vérifie la possibilité, ainsi que l'exactitude de leur superposition. Le parallélisme des deux miroirs et la direction absolue essentielle à chacun d'eux se vérifient par la disposition expérimentale représentée *fig.* 56, ou en amenant l'image réfléchie du disque solaire, en contact avec son image directe, alternativement par ses bords contraires. La position

sextant est limitée par les bornes de son limbe. Borda a étendu ce mode d'observation, en lui substituant un cercle entier, qu'il a même rendu répétiteur; et c'est aujourd'hui l'instrument universellement employé à la mer par les officiers français. Il est représenté en projection verticale et horizontale dans les *fig.* 57 et 58. Le mode d'observation est d'ailleurs fondé sur le même principe que celui du sextant, et c'est ce que je puis me borner à dire pour ne pas entrer ici dans trop de détails. Ces deux instruments s'emploient à la mer pour régler la marche des montres marines par les hauteurs du soleil, de la lune, ou même des étoiles, et ils servent avec une utilité plus admirable encore pour y déterminer la longitude actuelle du navire par l'observation des distances angulaires de la lune au soleil, aux étoiles, ou aux planètes. Telle est la perfection de ces procédés, et celle des Tables lunaires auxquelles on les compare, que la position d'un navire au milieu de l'Océan se détermine ainsi à chaque instant, avec une amplitude d'incertitude moindre que l'étendue de l'horizon que l'œil peut embrasser du pont du navire. On les emploie avec un égal succès dans les relâches, pour le relèvement des côtes, ainsi que pour fixer les positions absolues des lieux. Et c'est par leur association, avec l'usage des montres marines perfectionnées, que la géographie est parvenue de nos jours à un état d'universalité comme de précision, dont auparavant on ne pouvait concevoir aucune idée. Les déterminations de lieux qui nous ont été transmises par les astronomes grecs, et même par les arabes, renferment des erreurs énormes, parce que, manquant de tout moyen précis pour déterminer les longitudes relatives, ils ne pouvaient les évaluer que par des résultats d'itinéraires, ou tout au plus par des éclipses de lune observées en différents lieux, mais encore avec des déterminations extrêmement imparfaites du temps absolu, qui ajoutaient leurs propres erreurs à celles que présente la fixation des phases de ces phénomènes. Aussi toute la géographie ancienne et du moyen âge ne peut plus aujourd'hui servir que pour constater l'existence, et retrouver à peu près les positions de villes maintenant détruites, ou pour marquer historiquement les essais progressifs de l'esprit humain. Il faut toutefois remarquer, en l'honneur des Grecs, que c'est à eux

que l'on doit l'idée et la première exécution des cartes géographiques, par lesquelles on représente la position relative de tous les points de la terre sur un dessin plan. Lorsque j'aurai exposé l'ensemble des phénomènes et des méthodes astronomiques, je présenterai dans un Appendice le tableau comparé des applications qu'on en fait dans les observatoires fixes, et à la mer, pour déterminer le temps absolu, ainsi que la latitude et la longitude relative d'un vaisseau au mouvement; renvoyant, pour les détails pratiques de l'astronomie nautique, aux ouvrages qui traitent spécialement de ce sujet.

273. Depuis un petit nombre d'années, l'usage des chemins de fer et des bateaux à vapeur a donné aux communications une facilité et une rapidité dont on n'avait pas eu d'idée jusqu'alors. On a profité de ces circonstances pour déterminer, par des transports de chronomètres, les longitudes relatives de plusieurs observatoires fixes, des plus célèbres qui existent en Europe. J'entrerai dans quelques détails sur cette nouvelle application, et sur les conditions nécessaires à remplir pour que les résultats qu'on en déduit atteignent l'extrême précision qu'exige la fixation d'une donnée astronomique aussi importante.

La question est, au fond, la même que nous avons résolue dans le chapitre XVIII, page 255, pour trouver la différence des temps sidéraux absolus H_0, H_n, marqués au même instant physique dans deux stations S_0, S_n, dont la seconde est la plus occidentale. En nommant I'' l'angle dièdre compris entre les méridiens de ces deux stations, cet angle se trouve lié aux temps absolus par l'é-

établies en S_0 et S_n ont été réglées exactement, sur le temps sidéral, par les passages méridiens ; et l'on connaît, par leurs indications, le temps sidéral *absolu* H_0, H_n, compté à chaque instant, dans chaque observatoire, à partir d'une origine convenue. Prenons un chronomètre parfait, exempt de toutes irrégularités accidentelles, et déterminons d'abord sa marche diurne propre, dans la station S_0, en comparant ses indications, pendant plusieurs jours consécutifs, avec l'horloge de cette station. Concevons-le, comme elle, réglé sur le temps sidéral, et soit a_0 son avance fixe sur elle, en sorte qu'il marque $H_0 + a_0$ sur son cadran propre quand elle marque H_0. On le transporte à la station S_n sans qu'il se dérange, et en le comparant à l'horloge qui s'y trouve établie, on trouve que son avance sur le temps sidéral local est a_n, en sorte qu'il marque $H_n + a_n$ sur son cadran propre, lorsqu'elle marque l'heure H_n. Maintenant, puisque les marches des deux horloges et du chronomètre sont supposées avoir individuellement une parfaite uniformité, si l'on retranche a_0 de son indication actuelle, à un instant quelconque, le reste $H_n + a_n - a_0$ devra exprimer le temps sidéral absolu H_0, que l'horloge de la station S_0 marque à ce même instant. On aura donc l'égalité

$$H_n + a_n - a_0 = H_0,$$

d'où l'on tire

$$a_n - a_0 = H_0 - H_n.$$

En effet, si le temps sidéral absolu était identique dans les deux stations, l'avance du chronomètre sur ce temps, dans la seconde station, devrait être a_0, comme dans la première. Le changement qu'on lui trouve alors doit donc exprimer la différence qui existe entre les indications de ce temps dans les deux stations.

Il ne reste plus qu'à discuter les détails pratiques de l'opération pour les ramener aux conditions d'identité et de régularité que nous avons admises.

274. Les deux horloges fixes peuvent être réglées individuellement avec la dernière précision. Mais, comme elles doivent être suivies par des observateurs différents, il faudra préalablement

constater la différence qui peut exister, et qui existe presque toujours entre les temps absolus auxquels ils rapportent un même passage dans une même station. Nous en avons déjà fait la remarque en parlant des observations simultanées des feux de poudre, employées dans les mesures d'arcs de parallèles. Cette différence s'appelle l'*équation personnelle*. L'expérience prouve qu'entre des observateurs également habiles, elle peut s'élever jusqu'à $\frac{3}{10}$ de seconde de temps sidéral.

Une erreur du même genre pourrait se produire dans les comparaisons du chronomètre avec chaque horloge, si elle était faite par des observateurs différents. Toutefois, l'expérience prouve que l'effet en est beaucoup moindre. Mais on l'évite complétement en faisant effectuer cette comparaison par le même observateur, qui se transporte successivement d'une station à l'autre, passant d'abord de S_0 à S_n, puis revenant de S_n à S_0, avec le chronomètre employé.

Je ne parle pas des réductions qu'il faut faire pour transformer les indications réelles des deux horloges et du chronomètre, en indications sidérales dans les deux stations. Elles s'effectuent par des calculs dont les principes ont été expliqués dans le tome II, pages 309 et suivantes.

Mais, ce qui n'est pas moins indispensable, et bien plus difficile, il faut assurer à la marche propre du chronomètre une invariable uniformité. C'est ce qui serait pratiquement impossible à réaliser pour aucun de ces instruments, quelques soins que l'on apporte à leur construction. Heureusement, cet inconvénient

de sin C qui en résulteront seront $999984^{T},53$ dans la sphère polaire, et $999984^{T},43$ dans l'équatoriale; de sorte qu'elles différeront entre elles de quantités dont on ne saurait pratiquement répondre sur une si grande longueur. Cette différence deviendra donc bien moindre et complétement négligeable sur l'étendue d'une même triangulation où le rayon osculateur moyen se rapprochera toujours des rayons extrêmes bien plus que ceux que nous venons d'employer comparativement.

Le logarithme de sin C_1, le premier de tous, étant ainsi obtenu numériquement par l'équation (2), on formera de suite tous les autres par ordre, d'après la condition de proportionnalité aux sinus des angles respectivement opposés. Il ne restera plus qu'à revenir de ces logarithmes à ceux des côtés C_1, C_2,... qui y correspondent. Cela se fera encore par les formules de la page 68, qui donneront

$$(3)\quad \begin{cases} \log C_1 = \log \sin C_1 + \dfrac{k}{6}\dfrac{\sin^2 C_1}{R^2}; \\ \log C_2 = \log \sin C_2 + \dfrac{k}{6}\dfrac{\sin^2 C_2}{R^2}, \ldots; \end{cases}$$

et ainsi de suite, R étant toujours le rayon de la sphère osculatrice au milieu du réseau considéré.

En comparant les formules (2) et (3), on voit que le facteur $\frac{k}{6R^2}$ des termes correctifs y sera le même dans toute la suite des calculs. On obtiendra donc facilement ces termes en formant le logarithme de ce facteur et l'associant à celui de C^2, C_1^2, C_2^2,..., ou de $\sin^2 C_1$,

sont égaux entre eux : il n'en est pas de même des degrés de longitude, lorsqu'ils sont comptés sur des parallèles différents. Il est visible, en effet, que les parallèles diminuent de grandeur en approchant du pôle, d'où il suit que les parties aliquotes de ces cercles, comme sont les degrés, diminuent dans le même rapport. Ainsi, pour évaluer en degrés de l'équateur terrestre un certain nombre de degrés, minutes et secondes d'un parallèle connu, la terre étant supposée sphérique, il faut multiplier ce nombre par le rapport des rayons du parallèle et de l'équateur, c'est-à-dire par le sinus de la distance polaire ou le cosinus de la latitude. Car cette opération est la même que celle du § 9, pour la mesure des degrés des parallèles célestes. Or, en appliquant ici la *fig.* 2, que nous avons construite pour ce cas, O désignera le centre de la terre supposée sphérique, QEQ′ le grand cercle de l'équateur, et QPQ′ un grand cercle méridien. Alors, si l'on considère un parallèle quelconque tel que SΠS′, qui sera un petit cercle ayant son centre en O′, OS sera le rayon R de la sphère, et SO′ ou r le rayon du parallèle, à la distance polaire SOO′, ou d. Ainsi, r aura pour valeur R sin d, ou R cos QOS.

Lorsque l'on ne veut plus supposer la terre sphérique, la longueur des degrés de longitude dépend de la forme qu'on lui attribue, comme nous l'avons expliqué, page 166, en rapportant les mesures d'arcs de parallèles.

276. Avec ces données on peut calculer la distance itinéraire de deux points quelconques de la terre, dont on connaît la longitude et la latitude; le calcul est des plus faciles, si l'on suppose

en toises, dont ce rayon contient toujours un grand nombre. Cela donne aux logarithmes des carrés des sinus une caractéristique positive de même ordre que celle des arcs.

Au tome II de la *Base du système métrique*, page 698, Delambre a présenté le calcul des termes correctifs sous cette forme logarithmique, mais avec une petite inadvertance théorique qui, heureusement, ne saurait avoir qu'une influence négligeable sur les résultats qu'il en déduit. Pour concevoir en quoi elle consiste, il faut se rappeler que le calcul des triangles s'effectue, dans ce procédé, en les supposant placés sur la sphère transversalement osculatrice au méridien. C'est donc évidemment la normale moyenne N qu'il faut prendre comme rayon de cette sphère pour calculer les termes correctifs, comme je l'ai fait ici. Au lieu de cela, Delambre forme le facteur F en employant pour R le rayon du cercle qui est osculateur dans le sens du méridien, car il le déduit du degré moyen mesuré dans ce sens. C'est sur ce principe qu'il a calculé les Tables numériques de réduction I et II, rapportées pages 783 et 789 du même volume, Tables dont je parlerai dans un moment. Mais, sans doute, cette inadvertance théorique lui a échappé, parce qu'elle n'a pas, dans les applications, de conséquence appréciable. En effet, en calculant log F par le rayon osculateur elliptique, comme il le fait à la page 698 du tome II, il trouve

$$\log F = \overline{15},83133\,33700.$$

Le degré du méridien qu'il y emploie répond à peu près, dans ses

Alors, en calculant log F avec cette valeur, comme je l'ai fait plus haut, on trouve

$$\log F = \overline{15},82856\,13934.$$

Cette évaluation s'écarte à peine de celle que nous avons obtenue sur notre ellipsoïde pour une distance polaire presque égale. Telle est donc la valeur de log F que Delambre aurait dû adopter pour être conséquent avec ses constructions. Mais, pour voir que la différence de ces deux évaluations n'a eu qu'une influence négligeable sur ses résultats, il n'y a qu'à les employer successivement pour convertir en sinus la base de Melun, dont la longueur C, exprimée en arc et en toises, tome II, page 698, a pour logarithme

$$\log C = 3,78261\,06224\,;$$

car on en déduit ainsi :

Par le facteur elliptique de Delambre,

$$\log \sin C = 3,78361\,03721\,;$$

Par le facteur normal,

$$\log \sin C = 3,78361\,03736.$$

Or, en repassant aux nombres, on trouve que ces deux sinus diffèrent seulement de $\frac{15}{1000}$ de ligne, quantité dont il était impossible de répondre dans les mesures de l'arc C. Ainsi, les sinus de tous les autres côtés de la chaîne se déduisant de celui-là par simple proportion, les erreurs que leur évaluation comportait ont dû être pareillement insensibles.

Dans le calcul de sa triangulation, Delambre n'a pas employé les termes correctifs sous leur forme logarithmique, comme je les ai donnés plus haut. Il en a formé deux Tables auxiliaires, rapportées au tome II, pages 783 et 789, où les corrections sont calculées numériquement pour des valeurs de C ou de sin C, procédant par des intervalles de 1000 toises pour toutes les grandeurs que sa triangulation embrassait; et il y prenait leurs valeurs précises, par proportionnalité, entre les nombres les plus voisins de ces Tables. Mais, ainsi qu'on peut le voir par un exemple qu'il en

donne lui-même au tome II, page 698, l'évaluation de ces proportionnelles est aussi pénible et beaucoup plus sujette à erreur, que le calcul direct effectué, pour chaque cas, par les expressions logarithmiques mises sous les formes simples que je leur ai données plus haut. Cette manière de procéder, qu'il a préférée, était appropriée à l'habitude qu'on a eue trop longtemps, à mon avis, dans les calculs astronomiques et géodésiques, d'épargner, autant qu'on le pouvait, l'emploi immédiat des Tables de logarithmes, comme s'il y avait quelque intérêt à exempter de l'usage de cette invention admirable les personnes auxquelles ces calculs étaient confiés. Il me semble, au contraire, très-essentiel, pour la sûreté des résultats, de recourir immédiatement aux Tables logarithmiques pour la traduction des formules en nombres lorsqu'elles se présentent ainsi exprimées, afin de laisser toujours subsister la trace de leur origine; sauf à réduire, autant que possible, les logarithmes variables qu'il faut y introduire dans chaque application particulière, comme nous l'avons fait ici.

Je terminerai ce que j'ai à dire sur cette partie importante de l'Astronomie qui concerne les opérations géodésiques, en mentionnant, avec de justes éloges, un *Abrégé de Géodésie à l'usage des marins*, qui a été composé par M. Begat, ingénieur-hydrographe de la Marine française. Toutes les questions que les marins peuvent avoir besoin de résoudre pour effectuer les relèvements des côtes, ou pour des nivellements astronomiques, ou même pour des motifs purement scientifiques, y sont exposées avec toute la clarté désirable, et traitées avec la plus grande simplicité. Si les

CHAPITRE XX.

Examen des conséquences physiques qui résultent de l'universalité du mouvement diurne. Il ne s'ensuit pas nécessairement que ce mouvement doive être attribué aux astres plutôt qu'à la terre.

278. Lorsqu'on a établi un fait physique sur des preuves incontestables, il faut en examiner soigneusement les conséquences, et distinguer celles qui sont nécessaires de celles qui sont seulement possibles. Déjà, dans le chapitre IV du tome Ier, nous avons appliqué ce mode de discussion aux premiers résultats que nous avait offerts le simple aspect du ciel. L'exactitude presque mathématique avec laquelle nous avons maintenant déterminé les lois du mouvement diurne nous permet de donner une forme incomparablement plus décidée, et plus précise, aux notions qui nous avaient alors été suggérées comme de simples doutes, ou, tout au plus, comme des apparences de probabilité qu'il fallait suivre.

Pour raisonner avec quelque certitude sur les mouvements célestes, d'après les apparences que nous observons, il fallait connaître à peu près notre position dans l'univers et les dimensions relatives de la terre que nous habitons. Nous voyons maintenant, de la manière la plus évidente, que cette terre, qui nous paraît si vaste, n'est dans l'espace que comme un globule à peu près sphé-

elle a été appelée de leur nom. La triangulation générale qu'elle a exigée a été entièrement recommencée depuis par les ingénieurs du département de la Guerre, qui l'ont exécutée avec des instruments, des procédés d'observation et des méthodes de calculs beaucoup plus exacts que j'ai exposés dans le chapitre XVIII. On a tiré de ces matériaux les éléments d'une *carte générale de la France* qui sera à la fois meilleure et plus conforme à l'état actuel des localités. Mais le principe de représentation est le même. Tous les points en sont rapportés à la méridienne qui passe par la grande salle de l'Observatoire de Paris. Le point qui sert d'origine des coordonnées, et à partir duquel on commence à compter les arcs de cette méridienne, est au centre de cette salle. La construction de ces cartes offre comme une sorte de réseau étendu sur la surface terrestre, et dont les fils servent de guides pour retrouver la position des lieux.

Dans la supposition de la terre sphérique, supposition bien suffisante pour l'objet qui nous occupe, on a vu que les perpendiculaires sont des grands cercles qui vont tous concourir, sur la sphère, en deux points, ou pôles, situés aux extrémités du diamètre normal au plan du premier méridien. Cependant, pour la construction de la carte, on les représente par des lignes droites parallèles. Les véritables rapports de configuration et d'étendue doivent donc se trouver altérés par cette circonstance. L'erreur est de peu d'importance à une petite distance de part et d'autre du méridien qui sert de point de départ, parce qu'alors la convergence des perpendiculaires n'est pas encore sensible. Mais elle aug-

ıx lignes géodésiques, et dérive de leur construction, telle que ous l'avons définie. Quelle que soit la figure de la terre, ces li- ıes sont les plus courtes que l'on puisse mener entre deux points onnés, et elles déterminent, par conséquent, la plus courte dis- nce itinéraire de ces points sur le sphéroïde. Mais la démonstra- on de cette propriété suppose un calcul qui ne peut trouver ace ici.

264. Les opérations du tracé sont bornées à des étendues très- etites, par rapport aux dimensions totales de la terre. Il est npossible de prolonger ces courbes à travers les mers, d'un con- nent à un autre. On y supplée par des observations astronomi- ues.

Pour connaître la situation d'un lieu sur la surface terrestre, suffit de connaître le parallèle sur lequel il se trouve, et sa po- tion sur ce parallèle. Tout se réduit donc à déterminer ces deux léments.

Le parallèle se détermine par l'observation de la latitude ou de ı distance à l'équateur. Nous avons donné plus haut les moyens de ı mesurer par des observations de distances zénithales méridien- es, faites avec des instruments fixes. Nous apprendrons plus loin obtenir le même résultat avec les instruments portatifs. Ce pre- ıier élément de position peut donc être considéré, sinon comme onnu, du moins comme généralement déterminable pour un lieu uelconque.

La position du lieu sur le parallèle se trouve en calculant sa dis- ance à un méridien connu. Pour cela, on en choisit un, à vo- onté, que l'on suppose fixe, et que l'on nomme *premier méridien*. e sera, par exemple, celui qui passe par Paris. Si l'on imagine lusieurs autres plans méridiens, menés par les divers points d'un même parallèle, ils feront des angles dièdres plus ou moins grands vec le premier. Chaque point sera donc distingué des autres par 'angle qui lui est propre et qui fixe sa position sur le parallèle. Cet ngle se nomme la *longitude du lieu*. Comme tous les plans des mé- idiens se coupent mutuellement, suivant l'axe de rotation du ciel, eurs angles dièdres ont pour mesure l'arc de l'équateur compris ntre eux. Ainsi, dans l'application actuelle, la mesure de la lon-

gitude est l'arc de l'équateur compris entre le premier méridien et le méridien local que l'on veut considérer. La *longitude* est *orientale* ou *occidentale*, selon que le lieu est situé à l'orient ou à l'occident du premier méridien. Au moyen de cette convention, les valeurs par lesquelles on l'exprime sont toujours moindres qu'une demi-circonférence.

D'après ces définitions, lorsqu'un astre quelconque passe au premier méridien, par l'effet du mouvement diurne du ciel, il se trouve à l'occident de tout méridien plus oriental, et à l'orient de tout méridien plus occidental. Deux points de la terre qui diffèrent en longitude comptent, au même instant, des heures différentes. Par exemple, si l'angle qui les sépare est la vingt-quatrième partie de la circonférence, ou 15 degrés sexagésimaux, lorsque le soleil sera arrivé au méridien le plus oriental, il sera encore éloigné de l'autre de 15° ou de la vingt-quatrième partie du jour. Les habitants de cette partie plus occidentale de la terre n'auront donc pas encore midi, mais onze heures du matin. Ils ne compteraient que dix heures si l'angle des deux méridiens était de 30°. En général, le retard est proportionnel à cet angle (*).

C'est ainsi que les matelots de Magellan, lorsqu'ils revinrent en Portugal, après avoir fait le tour de la terre, comptaient, à bord de leur vaisseau, un jour de moins que dans le port d'où ils étaient partis. En effet, tandis que le méridien du port restait fixe, ces navigateurs s'en étaient éloignés, en se dirigeant toujours vers l'occident, et en suivant, pour ainsi dire, le mouvement diurne du soleil. Ils avaient transporté, peu à peu, tout autour de la terre,

la différence des longitudes est égale à celle des heures locales, convertie en degrés de l'équateur.

268. On parviendrait à connaître cette différence si l'on pouvait avoir un signal instantané qui fût aperçu en même temps dans les deux lieux. La différence des heures locales absolues, comptées à ce même moment, donnerait la différence des longitudes. Lorsque ces lieux sont assez rapprochés, pour qu'un point intermédiaire de la surface terrestre soit visible de l'un et de l'autre, on opère en ce point des apparitions, ou des disparitions soudaines de signaux lumineux, comme je l'ai expliqué dans le chapitre XVIII en parlant de la mesure des arcs de parallèles. Mais la courbure de la terre rend ce procédé inapplicable entre des lieux plus éloignés.

Heureusement, les phénomènes astronomiques offrent beaucoup de ces apparitions subites propres à servir de signaux. Tels sont, par exemple, les éclipses de lune, de soleil, celles des étoiles par la lune, que l'on nomme *occultations d'étoiles*, et d'autres phénomènes du même genre, que nous ferons connaître par la suite.

On emploie aussi, pour le même objet, l'observation des distances de la lune aux étoiles, que l'on mesure avec des instruments de réflexion, qui peuvent servir même à la mer, et dont nous parlerons plus loin. Le mouvement propre de la lune étant très-rapide, ses distances au soleil ou aux principales étoiles varient à chaque instant. L'observation exacte de cette distance fixe donc et détermine l'instant physique où elle a été faite. Si, par exemple, on observe aujourd'hui en Amérique, à telle heure, telle minute, telle seconde, une distance de la lune au soleil ou à Rigel, et si l'on sait, d'ailleurs, par la *Connaissance des Temps*, que cette distance aura lieu à telle heure, telle minute, telle seconde du méridien de Paris, cette observation sera aussi comme celle d'un signal instantané, et la différence des temps donnera l'angle des méridiens ou la différence des longitudes. C'est pour cela que les distances de la lune au soleil et aux étoiles principales sont calculées, dans la *Connaissance des Temps*, de trois heures en trois heures pour le méridien de Paris. Dans le *Nautical Almanack*, elles le sont pour le méridien de

Greenwich. Nous reviendrons plus tard sur ce procédé, quand nous aurons déterminé les lois du mouvement de la lune, et nous verrons alors quel degré d'exactitude on en peut attendre: sa connaissance est surtout d'une importance extrême pour les marins.

266. On a cherché à atteindre le même but au moyen des instruments nommés *garde-temps*, ou *montres marines*, dont j'ai indiqué la construction mécanique dans le tome II, page 316. Ce sont, comme je l'ai dit alors, des montres portatives construites avec un soin extrême, et munies de compensateurs, de manière à conserver toute leur régularité, malgré les variations de température et malgré les secousses inséparables d'un long voyage. On règle la montre au moment du départ, et si elle marque, par exemple, $0^h\,0^m\,0^s$ lorsqu'une certaine étoile passe au méridien, quelque part qu'on la transporte ensuite, il en sera toujours de même en supposant sa marche exacte; et lorsqu'elle marquera $0^h\,0^m\,0^s$, on sera sûr que l'étoile dont il s'agit passe au premier méridien. Il suffira donc d'attendre que cette étoile passe au méridien du lieu où l'on se trouve, et de voir l'heure que l'horloge indique; ce sera la distance des deux méridiens exprimée en temps, et l'on en déduira aussitôt la différence des longitudes.

On est obligé, dans cette estimation, d'avoir égard aux petits mouvements particuliers que l'on a remarqués dans les étoiles, et qui font varier un peu l'heure de leur retour au méridien. Mais, dans l'état actuel de l'astronomie, ces mouvements sont très-exactement connus, et il est facile d'y avoir égard. On emploie

instant au point où l'on se trouve ; et c'est ce qu'il est très-aisé de faire, même à la mer, en observant la hauteur du soleil, d'une étoile, ou d'une planète sur l'horizon. En effet, la latitude du vaisseau est connue par les hauteurs méridiennes du soleil ou des étoiles que l'on observe tous les jours et même plusieurs fois par jour, lorsque le ciel est serein. Ainsi on aura l'heure, comme dans le § 329, par le calcul de l'angle horaire, d'après la hauteur observée (*).

Nous avons aussi supposé que la montre marine suivait exactement, malgré le tran port, la marche qu'elle avait primitivement au lieu du départ. Cela est presque impossible, à la rigueur, et quelque parfaits que ces instruments puissent être, il serait très-imprudent de s'y confier aveuglément. Mais en observant des hauteurs du soleil ou des étoiles, toutes les fois que cela est possible, on finit par connaître, jour par jour, la marche de la montre, et par déterminer ses plus petites inégalités, auxquelles on a ensuite égard dans le calcul de la longitude. Comme dans ces opérations faites à bord, l'observatoire marche avec l'observateur, on tient compte de l'effet de son déplacement sur les observations que l'on compare, au moyen de divers procédés connus des marins.

Je ferai connaître plus tard, avec détail, l'extrême perfection que l'on a donnée à ces diverses méthodes, chronométriques ou astronomiques, ainsi que l'usage qu'on en fait pour trouver la longitude tant sur mer que sur terre. Mon dessein, dans ces commencements, est seulement d'indiquer la nature des procédés. Mais je dois pourtant dire comment, dans un navire qui oscille sur les flots de la mer, on peut obtenir, par observation, les dis-

(*) Soient Δ la distance polaire de l'astre ; Z sa distance zénithale, ou le complément de sa hauteur apparente corrigée de la réfraction ; D la distance du pôle au zenith ou le complément de la latitude ; enfin P' l'angle horaire cherché. Les trois quantités Δ, D, Z étant connues par l'observation, on aura

$$\sin \tfrac{1}{2} P' = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{Z+\Delta-D}{2}\right)\sin\left(\frac{Z+D-\Delta}{2}\right)}{\sin\Delta . \sin D}},$$

formule qui a déjà été donnée tome II, page 401.

tances angulaires des astres au zénith fixe, et mesurer aussi les distances angulaires de ces astres entre eux.

268. En cela, comme dans les autres parties de l'astronomie observatrice, l'exactitude est une acquisition toute moderne. On s'est servi à la mer, pendant bien des siècles, d'instruments grossiers tels que l'*astrolabe, fig.* 52, et l'*arbalestrille, fig.* 53. Je n'en parle que parce qu'ils sont mentionnés fréquemment dans d'anciens voyages, et que leur usage se comprend à la simple inspection. L'astrolabe, appelé aussi *anneau astronomique*, était un cercle de métal divisé, portant à son centre une alidade tournante munie de deux pinnules, et ayant, sur son contour, un anneau A par lequel on le tenait librement suspendu. Le point de suspension figurait le zénith de l'instrument, et le diamètre passant par ce point figurait la verticale. Pour observer, on tournait l'alidade jusqu'à ce que l'œil, placé en O, aperçût l'astre S à travers les pinnules, et on lisait sur la division l'angle formé par la ligne visuelle avec le diamètre vertical AB, ou avec le diamètre horizontal HH. Le premier de ces angles était la distance de l'astre au zénith, le second sa hauteur sur l'horizon. Mais les oscillations du navire, rendant le diamètre vertical instable, devaient causer de grandes erreurs dans l'angle observé. L'arbalestrille, qui a été plus longtemps en usage, et qui est représentée ici, *fig.* 53, se compose d'abord d'une planchette de bois équarrie OL, au milieu de laquelle est implanté un axe cylindrique AX aussi en bois, sur lequel se meut, à frottement, une planchette PP dont le plan lui est perpendiculaire. Pour observer le soleil, unique usage de

expriment sa valeur, pour l'intervalle que la planchette PP a parcouru, depuis l'origine X. On voit que cet instrument n'est, en réalité, qu'un gnomon sur lequel la limite de l'ombre doit être fort incertaine; mais il faut y remarquer l'idée ingénieuse de réaliser une ligne horizontale, ou à peu près horizontale, dans une station d'observation perpétuellement mobile, en alignant un rayon visuel sur l'horizon apparent de la mer. Car ce même principe a été appliqué dans tous les instruments postérieurs.

269. A la rigueur, le rayon ainsi aligné n'est pas exactement perpendiculaire à la verticale du point d'observation, ni même exactement rectiligne. Il se dirige de ce point, tangentiellement à la surface sphéroïdale de la mer, en décrivant une trajectoire courbe, modifiée par l'influence actuelle de la réfraction, entre le point de départ et le point de tangence. Mais on connaît toujours la hauteur absolue du premier au-dessus du niveau de la mer, puisque l'observateur s'y trouve. On connaît aussi le rayon de la surface terrestre que la trajectoire doit toucher. Avec ces données, on peut calculer la *dépression* de sa première tangente au-dessous de l'horizontale exacte du point de départ, sinon pour un cas quelconque et imprévu de l'atmosphère, du moins pour la supposition de son état moyen. Cela donne déjà une rectification qui rétablit très-approximativement l'horizontalité, et l'on en prépare l'application par des Tables numériques, où la correction à faire est calculée d'avance, selon les diverses élévations où l'observateur peut se trouver à bord du navire. Enfin, on peut l'adapter rigoureusement à la *réfraction* même actuelle, en mesurant, avec des instruments préparés pour ce but, la distance angulaire totale des deux points opposés de l'horizon. Car le supplément de cet angle, à 360°, est évidemment le double de la distance du zénith vrai, à chacun des horizons apparents sur lesquels on dirige le rayon visuel, de sorte qu'on sait par là combien ce rayon se trouve au-dessous ou au-dessus de l'horizontale exacte qui passe par l'œil de l'observateur. A la vérité, la subdivision de l'angle total, par bissection, suppose que la réfraction totale est égale sur les deux portions diamétralement opposées de la mer, ce qui peut bien souvent ne pas avoir lieu, surtout près

des côtes. Mais l'incertitude qui peut résulter de cette différence est un accident éventuel que l'on ne saurait éviter, puisqu'il n'est soumis à aucune loi par laquelle on puisse le prévoir.

270. Un perfectionnement notable fut apporté aux dispositions précédentes dans l'instrument représenté *fig.* 54, et que l'on nomme un *quartier anglais*. Il se compose essentiellement d'un quadrant entier en bois ou en métal, divisé sur sa circonférence; mais pour le rendre plus maniable, ce quadrant est formé de deux arcs concentriques d'un rayon différent. Le plus petit porte en M une pinnule mobile dans laquelle on enchâsse une lentille biconvexe dont l'axe, dirigé au centre commun des deux secteurs, fait converger les faisceaux lumineux sur une petite fente O, derrière laquelle on place l'œil; et le plus grand arc porte une seconde pinnule M′ également mobile sur son contour. Pour observer, on se tourne vers le soleil, et, regardant l'horizon apparent à travers la fente O, on amène la pinnule M′ sur cette direction, en coïncidence avec l'image lumineuse du disque formée par la lentille M′. Alors, l'angle au centre MCM′ exprime évidemment la hauteur actuelle de l'astre sur l'horizon, et on lit sa mesure sur les divisions du limbe. Cet instrument ne peut encore servir que pour observer le soleil; mais il est, comme l'arbalestrille, indépendant des oscillations du navire, parce que leur amplitude est toujours insensible comparativement à l'éloignement des objets observés.

271. Enfin, une amélioration importante et définitive fut introduite, dans ces procédés, en armant l'instrument d'une lunette et de deux miroirs, tellement disposés que l'on peut y voir à la

Mais pour observer, on la fait tourner autour d'une charnière K, de sorte qu'elle devienne perpendiculaire au plan du limbe qui est maintenu vertical, ou à peu près vertical, pendant l'opération. Ce limbe est divisé en demi-degrés subdivisés par un vernier fixé à l'extrémité de son alidade mobile CL; et, comme la réflexion double les angles qu'on observe, la graduation les exprime tous réduits à leur vraie valeur. L'alidade porte à son centre de rotation C un miroir étamé MM, qui se meut avec elle, et dont le plan est normal; on l'appelle le *grand miroir*. Sur le rayon extrême de l'instrument, il y a un second miroir fixe *mm*, un peu extérieur, pour ne pas gêner le mouvement de l'alidade. Il est perpendiculaire au plan du limbe, comme le premier, et, d'après sa moindre étendue relative, on l'appelle le *petit miroir*. La glace qui le compose a, ou doit avoir, ses faces exactement parallèles entre elles; mais la face extérieure est étamée seulement sur une moitié de sa superficie, afin que l'on puisse y voir simultanément l'un des astres par double réflexion, et l'horizon, ou le second astre par vision directe. La direction fixe de ce second miroir est, ou doit être telle, qu'il se trouve parallèle au grand miroir MM, lorsque le vernier de l'alidade coïncide avec le zéro de la graduation du limbe, comme le représente la *fig.* 56. Cette disposition, ainsi que la perpendicularité des deux miroirs au plan du limbe, est préparée très-approximativement par l'artiste; mais on vérifie ces conditions par l'expérience, comme je le dirai tout à l'heure, et on en rectifie au besoin l'accomplissement par des rappels préparés pour ce but. En les supposant réalisées, lorsque le vernier de l'alidade sera amené sur le zéro de la division du limbe, comme le représente la *fig.* 56, si l'on dirige la ligne de vision directe sur l'horizon à travers la partie nue du petit miroir, on doit évidemment la voir en coïncidence avec l'image de ce même horizon, formée par double réflexion sur la portion étamée, et la lunette portée par l'instrument sert seulement pour apprécier cette coïncidence plus exactement qu'on ne le ferait à la vue simple; dès lors, si l'on maintient la ligne visuelle directe sur l'horizon, et qu'on fasse tourner l'alidade pour amener sur cette ligne un astre quelconque, il faudra évidemment qu'elle décrive dans le plan du limbe un angle égal à la moitié de la distance

angulaire comprise dans ce même plan, entre l'astre et le point de l'horizon sur lequel on vise; ainsi on lira cette distance sur le limbe, après que la coïncidence aura été opérée. Si l'on veut que le plan d'observation soit vertical, on *balance* l'instrument de manière que l'image réfléchie de l'astre reste tangente à l'image directe de l'horizon apparent. Et si, au lieu de celui-ci, on prend pour point de mire direct un second astre, la coïncidence de son image directe avec l'image réfléchie de l'autre donnera de même l'angle visuel compris entre eux. L'exactitude de ces déterminations est facilitée par l'insertion dans la lunette d'un réticule fixe formé de deux fils dont l'un est parallèle au plan du limbe, et l'autre lui est perpendiculaire. Quand un des astres observés est le soleil, on interpose dans le trajet de ses rayons des verres colorés qui en affaiblissent l'intensité, et il faut que les faces de ces verres soient exactement parallèles pour que les rayons qui les traversent ne soient pas déviés.

On vérifie la perpendicularité du grand miroir au plan de l'instrument, en faisant tourner l'alidade de manière à voir par réflexion sur ce miroir une petite portion du limbe, et observant si elle paraît sur le prolongement de son image directe. Ce résultat étant obtenu, on amène l'image réfléchie d'un objet en contact avec l'image directe, et l'on vérifie la possibilité, ainsi que l'exactitude de leur superposition. Le parallélisme des deux miroirs et la direction absolue essentielle à chacun d'eux se vérifient par la disposition expérimentale représentée *fig.* 56, ou en amenant l'image réfléchie du disque solaire, en contact avec son image directe, alternativement par ses bords contraires. La position

sextant est limitée par les bornes de son limbe. Borda a étendu ce mode d'observation, en lui substituant un cercle entier, qu'il a même rendu répétiteur; et c'est aujourd'hui l'instrument universellement employé à la mer par les officiers français. Il est représenté en projection verticale et horizontale dans les *fig.* 57 et 58. Le mode d'observation est d'ailleurs fondé sur le même principe que celui du sextant, et c'est ce que je puis me borner à dire pour ne pas entrer ici dans trop de détails. Ces deux instruments s'emploient à la mer pour régler la marche des montres marines par les hauteurs du soleil, de la lune, ou même des étoiles, et ils servent avec une utilité plus admirable encore pour y déterminer la longitude actuelle du navire par l'observation des distances angulaires de la lune au soleil, aux étoiles, ou aux planètes. Telle est la perfection de ces procédés, et celle des Tables lunaires auxquelles on les compare, que la position d'un navire au milieu de l'Océan se détermine ainsi à chaque instant, avec une amplitude d'incertitude moindre que l'étendue de l'horizon que l'œil peut embrasser du pont du navire. On les emploie avec un égal succès dans les relâches, pour le relèvement des côtes, ainsi que pour fixer les positions absolues des lieux. Et c'est par leur association, avec l'usage des montres marines perfectionnées, que la géographie est parvenue de nos jours à un état d'universalité comme de précision, dont auparavant on ne pouvait concevoir aucune idée. Les déterminations de lieux qui nous ont été transmises par les astronomes grecs, et même par les arabes, renferment des erreurs énormes, parce que, manquant de tout moyen précis pour déterminer les longitudes relatives, ils ne pouvaient les évaluer que par des résultats d'itinéraires, ou tout au plus par des éclipses de lune observées en différents lieux, mais encore avec des déterminations extrêmement imparfaites du temps absolu, qui ajoutaient leurs propres erreurs à celles que présente la fixation des phases de ces phénomènes. Aussi toute la géographie ancienne et du moyen âge ne peut plus aujourd'hui servir que pour constater l'existence, et retrouver à peu près les positions de villes maintenant détruites, ou pour marquer historiquement les essais progressifs de l'esprit humain. Il faut toutefois remarquer, en l'honneur des Grecs, que c'est à eux

que l'on doit l'idée et la première exécution des cartes géographiques, par lesquelles on représente la position relative de tous les points de la terre sur un dessin plan. Lorsque j'aurai exposé l'ensemble des phénomènes et des méthodes astronomiques, je présenterai dans un Appendice le tableau comparé des applications qu'on en fait dans les observatoires fixes, et à la mer, pour déterminer le temps absolu, ainsi que la latitude et la longitude relative d'un vaisseau au mouvement; renvoyant, pour les détails pratiques de l'astronomie nautique, aux ouvrages qui traitent spécialement de ce sujet.

273. Depuis un petit nombre d'années, l'usage des chemins de fer et des bateaux à vapeur a donné aux communications une facilité et une rapidité dont on n'avait pas eu d'idée jusqu'alors. On a profité de ces circonstances pour déterminer, par des transports de chronomètres, les longitudes relatives de plusieurs observatoires fixes, des plus célèbres qui existent en Europe. J'entrerai dans quelques détails sur cette nouvelle application, et sur les conditions nécessaires à remplir pour que les résultats qu'on en déduit atteignent l'extrême précision qu'exige la fixation d'une donnée astronomique aussi importante.

La question est, au fond, la même que nous avons résolue dans le chapitre XVIII, page 255, pour trouver la différence des temps sidéraux absolus H_0, H_n, marqués au même instant physique dans deux stations S_0, S_n, dont la seconde est la plus occidentale. En nommant I'' l'angle dièdre compris entre les méridiens de ces deux stations, cet angle se trouve lié aux temps absolus par l'é-

établies en S_0 et S_n ont été réglées exactement, sur le temps sidéral, par les passages méridiens ; et l'on connaît, par leurs indications, le temps sidéral *absolu* H_0, H_n, compté à chaque instant, dans chaque observatoire, à partir d'une origine convenue. Prenons un chronomètre parfait, exempt de toutes irrégularités accidentelles, et déterminons d'abord sa marche diurne propre, dans la station S_0, en comparant ses indications, pendant plusieurs jours consécutifs, avec l'horloge de cette station. Concevons-le, comme elle, réglé sur le temps sidéral, et soit a_0 son avance fixe sur elle, en sorte qu'il marque $H_0 + a_0$ sur son cadran propre quand elle marque H_0. On le transporte à la station S_n sans qu'il se dérange, et en le comparant à l'horloge qui s'y trouve établie, on trouve que son avance sur le temps sidéral local est a_n, en sorte qu'il marque $H_n + a_n$ sur son cadran propre, lorsqu'elle marque l'heure H_n. Maintenant, puisque les marches des deux horloges et du chronomètre sont supposées avoir individuellement une parfaite uniformité, si l'on retranche a_0 de son indication actuelle, à un instant quelconque, le reste $H_n + a_n - a_0$ devra exprimer le temps sidéral absolu H_0, que l'horloge de la station S_0 marque à ce même instant. On aura donc l'égalité

$$H_n + a_n - a_0 = H_0,$$

d'où l'on tire

$$a_n - a_0 = H_0 - H_n.$$

En effet, si le temps sidéral absolu était identique dans les deux stations, l'avance du chronomètre sur ce temps, dans la seconde station, devrait être a_0, comme dans la première. Le changement qu'on lui trouve alors doit donc exprimer la différence qui existe entre les indications de ce temps dans les deux stations.

Il ne reste plus qu'à discuter les détails pratiques de l'opération pour les ramener aux conditions d'identité et de régularité que nous avons admises.

274. Les deux horloges fixes peuvent être réglées individuellement avec la dernière précision. Mais, comme elles doivent être suivies par des observateurs différents, il faudra préalablement

constater la différence qui peut exister, et qui existe presque toujours entre les temps absolus auxquels ils rapportent un même passage dans une même station. Nous en avons déjà fait la remarque en parlant des observations simultanées des feux de poudre, employées dans les mesures d'arcs de parallèles. Cette différence s'appelle l'*équation personnelle*. L'expérience prouve qu'entre des observateurs également habiles, elle peut s'élever jusqu'à $\frac{3}{10}$ de seconde de temps sidéral.

Une erreur du même genre pourrait se produire dans les comparaisons du chronomètre avec chaque horloge, si elle était faite par des observateurs différents. Toutefois, l'expérience prouve que l'effet en est beaucoup moindre. Mais on l'évite complétement en faisant effectuer cette comparaison par le même observateur, qui se transporte successivement d'une station à l'autre, passant d'abord de S_0 à S_n, puis revenant de S_n à S_0, avec le chronomètre employé.

Je ne parle pas des réductions qu'il faut faire pour transformer les indications réelles des deux horloges et du chronomètre, en indications sidérales dans les deux stations. Elles s'effectuent par des calculs dont les principes ont été expliqués dans le tome II, pages 309 et suivantes.

Mais, ce qui n'est pas moins indispensable, et bien plus difficile, il faut assurer à la marche propre du chronomètre une invariable uniformité. C'est ce qui serait pratiquement impossible à réaliser pour aucun de ces instruments, quelques soins que l'on

CHAPITRE XXII.

Des parallaxes.

295. Les méthodes d'observation que nous avons jusqu'à présent établies, ont eu spécialement pour objet les étoiles fixes, et elles sont toutes fondées sur la considération de leur distance presque infinie, qui permet de supposer que les rayons visuels, menés des différents points de la terre à une même étoile, sont tout à fait parallèles. Ce principe ne peut plus être employé pour les corps qui composent notre système planétaire, parce qu'ils sont beaucoup plus rapprochés de nous, et le point de la terre d'où on les observe n'est plus si fort indifférent. Ainsi, pour compléter ces méthodes, il faut étudier plus particulièrement les effets de ces différences d'aspect, et trouver le moyen d'en corriger l'influence.

296. Lorsque différents observateurs répartis sur la surface de la terre observent un même astre, ils ne le rapportent pas au même point du ciel; car soient L cet astre, *fig.* 61, C le centre de la terre, O, O′ les positions des deux observateurs, OL, O′L les rayons visuels menés de leurs yeux à l'astre. Comme on rapporte toujours les objets sur le prolongement de ces rayons, le premier verra l'astre en *l* sur la sphère céleste, le second le verra en *l*′. La différence de ces deux résultats dépendra de l'angle OLO′, sous lequel on verrait, du centre de l'astre, la corde de l'arc terrestre

sont égaux entre eux : il n'en est pas de même des degrés de longitude, lorsqu'ils sont comptés sur des parallèles différents. Il est visible, en effet, que les parallèles diminuent de grandeur en approchant du pôle, d'où il suit que les parties aliquotes de ces cercles, comme sont les degrés, diminuent dans le même rapport. Ainsi, pour évaluer en degrés de l'équateur terrestre un certain nombre de degrés, minutes et secondes d'un parallèle connu, la terre étant supposée sphérique, il faut multiplier ce nombre par le rapport des rayons du parallèle et de l'équateur, c'est-à-dire par le sinus de la distance polaire ou le cosinus de la latitude. Car cette opération est la même que celle du § 9, pour la mesure des degrés des parallèles célestes. Or, en appliquant ici la *fig.* 2, que nous avons construite pour ce cas, O désignera le centre de la terre supposée sphérique, QEQ′ le grand cercle de l'équateur, et QPQ′ un grand cercle méridien. Alors, si l'on considère un parallèle quelconque tel que SDS′, qui sera un petit cercle ayant son centre en O′, OS sera le rayon R de la sphère, et SO′ ou r le rayon du parallèle, à la distance polaire SOO′, ou d. Ainsi, r aura pour valeur R sin d, ou R cos QOS.

Lorsque l'on ne veut plus supposer la terre sphérique, la longueur des degrés de longitude dépend de la forme qu'on lui attribue, comme nous l'avons expliqué, page 166, en rapportant les mesures d'arcs de parallèles.

276. Avec ces données on peut calculer la distance itinéraire de deux points quelconques de la terre, dont on connaît la longitude et la latitude; le calcul est des plus faciles, si l'on suppose

de la terre. Si l'on pouvait mesurer cette distance, comme on a la longueur du rayon terrestre, la parallaxe serait connue complétement.

Pour cela, le procédé le plus simple et le plus naturel est celui que l'on emploie dans la trigonométrie pour mesurer l'éloignement d'un objet inaccessible, en l'observant des deux extrémités d'une

---

leurs moins que ces deux valeurs ne diffèrent entre elles; l'erreur que l'on commet en substituant l'arc au sinus, dans cette circonstance, est donc moindre que 0,00000267, qui, divisé par 0,0174524o, fait environ $\frac{1}{6550}$ de la valeur totale de l'arc.

D'après l'expression précédente de $\sin \varpi$, on voit que la parallaxe d'un astre peut se calculer pour toutes les hauteurs, quand on connaît sa distance au centre de la terre exprimée en parties du rayon terrestre, ou le rapport $\frac{R}{D}$; réciproquement, on peut calculer la distance quand on connaît la parallaxe par observation.

Connaissant la parallaxe de hauteur par la formule précédente, si l'on nomme Z'' la distance *vraie* au zénith, telle qu'on l'observerait du centre de la terre, on a

$$\sin \varpi = \sin \Pi . \sin Z, \qquad Z'' = Z - \varpi.$$

Ces formules supposent Z connu. Dans les tables astronomiques qui sont construites sur les lieux vrais, c'est Z'' qui est supposé connu, et il faut en déduire Z afin de trouver le lieu apparent. Pour cela, on doit exprimer la parallaxe ϖ en fonction de Z'' : cela est facile, car, puisque $Z = Z'' + \varpi$, en éliminant Z, on aura

$$\sin \varpi = \sin \Pi . \sin (Z'' + \varpi) = \sin \Pi (\sin Z'' \cos \varpi + \cos Z'' \sin \varpi)$$

CHAPITRE XX.

Examen des conséquences physiques qui résultent de l'universalité du mouvement diurne. Il ne s'ensuit pas nécessairement que ce mouvement doive être attribué aux astres plutôt qu'à la terre.

278. Lorsqu'on a établi un fait physique sur des preuves incontestables, il faut en examiner soigneusement les conséquences, et distinguer celles qui sont nécessaires de celles qui sont seulement possibles. Déjà, dans le chapitre IV du tome Ier, nous avons appliqué ce mode de discussion aux premiers résultats que nous avait offerts le simple aspect du ciel. L'exactitude presque mathématique avec laquelle nous avons maintenant déterminé les lois du mouvement diurne nous permet de donner une forme incomparablement plus décidée, et plus précise, aux notions qui nous avaient alors été suggérées comme de simples doutes, ou, tout au plus, comme des apparences de probabilité qu'il fallait suivre.

Pour raisonner avec quelque certitude sur les mouvements célestes, d'après les apparences que nous observons, il fallait connaître à peu près notre position dans l'univers et les dimensions relatives de la terre que nous habitons. Nous voyons maintenant, de la manière la plus évidente, que cette terre, qui nous paraît si vaste, n'est dans l'espace que comme un globule à peu près sphérique.

grossis par le télescope, et mesurés par le micromètre, de-
nent sensibles, même après de courts intervalles de temps. A
près, ces astres sont assujettis, comme tous les autres, aux
générales du mouvement diurne.

79. Voilà les faits tels que les observations les établissent : il
t d'en déduire les conséquences. D'abord le grossissement du
ue par le télescope indique que la lune, le soleil, les pla-
s et les comètes sont incomparablement plus près de nous que
toiles. De plus, les variations de leurs diamètres apparents
uvent que ces astres ne sont pas toujours à la même distance
a terre; car c'est une règle d'optique qu'un même objet de
ension constante paraît plus grand lorsqu'il est vu de plus près,
lus petit quand il est vu de plus loin (*). Il est vrai qu'on pour-
expliquer ces variations par des changements réels de forme

) Les observations apprennent que les planètes sont des corps arrondis
me la terre, et comme elle, à fort peu près sphériques. Si, par l'œil de
ervateur et par le centre de l'astre, on mène un plan, ce plan coupera
urface de l'astre, suivant une courbe rentrante ADBD', *fig.* 60; et si du
t O, où est situé l'observateur, on mène à la courbe ADBD' deux tan-
es qui figureront deux rayons visuels menés aux points opposés du disque,
gle DOD' sera *le diamètre apparent de l'astre.*

: la planète est une sphère, ou si elle forme une surface de révolution
ur de l'axe AO, l'angle visuel DOD' sera le même dans quelque sens
n l'observe, et tous les diamètres apparents observés sur divers diamè-
du disque seront égaux entre eux. Au contraire, si ces diamètres sont
aux, on sera sûr que la ligne de tangence du cône formé par les rayons
ls n'est point circulaire, ce qui indiquera un aplatissement. Si l'on sup-
la section ADBD' circulaire, le rayon visuel OD sera perpendiculaire à
rémité du rayon CD. Soit celui-ci $= R$, la distance $CO = D$, l'angle vi-
DOC, ou le demi-diamètre apparent $= \alpha$, le triangle COD, rectangle
, donnera évidemment

$$\sin \alpha = \frac{R}{D}.$$

li mensions de l'astre étant invariables, R est constant, et les *sinus de deux*
êtres apparents d'un même astre sont réciproques à sa distance ; par con-
ent, l'angle visuel diminue quand l'astre s'éloigne, et augmente quand
pproche.

l'objet est petit ou fort éloigné, en sorte que l'angle visuel α soit un
petit angle, $\sin \alpha$ sera aussi une quantité très-petite, et on pourra,

exposer ce procédé, soit λ une étoile qui passe au méridien en même temps que l'astre, voyez *fig.* 66, et par les deux observateurs, menons à cette étoile deux rayons visuels qui pourront être censés parallèles, puisque la parallaxe des étoiles est insensible. Cela posé, les angles LOλ, LO'λ, seront évidemment les différences de déclinaison observées, et l'angle OLO', étant extérieur au triangle LOS, sera égal à la *somme* de ces différences. Si l'astre était du même côté du zénith, par rapport aux deux observateurs, l'angle OLO' serait égal à la différence des angles en O et O'.

Nous avons supposé que l'étoile passe en même temps que l'astre au méridien. Cela est utile pour l'exposé de la méthode, mais cela n'est nullement nécessaire dans la pratique ; car si l'étoile passe avant ou après l'astre, on peut toujours observer séparément leur déclinaison et en prendre la différence. Seulement on choisit des étoiles très-voisines du parallèle de l'astre, afin que, sans déranger la lunette, on puisse y observer le passage de tous les deux, et

---

par cette méthode, de 24",64 sexagésimales ; on aura donc, pour Mars,

$$\sin \Pi = 0,00019435 = \frac{1}{8372,74},$$

et par suite,

$$D = \frac{R}{\sin \Pi} = R.8372,74.$$

c'est-à-dire que la distance de Mars à la terre était alors égale à 8372 rayons terrestres et $\frac{74}{100}$.

On aurait même pu calculer la valeur de D sans le secours des tables de sinus, car l'angle Π étant fort petit, on peut le substituer à son sinus sans une erreur notable ; mais alors, pour rétablir l'homogénéité, il faut convertir le rayon, qui est ici pris pour unité, en parties de même nature que Π, c'est-à-dire en secondes sexagésimales. Or, la valeur du rayon ainsi réduite est 206264",8 (page 62) ; on aura donc ainsi

$$D = R\,\frac{206264",8}{\Pi},$$

et, dans le cas actuel,

$$D = 8371,14\ R,$$

résultat qui ne diffère du précédent que d'une quantité très-petite par rapport à la valeur de D.

On verra plus loin le calcul de la parallaxe horizontale, en ayant égard à l'aplatissement de la terre.

31. Ces phénomènes prouvent incontestablement que la dis-
e de la terre aux divers corps célestes ne reste pas toûjours la
e; mais ils ne nous apprennent pas si le soleil, les planètes et
toiles sont réellement en mouvement, la terre étant immobile,
la terre en mouvement s'approche et s'éloigne de ces astres.
que singulière que cette question paraisse, il n'y a rien dans
bservations qui puisse la décider. Lorsque le soleil nous
le s'approcher de la terre, un observateur placé dans le
devrait, comme nous, se juger en repos et croire que la
s'approche de lui. Il en est de même du mouvement diurne
stres : nous ne pouvons pas en conclure qu'ils tournent réel-
nt, car les apparences seraient absolument les mêmes si
it la terre qui tournât. Entraînés avec les corps qui nous en-
nent, avec les mers et l'atmosphère, nous nous croirions im-
iles, et lorsque la terre, par sa rotation, nous présenterait suc-
vement aux divers points du ciel, nous imaginerions que c'est
el qui tourne réellement autour de nous.

32. On a des exemples fréquents de ces illusions. Souvent
s attribuons notre propre mouvement aux objets extérieurs.
voyageur, tranquille au fond d'une voiture qui l'emporte avec
dité, voit les arbres qui bordent la route courir vers lui à
ite et à gauche; une autre personne placée dans la même voi-
e, mais emportée en arrière, croit les voir s'enfuir. Les yeux
ibituent tellement à cette illusion, qu'elle ne cesse pas aussitôt
e la voiture s'arrête, ou plutôt elle en produit une contraire;
alors, en voyant les objets immobiles, on se croit pendant
lques instants transporté dans le sens opposé. Dans d'autres
, nous faisons abstraction du mouvement réel des corps. Un
alier qui court à toute bride lance des boules au-dessus de sa
e, et les retient dans sa main : elles lui semblent tomber vertica-
ment; cependant cela ne saurait être, puisqu'il a changé de place
ndant leur chute. Elles décrivent réellement des courbes très-
nposées, et c'est ainsi que les voit un spectateur immobile.
in, il y a des circonstances où le mouvement nous semble du
os, et le repos du mouvement. Regardez le ciel le soir lorsqu'il
en partie couvert de nuages que le vent pousse avec rapidité;

si la lune ou quelque étoile paraît entre eux, elle semble voir rapidement en sens contraire : il est très-difficile e impossible de résister à cette illusion.

283. En général, plusieurs causes contribuent à nous juger des mouvements qui se font hors de nous. D'abo croyons nos yeux en repos, lorsque le mouvement qui r porte n'est pas un effet actuel de notre volonté, ou ur immédiat de l'action de nos organes. L'illusion est d'au forte que le mouvement est plus rapide; surtout, si sommes avertis par aucune secousse, comme il arrive voiture qui roule sur la terre. Secondement, nous somme par l'habitude, à faire abstraction des mouvements auxq participons, parce qu'ils ne nous empêchent pas de saisi à l'ordinaire, les objets qui se déplacent avec nous : c'est cavalier. Enfin, parmi les objets éloignés, ce sont tou plus petits que nous croyons en mouvement. Ceux qui n blent plus grands ou plus difficiles à mouvoir, nous les immobiles. Ainsi, la lune et les étoiles nous paraissant trè par rapport à de vastes amas de nuages qui embrassent l' ces astres nous semblent en mouvement au milieu d'eu sommes encore trompés en cela par l'habitude, qui nous les petits objets, comme les oiseaux, en mouvement p grands corps, tels que les arbres et les montagnes.

Mais ces faux jugements se redressent avec facilité lor une idée exacte du mouvement; et s'il n'est pas toujours de se défendre des illusions qui les occasionnent, on peut d

[redacted]

navire lui-même, ce mouvement de transport est comme s'il
tistait pas. Il n'altère point les positions respectives de ces
ets, parce que tous y participent, et y participent également.
s si une des caisses se déplace par rapport aux autres, ne fût-ce
d'un millimètre, ce millimètre sera, relativement à elles et au
ire, un mouvement plus grand que tout le voyage fait en-
ıble.

185. Concluons de là que quelque mouvement qu'ait réellement
erre, si tous les objets placés à sa surface y participent, si l'at-
sphère le partage, et si nous le partageons nous-mêmes, nous
pourrons nullement le sentir, et il sera pour nous comme s'il
xistait pas. Mais d'un autre côté, il est également nécessaire que
mouvement paraisse général et commun à tous les objets visi-
s qui, étant hors de la terre, et de l'atmosphère qui marche
c elle, sont étrangers à son mouvement. Ainsi, la véritable mé-
de par laquelle nous pourrons découvrir si l'on peut attribuer
mouvement à la terre, et quel mouvement on peut lui attribuer,
st de considérer et d'observer si, dans les corps séparés de la
re et de l'atmosphère, comme le sont les astres, on découvre un
ıuvement commun qui convienne également à tous. Car, par
emple, un mouvement qui s'observerait seulement pour la lune,
qui n'aurait lieu ni pour les planètes, ni pour les étoiles, ne
urrait être attribué qu'à la lune et non pas à la terre. Il n'y a
n de plus général à cet égard que le mouvement diurne qui en-
ıîne en même temps tous les astres d'orient en occident. Ainsi,
après les seules apparences, ce mouvement peut, avec autant de
ison, être attribué à la terre seule, en sens contraire, qu'au reste
ı monde, la terre exceptée.

On en peut dire autant des autres mouvements très-petits, mais
urtant généraux, dont nous avons reconnu ou annoncé l'exis-
nce. Ces mouvements pourraient bien ne pas se faire réellement
ıns les étoiles, car les apparences seraient absolument les mêmes
l'équateur de la terre et l'axe qui lui est perpendiculaire, restant
ces sur sa surface, se déplaçaient peu à peu dans le ciel. La hau-
ır du pôle sur l'horizon de chaque lieu serait toujours la même;
ıs les objets terrestres conserveraient leurs positions respectives,

et nous nous croirions encore immobiles au milieu d'eux. Le
nous paraîtraient donc faire, dans les cieux, tous les mouv
que la terre ferait en sens contraire. Les seules apparenc
frent absolument rien par quoi l'on puisse décider laquelle
deux hypothèses est la véritable.

Dans notre incertitude, il ne nous reste qu'un parti à
c'est d'étudier avec soin les apparences des mouvements c
et de voir laquelle des deux hypothèses les explique avec
simplicité.

CHAPITRE XXI.

Conséquences physiques de l'aplatissement de la terre. Longueur du pendule à secondes sur les différents parallèles.

286. Quoique l'aplatissement de la terre soit une quantité très-petite, sa connaissance est extrêmement importante, à cause des conséquences qu'elle entraîne.

Et d'abord, on voit que la pesanteur, toujours perpendiculaire à la surface et dirigée suivant la verticale, ne tend plus au centre de la terre. Ses directions s'en écartent d'une quantité très-petite, du même ordre que l'aplatissement. Il y a donc une liaison, un rapport nécessaire, entre la forme de la terre et la pesanteur. En suivant cette liaison, nous parviendrons peut-être à découvrir d'où vient cet aplatissement lui-même, et à quelle cause probable on peut l'attribuer.

287. En considérant la pesanteur d'une manière générale, nous voyons qu'elle agit sur tous les corps terrestres comme par une sorte d'*attraction* qui les sollicite vers la terre et tend à les y précipiter. Cette force subsiste au sommet des montagnes et dans les cavités les plus profondes. On peut donc considérer la terre entière comme composée d'une infinité de particules matérielles réunies et concentrées par la pesanteur.

Si ces particules n'ont pas toujours formé une masse solide, si elles se sont trouvées autrefois dans un état de mollesse qui donnait plus de liberté à leurs mouvements, elles ont dû s'arranger d'elles-mêmes, comme l'exigeait la nature des forces dont elles étaient animées; et en les supposant sollicitées par la seule pesanteur, elles devaient se réunir en une masse sphérique, comme font les gouttes d'eau et de mercure. Or, un grand nombre de faits de l'histoire naturelle attestent que cet état a réellement existé, et que la terre a été primitivement fluide. Mais, puisqu'elle n'a pas pris la forme sphérique, il faut en conclure que quelque autre cause agissait aussi sur ses particules, et contribuait à leur arrangement.

Cela devient facile à expliquer, si nous supposons que la terre tourne journellement sur elle-même; car alors cette cause, qui a renflé l'équateur et aplati les pôles, est sans doute la *force centrifuge* due au mouvement de rotation.

On conçoit en effet que, si la terre tourne, ses diverses parties font effort pour s'éloigner de l'axe de rotation. C'est ainsi qu'une pierre tournée rapidement dans une fronde, tend la corde qui la retient, et la rompt si elle est trop faible. Cette *force centrifuge* s'accroît avec la vitesse; elle est la plus grande possible pour les points de l'équateur, qui décrivent le plus grand cercle. Elle est nulle aux pôles qui sont immobiles, et elle décroît, par des degrés insensibles, d'une de ces limites à l'autre. La terre, par l'action de cette force, devait donc s'aplatir aux pôles et se gonfler à l'équateur.

Considérons deux colonnes fluides communiquant entre elles, et dont l'une soit dirigée suivant l'axe qui passe par les pôles, l'autre dans le plan de l'équateur, ces colonnes s'étendant du centre à la surface de la terre. Les particules matérielles qui se trouvent dans la colonne de l'équateur sont favorisées par la force centrifuge, qui tend à les éloigner de l'axe de rotation, et leur pesanteur en est un peu diminuée. La colonne des pôles, au contraire, n'a aucune force centrifuge; elle obéit entièrement à la pesanteur qui l'attire vers le centre de la masse. Elle a donc réellement plus de poids que l'autre, et il ne peut y avoir d'équilibre entre elles, à moins que la colonne de l'équateur ne s'allonge aux dépens de celle des pôles, de sorte que la diminution de la pesanteur se trouve compensée par

le offre des signes non équivoques d'un aplatissement; tels t, par exemple, Jupiter et Saturne. En les observant avec soin, a découvert, à la surface de leur disque, des *taches* dont le lacement régulier et le retour périodique décèlent le mouvent de rotation de la planète autour de son plus petit diamètre. irquoi la terre, semblable à ces planètes par sa rondeur et par aplatissement, n'aurait-elle pas aussi comme elles un mouvent de rotation autour de son petit axe? Loin que ce phénomène ve nous paraître extraordinaire, il serait au contraire fort nnant qu'il n'eût pas lieu.

189. En suivant cette induction, elle nous mène à une autre séquence non moins importante. Si la terre était sphérique et mogène, l'attraction exercée par sa masse sur les divers points sa surface, ou, ce qui revient au même, la pesanteur qui solte les corps vers son centre serait la même partout. Mais la me elliptique détruit cette égalité, et l'attraction doit augmen- en allant de l'équateur au pôle, proportionnellement au carré sinus de la latitude; ce que l'on prouve par des calculs que us ne saurions rapporter ici. Maintenant, si la terre tourne au- ir de son petit axe, une autre cause se combine avec la précé- nte. L'action de la force centrifuge tend à diminuer le résultat l'attraction; mais cette diminution varie aussi de l'équateur au le, parce qu'en s'approchant du pôle, la force centrifuge, tou- irs perpendiculaire à l'axe de rotation, devient de plus en plus lique sur le rayon terrestre, et par conséquent sur la direction la pesanteur. Il est même facile de prouver, par les principes la mécanique, que cette diminution est aussi proportionnelle au ré du sinus de la latitude, comme celle de l'attraction. Ainsi, l'effet de ces deux causes, la pesanteur absolue que nous ob- vons, c'est-à-dire l'excès de l'attraction sur la force centrifuge composée suivant le rayon terrestre, doit varier de l'équateur pôle suivant la même loi. Par une conséquence nécessaire, en nt de l'équateur vers les pôles, la chute des corps doit s'acce- er proportionnellement au carré du sinus de la latitude, et le me corps doit devenir plus pesant suivant ce rapport.

Les oscillations du pendule offrent un moyen simple de vérifier

341. Jusqu'ici nous avons supposé la terre sphérique. Dans ce cas, la parallaxe horizontale d'un astre, placé à une distance constante, est la même pour tous les observateurs, quelle que soit leur position sur la surface terrestre. Mais ce résultat n'a plus lieu si les rayons terrestres sont inégaux, car la parallaxe horizontale est l'angle sous lequel on verrait, du centre de l'astre, le rayon terrestre qui correspond à chaque observateur. Ainsi, deux questions importantes se présentent : l'ellipticité de la terre

---

parallaxe de déclinaison $\Delta - \Delta'$; nous aurons $\Delta = \Delta' + \delta$, de même que nous avons eu $P = P' + \alpha$; et, d'après cela, la formule devient

$$\sin\delta = \left[\frac{\sin\Delta'\cos D\sin\alpha}{\sin D\sin P'} - \frac{2\cos\Delta'\cos(P'+\frac{1}{2}\alpha)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin P'}\right]\sin(\Delta'+\delta);$$

en substituant ensuite, dans le premier terme, pour $\sin\alpha$ sa valeur $\frac{\sin\Pi\sin D\sin(P'+\alpha)}{\sin\Delta'}$, ce qui le simplifiera un peu, nous aurons

$$\sin\delta = \left[\frac{\sin\Pi\cos D\sin(P'+\alpha) - 2\cos\Delta'\cos(P'+\frac{1}{2}\alpha)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin P'}\right]\sin(\Delta'+\delta).$$

Le coefficient compris entre les parenthèses ne dépend que des lieux vrais, et sera connu tout entier dès que l'on aura calculé la parallaxe d'ascension droite; en le représentant par Q, la formule précédente deviendra

$$\sin\delta = Q\sin(\Delta'+\delta).$$

Elle est donc encore analogue à celle qui nous a donné la parallaxe de hauteur, ainsi que la parallaxe d'ascension droite; elle se résoudra donc de la même manière, soit exactement au moyen d'un angle auxiliaire, soit approximativement au moyen de la série

$$\tang\delta = Q\sin\Delta' + \frac{Q^2}{2}\sin 2\Delta' + \text{etc.}$$

Dans les applications on pourra toujours, sans erreur sensible, substituer les rapports des arcs α, δ, et Π à ceux de leurs sinus et de leurs tangentes; ce qui revient à négliger les cubes des parallaxes. Alors on pourra substituer à $\frac{1}{2}\alpha$, la valeur $\frac{1}{2}\frac{\Pi\sin D\sin(P'+\alpha)}{\sin\Delta'}$. Enfin, si l'on se borne à la première puissance des parallaxes, ce qui suffira presque toujours, on pourra faire α et δ nuls dans les termes du second membre, qui sont déjà multipliés par Π, et alors il vient

$$\text{Parallaxe de déclinaison} = \Pi(\sin\Delta'\cos D - \cos\Delta'\sin D\cos P')$$

tions se ralentiraient. De plus, les variations de ces longueurs sont très-bien représentées par un accroissement proportionnel au carré du sinus de la latitude, comme on peut aisément le vérifier sur les nombres rapportés dans le tableau précédent. L'augmentation de la pesanteur, en allant de l'équateur au pôle, est donc un nouvel indice de la rotation de la terre. De plus, on prouve par le calcul, que les longueurs du pendule à secondes, en différents lieux, sont proportionnelles aux pesanteurs qui l'animent. D'après cela, les rapports exprimés dans le tableau ci-dessus doivent représenter aussi les poids successifs d'une même masse que l'on transporterait successivement à des latitudes diverses.

290. Nous ne donnons ici que les rapports des longueurs absolues du pendule à différentes latitudes. Pour connaître leurs valeurs absolues, il faudrait donner celle d'une des mesures précédentes, par exemple, celle du pendule à Paris. Mais, auparavant, il faut décider de quelle division du temps on veut faire usage, puisque la longueur du pendule à secondes sera nécessairement différente suivant l'espèce de *seconde* que l'on emploiera. Pour nous qui, jusqu'à présent, ne connaissons de mesure du temps que celle qui est donnée par les étoiles, nous n'avons besoin de connaître que le *pendule sidéral*, c'est-à-dire celui qui ferait une oscillation pendant une seconde sexagésimale ou décimale de temps sidéral; or, des expériences très-exactes, faites à l'Observatoire de Paris, et vérifiées avec beaucoup de soin, ont donné (*) :

Longueur du pendule sidéral, à secondes sexagésimales. . . . . $0^m,9884327$

Longueur du pendule sidéral, à secondes décimales. . . . . $0^m,7378611$

Avec ces valeurs absolues et les rapports des longueurs, que nous avons donnés dans le tableau précédent, on aura tout de suite les longueurs du pendule sidéral pour les latitudes indiquées dans ce tableau. Et on les obtiendrait également pour un autre paral-

(*) Relativement au détail de ces expériences, *voyez* la dissertation placée à la fin du tome II, pages 432 et suivantes.

lèle quelconque en les calculant d'après la loi de variation que nous avons reconnu exister entre elles, c'est-à-dire proportionnellement au carré du sinus de la latitude. Enfin, si l'on voulait les obtenir pour telle autre division du temps que l'on voudrait imaginer, on les trouverait facilement d'après la règle suivante. Les longueurs des pendules simples sont entre elles comme les carrés des temps qui expriment les durées de leurs oscillations. Il faut toutefois se rappeler que l'application des longueurs absolues aux divers parallèles terrestres ne sera exacte que dans son ensemble, les localités y apportant de petites différences accidentelles, qui sont sensibles dans des observations précises.

Les astronomes sont dans l'usage de régler tous leurs calculs sur une période de temps déduite de la marche du soleil, et que l'on nomme le jour moyen. Nous verrons plus loin comment on détermine la durée de cette période, et par quelles conditions elle est donnée. Mais nous pouvons, dès à présent, la définir avec exactitude, en disant que le jour moyen est plus long que le jour sidéral de 235 secondes sexagésimales moyennes et $\frac{91}{100}$, en sorte que 86400 secondes sidérales sexagésimales égalent, en durée, 86164″,09 sexagésimales moyennes. D'après cela, si le jour moyen est représenté par 86400″ sexagésimales moyennes, le jour sidéral le sera par 86164″,09. Ainsi, en multipliant la longueur du pendule sidéral sexagésimal ou $0^m,9884327$ par $\left(\frac{86400}{86164,09}\right)^2$, rapport du carré des temps, on aura la longueur du pendule à secondes moyennes sexagésimales pour Paris, laquelle sera $0^m,9938526$,

314. Connaissant la distance zénithale LOZ′, rapportée au zénith vrai, on prendra la parallaxe de hauteur pour cette distance, comme dans le cas de la terre sphérique, mais en y employant la valeur particulière du rayon terrestre OC, qui répond au lieu de l'observation. Cette parallaxe, retranchée de la distance zénithale LOZ′, relative au rayon terrestre, donnera la *distance zénithale vraie,* telle qu'on l'aurait observée du centre de la terre (*).

(*) Soient Z la distance au zénith apparent observée, Z′ cette distance réduite au zénith vrai, et enfin Z″ la distance Z′ réduite au centre de la terre. Nommons ω l'angle ZOZ′ formé par le rayon avec la verticale, et ϖ la parallaxe de hauteur pour la distance Z′. Cela posé, si l'astre est dans le méridien du côté de l'équateur, on aura

$$Z' = Z - \omega; \qquad Z'' = Z' - \varpi; \qquad \sin \varpi = \sin \Pi . \sin Z'.$$

Π est ici la parallaxe horizontale pour le rayon OC. Ces formules supposent Z connu; mais, si c'était la distance vraie Z″ qui fût donnée, on en tirerait facilement Z, comme dans la page 400; car les deux dernières équations donneraient de même ϖ, en fonction de Z″, par la série citée, et ensuite on en déduirait

$$Z' = Z'' + \varpi; \qquad Z = Z' + \omega = Z'' + \varpi + \omega.$$

Il faudrait prendre ω négatif si l'astre était observé du côté du pôle. N'oublions pas que ces formules ne sont applicables que dans le plan du méridien.

Le calcul de la parallaxe, par deux observations faites dans le méridien à de grandes distances, est tout aussi facile dans le sphéroïde que dans la sphère; car, en désignant toujours les positions des deux observateurs par [illegible]

latitude, on voit que cet allongement suit encore la même loi que l'accroissement des degrés.

292. La longueur du pendule à secondes étant exprimée en parties du mètre, la connaissance de ce résultat suffirait pour retrouver le MÈTRE, base de toutes nos mesures, si tous les étalons qui fixent sa valeur exacte venaient à se perdre dans la suite des temps. En effet, si l'on se rappelait seulement que la longueur du pendule sidéral à secondes sexagésimales est à Paris de $0^{m},9884327$, en observant exactement cette longueur par l'expérience, et la divisant par 0,9884327, le MÈTRE serait aussitôt retrouvé. Toute autre longueur du pendule, sexagésimal ou décimal, sidéral ou moyen, observée dans une latitude connue, servirait également. Voilà l'avantage que l'on a eu en prenant pour base du système métrique des données fixées par la nature. C'est un avantage que n'avaient point les mesures arbitraires, dont les anciens se sont servis faute d'en savoir déterminer de plus exactes. Aussi, les étalons de ces mesures s'étant perdus par l'effet des révolutions des peuples, leur valeur s'est perdue également pour toujours, et les évaluations auxquelles elles ont servi de base ne peuvent plus servir que de sujet aux recherches et aux conjectures des érudits.

293. La rotation de la terre devient encore sensible dans un autre phénomène très-remarquable; c'est la déviation des corps qui tombent d'une grande hauteur. Pour concevoir ce phénomène, imaginons un corps pesant, placé à une grande distance de la surface terrestre, par exemple au sommet d'une haute tour. Si la

écart pour diverses hauteurs, et la théorie s'est trouvée parfaitement conforme aux résultats observés.

294. Lorsque Copernic, renouvelant les idées des anciens philosophes, présenta le système du mouvement de la terre, on lui objecta que les corps, dans leur chute, ne participant plus à ce mouvement, devraient rester en arrière, et s'écarter vers l'occident de la verticale. Mais quand les lois du mouvement furent mieux connues, on sut que les corps doivent conserver, dans leur chute, la vitesse horizontale résultante de la rotation de la terre, à laquelle ils participaient d'abord. On conclut de là que les corps devaient tomber précisément au pied de la verticale. Enfin, lorsque les principes de la mécanique ont été encore plus approfondis, on a reconnu de nouveau qu'il devait y avoir une petite déviation, mais opposée à celle que l'on imaginait d'abord, et dirigée vers l'est. C'est ainsi que souvent les connaissances se perfectionnent et se rectifient en passant par des erreurs.

Il n'est pas temps encore de faire ressortir toute la force des indices que nous venons de recueillir sur la rotation de la terre. Les phénomènes, en se multipliant, nous amèneront de nouvelles preuves qui établiront enfin la réalité de ce mouvement d'une manière incontestable. Mais nous devons, dès à présent, conclure que, s'il n'est pas encore décidément prouvé par ces phénomènes, il en devient du moins extrêmement probable.

CHAPITRE XXII.

Des parallaxes.

295. Les méthodes d'observation que nous avons jusqu'à présent établies, ont eu spécialement pour objet les étoiles fixes, et elles sont toutes fondées sur la considération de leur distance presque infinie, qui permet de supposer que les rayons visuels, menés des différents points de la terre à une même étoile, sont tout à fait parallèles. Ce principe ne peut plus être employé pour les corps qui composent notre système planétaire, parce qu'ils sont beaucoup plus rapprochés de nous, et le point de la terre d'où on les observe n'est plus si fort indifférent. Ainsi, pour compléter ces méthodes, il faut étudier plus particulièrement les effets de ces différences d'aspect, et trouver le moyen d'en corriger l'influence.

296. Lorsque différents observateurs répartis sur la surface de la terre observent un même astre, ils ne le rapportent pas au même point du ciel; car soient L cet astre, *fig.* 61, C le centre de la terre, O, O′ les positions des deux observateurs, OL, O′L les rayons visuels menés de leurs yeux à l'astre. Comme on rapporte toujours les objets sur le prolongement de ces rayons, le premier verra l'astre en *l* sur la sphère céleste, le second le verra en *l*′. La différence de ces deux résultats dépendra de l'angle OLO′, sous lequel on verrait, du centre de l'astre, la corde de l'arc terrestre qui joint les deux observateurs. Cet angle se nomme *la parallaxe*

297. On peut même citer quelques phénomènes qui montrent ıfluence de la parallaxe indépendamment d'aucun calcul astromique. Par exemple, dans la figure précédente, si c'est la lune i est en L, et que le soleil soit en S, beaucoup plus loin du centre la terre, les deux observateurs verront en même temps ces deux res, et apercevront l'intervalle qui les sépare; mais du point E ué sur la ligne SL qui joint leurs centres, cette distance paraîtra lle, et le soleil sera éclipsé. Ainsi, lorsqu'un nuage passe entre us et le soleil, nous nous trouvons plongés dans l'ombre, tandis e des lieux souvent peu éloignés sont éclairés de toute sa lumière : la différence de ces effets est due à une véritable parallaxe.

298. Pour éviter les irrégularités dépendantes de ces différents ›ects, et rendre toutes les observations comparables, les astromes sont convenus de les rapporter au centre de la terre supposée hérique ou sphéroïdique, et ils regardent comme le *lieu vrai* des tres sur la sphère céleste, celui où on les verrait, s'ils étaient obrvés de ce point. Par opposition ils appellent *lieu apparent* d'un tre le point de la sphère céleste auquel on le rapporte, quand on bserve de dessus la surface de la terre.

299. Pour plus de simplicité commençons par examiner le cas ı la terre serait sphérique, et voyons comment on peut trouver lieu vrai, quand on connaît le lieu apparent. Dans cette suppoion, soit, *fig.* 62, C le centre de la terre, et soit O la position de bservateur sur sa surface : le rayon CO prolongé sera la vertile. Maintenant si l'observateur mesure la distance de l'astre au nith, il la trouvera égale à l'angle LOZ; s'il l'eût observée du ntre de la terre, il l'aurait trouvée égale à LCZ ou à LOZ—CLO, rce que l'angle LOZ est extérieur au triangle LOC. L'angle CLO, mé par les deux rayons visuels menés à l'astre, se nomme la *rallaxe de hauteur : en la retranchant de la distance zénithale parente, on aura la distance vraie.* Nous supposons d'ailleurs

---

que l'axe de rotation de la sphère des fixes semble toujours passer par il de l'observateur, comme nous l'avons reconnu alors, il faut que l'angle s lequel la terre entière paraîtrait, si elle était vue des étoiles, soit insible, ou, en d'autres termes, que la parallaxe des étoiles soit nulle.

que l'on ait préalablement fait à la distance observée la
tion que la réfraction exige.

300. Les deux rayons visuels OL, CL étant compris
même plan vertical, on voit que l'effet de la parallaxe
tout entier dans le sens vertical, comme celui de la réfr
mais la parallaxe est soustractive de la distance au zénith,
que la réfraction est additive. L'effet de la parallaxe de hau
donc d'abaisser les astres dans les verticaux où ils se tr
ce qui est le contraire de la réfraction, qui les fait paraî
élevés.

301. Cet abaissement dépendant du calcul de l'angle OI
pas le même pour toutes les hauteurs. La distance de l'as
terre étant supposée constante, il est le plus grand possibl
rizon, comme en OL'C, *fig.* 63. L'angle OL'C se nomme l
laxe horizontale. Si du point L' on mène deux tangentes a
OO', qui représente le contour de la terre, la parallaxe hori
sera la moitié de l'angle visuel OL'O', sous lequel la terr
aperçue par un observateur placé dans l'astre, ou, ce qui
au même, ce sera, pour cet observateur, la moitié du diamè
parent de la terre.

La parallaxe de hauteur, ou l'angle OLC, diminue à mesu
l'astre s'élève sur l'horizon; enfin, elle devient nulle lorsqu
rive au zénith, parce que le rayon visuel mené du centre
terre se confond avec le rayon visuel de l'observateur. La
cette diminution est facile à calculer par les règles de la trigon

à la cause que nous venons d'assigner, et l'on voit aussi, par ce accord, que, si la distance de la lune au centre de la terre n'es pas exactement constante, comme nous l'avons supposé, du moin les variations qu'elle éprouve pendant que cet astre s'élève de puis l'horizon jusqu'au zénith, sont trop petites pour produir un changement notable, dans cet intervalle, sur son diamètre apparent.

318. Dans tout ce qui précède, nous n'avons pas encore parlé de la parallaxe du soleil. En effet, elle est si petite qu'aucune des méthodes précédentes ne peut la donner avec exactitude; aussi les astronomes ont ignoré pendant longtemps sa valeur. Enfin, on a réussi à la déterminer, non pas par l'observation immédiate, qui eût été sujette à trop d'inexactitude, mais d'après certains rapports, qui existent entre les distances des diverses planètes et de la terre elle-même, au centre du soleil. On sent que cette méthode indirecte n'a pu être inventée qu'après que l'on a connu, avec beaucoup d'exactitude, les mouvements planétaires. C'est pourquoi je l'exposerai plus tard. La parallaxe du soleil, qu'on en a déduite, est égale à 8″,8 sexagésimales, ou à 27″,1 de la division décimale; ce qui donne la distance moyenne de cet astre à la terre, égale à 23578 rayons terrestres, ou plus de trente-quatre millions de lieues. On ne pouvait rien obtenir de précis sur les dimensions du système solaire, tant qu'il restait quelque incertitude sur cet élément. Par conséquent, si l'on voulait suivre réellement la marche d'invention, il faudrait d'abord faire abstraction

de la terre. Si l'on pouvait mesurer cette distance, comme on a la longueur du rayon terrestre, la parallaxe serait connue complétement.

Pour cela, le procédé le plus simple et le plus naturel est celui que l'on emploie dans la trigonométrie pour mesurer l'éloignement d'un objet inaccessible, en l'observant des deux extrémités d'une

---

leurs moins que ces deux valeurs ne diffèrent entre elles; l'erreur que l'on commet en substituant l'arc au sinus, dans cette circonstance, est donc moindre que 0,00000267, qui, divisé par 0,01745240, fait environ $\frac{1}{6540}$ de la valeur totale de l'arc.

D'après l'expression précédente de $\sin \varpi$, on voit que la parallaxe d'un astre peut se calculer pour toutes les hauteurs, quand on connaît sa distance au centre de la terre exprimée en parties du rayon terrestre, ou le rapport $\frac{R}{D}$; réciproquement, on peut calculer la distance quand on connaît la parallaxe par observation.

Connaissant la parallaxe de hauteur par la formule précédente, si l'on nomme Z'' la distance *vraie* au zénith, telle qu'on l'observerait du centre de la terre, on a

$$\sin \varpi = \sin \Pi . \sin Z, \qquad Z'' = Z - \varpi.$$

Ces formules supposent Z connu. Dans les tables astronomiques qui sont construites sur les lieux vrais, c'est Z'' qui est supposé connu, et il faut en déduire Z afin de trouver le lieu apparent. Pour cela, on doit exprimer la parallaxe ϖ en fonction de Z'' : cela est facile, car, puisque $Z = Z'' + \varpi$, en éliminant Z, on aura

$$\sin \varpi = \sin \Pi . \sin (Z'' + \varpi) = \sin \Pi (\sin Z'' \cos \varpi + \cos Z'' \sin \varpi),$$

base connue. Deux observateurs O, O′, *fig.* 64, situés sous le même méridien céleste, observent en même temps la hauteur méridienne de l'astre L, ou sa distance au zénith. Alors, dans le quadrilatère LOCO′, on connaît les trois angles O, O′ et C; ce dernier étant formé par les deux verticales des observateurs. On a de plus les longueurs des côtés OC, O′C, qui sont des rayons terrestres. On peut donc construire le quadrilatère, et calculer la diagonale CL, qui est la distance de l'astre au centre de la terre. Le rayon terrestre, divisé par cette distance, sera le sinus de la parallaxe horizontale.

Cette méthode, réduite en calcul, conduit au résultat suivant, qui est d'une extrême simplicité. *La parallaxe horizontale est égale à l'angle à l'astre divisé par la somme des sinus des distances zénithales, si l'astre se trouve entre les zéniths des deux observateurs, ou par la différence de ces sinus, si l'astre se trouve du même côté du zénith par rapport à tous deux* (*).

---

pourrait aisément au moyen d'un angle auxiliaire φ, tel qu'on eût

$$\cos\varphi = \sqrt{\sin \Pi \cos Z''},$$

ce qui donne

$$\tang \varpi = \frac{\sin \Pi . \sin Z''}{\sin^2 \varphi},$$

formule à laquelle on peut appliquer le calcul logarithmique.

(*) Le calcul qui conduit à ce resultat est très-simple. Considérons le cas de la *fig.* 64. Soit ϖ la parallaxe de hauteur pour l'observateur placé en O, laquelle est égale à l'angle OLC; soit de même ϖ' l'angle O′LC ou la parallaxe de hauteur pour l'observateur placé en O′; enfin, soit Π la parallaxe horizontale du même astre, laquelle sera la même pour les deux observateurs, dans le cas de la terre sphérique. Cela posé, si l'on nomme Z, Z′ les deux distances au zénith observées en O et en O′, on aura, par ce qui précède,

$$\varpi = \Pi \sin Z; \qquad \varpi' = \Pi \sin Z';$$

ce qui donne, dans le cas de la *fig.* 64,

$$\varpi + \varpi' = \Pi (\sin Z + \sin Z').$$

Or, $\varpi + \varpi'$ n'est autre chose que l'angle OLO′, sous lequel on verrait, du centre de l'astre, la corde de l'arc terrestre qui joint les deux observateurs, et cet angle étant le quatrième dans le quadrilatère COLO′, est facile à cal-

303. Il est bon de remarquer que l'angle OLO′, ou l'a l'astre, peut se conclure immédiatement des différences de naison observées entre une même étoile et l'astre, et c'est ainsi qu'en ont usé les astronomes, parce que ces différenc vent aisément s'observer avec une très-grande exactitude.

---

culer; en effet, l'angle en O est égal à 180° — Z, l'angle en O′ à 18 soit φ l'angle au centre de la terre compris entre les verticales des d servateurs, lequel est connu d'après leurs latitudes; la somme des angles du quadrilatère devant être égale à quatre angles droits, on a employant la division sexagésimale du cercle,

$$\varphi + 180^\circ - Z + 180^\circ - Z' + OLO' = 360^\circ;$$

par conséquent

$$OLO' = Z + Z' - \varphi,$$

et puisque cet angle OLO′ est égal à $\varpi + \varpi'$, on aura, en égalant e valeurs,

$$\Pi = \frac{Z + Z' - \varphi}{\sin Z + \sin Z'}.$$

Dans le cas où l'astre serait du même côté du zénith, par rapport au observateurs, comme dans la *fig.* 65, le raisonnement serait tout à fai logue; seulement l'angle OLO′ ne serait plus $\varpi' + \varpi$, mais $\varpi' -$ Π (sin Z′ — sin Z), ϖ' étant la plus grande des deux parallaxes. On a de plus, dans le triangle OKL,

$$Z + OLO' + 180 - Z' + \varphi = 180^\circ,$$

ce qui donne

$$OLO' = Z' - Z - \varphi.$$

Tout se réduirait donc à faire Z négatif, ainsi que sin Z dans la valeur

[redacted]

assurer, on attache derrière le limbe et parallèlement à son plan un niveau à bulle d'air très-sensible, que l'on *cale*, c'est-à-dire que l'on met bien horizontal dans la première position du cercle, où le limbe faisait, je suppose, face à l'est; ensuite, si le point Z du limbe s'est un peu déplacé par le retournement, lorsque le limbe fait face à l'ouest, on en est averti par le niveau qui s'est déplacé avec lui, et dont la bulle ne répond plus aux mêmes points de la division du tube. Alors on ramène le limbe à la position où le niveau rentre dans ses premières limites; ainsi, sans connaître le point Z, on est toutefois assuré qu'il revient dans la même verticale. Il y a, dans tous les cercles, des vis de rappel pour faire ainsi mouvoir le limbe par degrés insensibles, et pour caler le niveau.

323. Après qu'on a ainsi la distance zénithale double, on obtient la distance quadruple de la manière suivante : sans toucher à la lunette, on retourne l'instrument, et on ramène le limbe la face à l'est, comme il était d'abord. La lunette prend alors la direction CA'L, *fig.* 76. Si on la ramenait vers l'astre, le limbe restant fixe, elle reviendrait au point A d'où elle est partie, et on détruirait l'arc qu'on lui a fait parcourir. Au lieu de cela, on la laisse fixe en A', mais on ramène le limbe en le faisant tourner verticalement autour de son centre, jusqu'à ce que l'astre revienne dans la lunette au centre des fils. Alors le point A' est dirigé vers l'astre, et le point de départ descend en A, *fig.* 77. Cela fait, on se retrouve exactement dans les mêmes circonstances où l'on était au commen-

prendre alors leur différence de déclinaison, avec un simpl
cromètre, comme on prend le diamètre d'une planète; en
l'opération peut se faire avec une très-grande exactitude,
qu'elle est indépendante de toutes les causes d'erreurs qui pe
affecter les hauteurs absolues, et qu'elle suppose seulemen
les intervalles des divisions de l'instrument sont exacts dan
tendue très-petite que l'on fait parcourir au fil horizontal; c
tion qu'il est très-ordinaire de voir réalisée dans les instru
construits par d'habiles artistes.

Prenons pour exemple les observations de Wargentin
Lacaille sur la parallaxe de Mars : ils comparaient cette pla
l'étoile λ, de la constellation du Verseau. Mars étant dans le
dien du cap de Bonne-Espérance, Lacaille trouva que le bor
réal de son disque était plus septentrional que l'étoile de 26
sa distance au zénith était 25° 2′, en se bornant aux minute
même instant et sous le même méridien, Wargentin, à Stockl
observait Mars, au méridien, à 68° 14′ de distance zénithal
bord septentrional de son disque était plus austral que l'étoi
6″,6; l'angle à l'astre était donc alors 26″,7 + 6″,6 ou 33″,3
le sinus de 68° 14′ est 0,9287, celui de 25° 2′ est 0,4231, et
somme est 1,3518. C'est le dénominateur de notre formule,
donne ainsi $\Pi = \frac{33'',3}{1,3518} = 24'',64$, valeur de la parallaxe
zontale de Mars à l'instant des observations. On voit que le n
rateur de cette expression, ou l'angle OLO′, étant fort pet
n'est pas nécessaire d'avoir, avec la dernière rigueur, les

Enfin, la petite erreur, qui peut rester encore, malgré ces précautions, dans les lectures extrêmes, se trouvant répartie par la division sur l'arc entier parcouru sur le limbe, ne conserve plus qu'une influence insensible sur l'arc simple parcouru dans une seule observation, du moins en supposant les observations suffisamment multipliées. Les erreurs des divisions s'affaiblissent donc dans le cercle répétiteur par la répétition même, et la compensation qui s'opère entre elles n'est pas l'effet d'une probabilité, mais d'une certitude

Pour sentir jusqu'où cette compensation peut aller, il faut savoir que, dans nos cercles répétiteurs qui n'ont ordinairement que 4 décimètres (15 pouces environ) de diamètre, l'erreur des divisions ne peut pas certainement s'élever à 15″ sexagésimales. Elle se réduirait donc au plus à $\frac{1}{2}$ seconde, après trente observations; que devient-elle après quatre-vingts ou cent? que devient-elle si, comme on peut le faire et comme on l'a fait souvent, on laisse les séries des différents jours se succéder sans interruption sur le limbe, de sorte que les deux erreurs des lectures extrêmes se trouvent seules réparties sur un arc total qui contient plusieurs milliers de fois l'arc simple?

L'erreur des divisions est donc comme nulle dans les observations faites au cercle. Il est impossible qu'elle soit aussi rigoureusement détruite dans les plus grands instruments, s'ils ne sont pas répétiteurs. Jamais l'adresse de l'artiste ne peut égaler un procédé mathématique.

avec la dernière précision ; mais comme la plupart de ces procédés supposaient une connaissance déjà très-approfondie des mouvements de la lune, nous nous bornerons, pour le moment, à la méthode précédente, qui peut être considérée comme la base de toutes les autres.

307. La parallaxe des astres ne fait pas seulement connaître leur distance à la terre. Comparée à leurs diamètres apparents, elle fait connaître aussi leurs volumes. *Si l'on divise le diamètre apparent d'un astre par le double de sa parallaxe horizontale, on a, en le supposant sphérique, le rapport de son rayon au rayon de la terre.* Car le double de la parallaxe n'est autre chose que le diamètre apparent de la terre, supposée sphérique, pour un observateur qui serait placé au centre de l'astre, § **301** ; et, à distances égales, les dimensions réelles des corps sont proportionnelles à leurs diamètres apparents. Ce théorème nous sera utile par la suite pour comparer les dimensions des corps planétaires à celles de notre globe (*).

(*) Soient, *fig.* 67, C le centre de la terre, C′ celui de l'astre. Nommons toujours Π la parallaxe horizontale de l'astre ou l'angle OC′C, et D sa distance CC′ au centre de la terre, on aura, par ce qui précède,

$$\sin \Pi = \frac{R}{D}.$$

2Π est le diamètre apparent de la terre pour un observateur placé dans l'astre; réciproquement, le diamètre apparent de l'astre, vu de la terre,

308. La parallaxe, abaissant le lieu vrai des astres, n'altère pas seulement leur hauteur, elle altère aussi leur angle horaire et leur distance au pôle. Les changements qu'elle produit sur ces deux éléments, forment ce qu'on appelle la *parallaxe d'ascension droite*, et la *parallaxe de déclinaison;* mais on peut aisément les déduire de la parallaxe de hauteur.

309. En effet, si, par l'œil de l'observateur, on mène trois rayons visuels OZ, OL, OP, au zénith, à l'astre et au pôle, ces trois lignes, prolongées indéfiniment, formeront, sur la sphère céleste, un triangle sphérique PZS, entre les éléments du lieu apparent de l'astre, *fig.* 68. Maintenant, si, du centre de la terre, on mène aux mêmes points trois autres rayons visuels CP, CZ, CL, les deux premiers étant parallèles à OP et à OZ, à cause de l'éloignement infini des étoiles, pourront être considérés comme rencontrant la sphère céleste aux mêmes points P et Z, c'est-à-dire que l'angle OPC pourra être considéré comme nul. Mais le troisième rayon CL, s'écartant sensiblement de OL à cause de la parallaxe de l'astre, ira rencontrer la sphère céleste en un point S′ différent de S. De là résultera un nouveau triangle sphérique PZS′, entre les lieux vrais; ces deux triangles auront de commun l'arc PZ, distance du zénith au pôle, ou complément de la latitude, et l'angle PZS, égal à l'azimut de l'astre compté du pôle; car les arcs ZS′, ZS, qui sont les distances vraies et apparentes, étant comprises dans le même plan vertical, l'azimut PZS ou l'angle dièdre que forme le méridien avec ce vertical, est le même pour les lieux apparents et pour les lieux vrais. Or, puisque la parallaxe de hauteur SS′ est déterminée par ce qui précède, en fonction de la parallaxe horizontale et de la distance au zénith, il s'ensuit qu'un des deux trian-

---

puisque les arcs sont fort petits,

$$\frac{\Delta}{2\Pi} = \frac{R'}{R},$$

ce qui est le théorème énoncé dans le texte. On connaîtra donc ainsi le rapport du rayon de l'astre au rayon de la terre, et, en cubant ce rapport, on aura $\frac{R'^3}{R^3}$ pour celui de leurs volumes

gles PZS, PZS′ étant donné, l'autre est déterminé complètem
En effet, on peut les déduire l'un de l'autre par le calcul trigon
métrique, et c'est ainsi que l'on obtient les parallaxes de décli
son et d'ascension droite (*).

(*) Pour trouver ces parallaxes de déclinaison et d'ascension droite, c
sidérons successivement nos deux triangles sphériques; soient Z la dist
apparente au zénith, ou ZS; Δ la distance polaire apparente ou PS; P l'an
horaire apparent ou l'angle ZPS; A l'azimut de l'astre, ou l'angle P
PZ, troisième côté du triangle, sera la distance du zénith au pôle, ou
complément de la latitude; nous la représenterons par D. Cela posé, d
près les formules de la trigonométrie sphérique, l'angle P pourra
exprimé en fonction des côtés du triangle et de l'azimut, car on aura

$$\cot P = \frac{\cot Z \sin D - \cos A \cos D}{\sin A}.$$

Nommons Z′, Δ′, P′ les quantités analogues dans le triangle ZPS′, entre
lieux vrais, on aura de même

$$\cot P' = \frac{\cot Z' \sin D - \cos A \cos D}{\sin A};$$

car l'azimut et la distance du pôle au zénith restent les mêmes pour les de
triangles; retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on trouve

$$\cot P - \cot P' = \frac{(\cot Z - \cot Z') \sin D}{\sin A}.$$

En substituant aux cotangentes leur expression trigonométrique $\frac{\cos}{\sin}$
et réduisant au même dénominateur, on en tire

[redacted]

310. Les valeurs de ces réductions sont nécessaires dans une infinité de circonstances, par exemple lorsque l'on observe les différences de déclinaison et d'ascension droite de la lune et d'une étoile, avec la machine parallatique; elles sont indispensables dans le calcul des éclipses et des occultations d'étoiles. Enfin, elles servent aussi pour trouver les distances vraies de la lune aux étoiles dans la détermination des longitudes. Il est en effet évident que la parallaxe altère tous ces éléments, mais il est toujours facile de

---

$\frac{\sin P'}{\sin A}$ est égal à $\frac{\sin Z'}{\sin \Delta'}$, Δ' étant la distance polaire vraie ; on a donc, par la substitution de cette valeur,

$$\sin(P - P') = \frac{\sin \Pi \sin D \sin P}{\sin \Delta'}.$$

$P - P'$ est la difference de l'angle horaire vrai à l'angle horaire apparent. C'est justement ce que l'on nomme *la parallaxe d'ascension droite ;* si nous la représentons par α, nous aurons $P = P' + \alpha$, et en éliminant P, il viendra

$$\sin \alpha = \frac{\sin \Pi \sin D \sin (P' + \alpha)}{\sin \Delta'};$$

et en developpant $\sin(P' + \alpha)$, on en tire

$$\tang \alpha = \frac{\frac{\sin \Pi \sin D \sin P'}{\sin \Delta'}}{1 - \frac{\sin \Pi \sin D \cos P'}{\sin \Delta'}}.$$

Cette formule est absolument analogue à celle de la parallaxe de hauteur, page 400; elle peut se développer en série de la même manière; et en se bornant aux deux premiers termes, qui suffiront toujours, on aura

$$\tang \alpha = \frac{\sin \Pi \sin D \sin P'}{\sin \Delta'} + \frac{\sin^2 \Pi \sin^2 D}{2 \sin^2 \Delta'} \sin 2P' + \ldots.$$

On pourra même fort souvent négliger le second terme, et alors, en substituant le rapport $\frac{\alpha}{\Pi}$ à $\frac{\tang \alpha}{\sin \Pi}$, on aura, par approximation,

$$\text{Parallaxe d'ascension droite} = \frac{\Pi \sin D \sin P'}{\sin \Delta'}.$$

Enfin, on pourrait encore trouver rigoureusement la valeur de $\tang \alpha$, par une transformation analogue à celle de la page 401, au moyen d'un angle

trouver, par la trigonométrie sphérique, les variations qu'ils éprouvent, d'après la connaissance de la parallaxe de hauteur, puisque celle-ci fixe et détermine la position vraie de l'astre sur la sphère céleste; c'est pourquoi nous remettrons ces divers calculs à l'époque où ils nous deviendront nécessaires, et il nous suffira ici d'avoir énoncé le principe.

---

auxiliaire φ, tel qu'on ait

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\sin \Pi \sin D \cos P'}{\sin \Delta'}},$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin \Pi \sin D \sin P'}{\sin \Delta' \sin^2 \varphi}.$$

Toutes ces formules, donnant la parallaxe par le moyen des lieux vrais, sont accommodées à l'usage des Tables astronomiques; elles s'accordent à faire voir que la parallaxe d'ascension droite est nulle au méridien où P est nul.

La parallaxe de déclinaison se trouve, par un calcul analogue, en comparant les distances polaires dans nos deux triangles; en effet, si l'on nomme A l'azimut SZP compté du pôle, on peut exprimer les distances polaires Δ, Δ' en fonction de A, de la distance D du pôle au zénith et de l'angle horaire vrai ou apparent. Nous aurons alors

$$\cot\Delta = \frac{\cot A \sin P + \cos P \cos D}{\sin D}, \quad \cot\Delta' = \frac{\cot A \sin P' + \cos P' \cos D}{\sin D};$$

retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on en tire

$$\sin(\Delta - \Delta') = -\frac{\sin\Delta \sin\Delta'}{\sin D}\,[\cot A(\sin P - \sin P') + \cos D(\cos P - \cos P')$$

11. Jusqu'ici nous avons supposé la terre sphérique. Dans ce la parallaxe horizontale d'un astre, placé à une distance con- te, est la même pour tous les observateurs, quelle que soit position sur la surface terrestre. Mais ce résultat n'a plus si les rayons terrestres sont inégaux, car la parallaxe horizon- est l'angle sous lequel on verrait, du centre de l'astre, le n terrestre qui correspond à chaque observateur. Ainsi, c questions importantes se présentent : l'ellipticité de la terre

---

llaxe de déclinaison $\Delta - \Delta'$; nous aurons $\Delta = \Delta' + \delta$, de même que avons eu $P = P' + \alpha$; et, d'après cela, la formule devient

$$\delta = \left[\frac{\sin\Delta' \cos D \sin\alpha}{\sin D \sin P'} - \frac{2\cos\Delta' \cos(P' + \frac{1}{2}\alpha)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin P'}\right]\sin(\Delta' + \delta);$$

ubstituant ensuite, dans le premier terme, pour $\sin\alpha$ sa valeur $\frac{\Pi \sin D \sin(P' + \alpha)}{\sin\Delta'}$, ce qui le simplifiera un peu, nous aurons

$$\delta = \left[\frac{\sin\Pi \cos D \sin(P' + \alpha) - 2\cos\Delta' \cos(P' + \frac{1}{2}\alpha)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin P'}\right]\sin(\Delta' + \delta).$$

oefficient compris entre les parenthèses ne dépend que des lieux vrais, era connu tout entier dès que l'on aura calculé la parallaxe d'ascension te; en le représentant par Q, la formule précédente deviendra

$$\sin\delta = Q \sin(\Delta' + \delta).$$

l est donc encore analogue à celle qui nous a donné la parallaxe de hau-, ainsi que la parallaxe d'ascension droite; elle se résoudra donc de la ne manière, soit exactement au moyen d'un angle auxiliaire, soit ap- timativement au moyen de la série

$$\tang\delta = Q\sin\Delta' + \frac{Q^2}{2}\sin 2\Delta' + \text{etc.}$$

s les applications on pourra toujours, sans erreur sensible, substituer rapports des arcs α, δ, et Π à ceux de leurs sinus et de leurs tangentes; ui revient à négliger les cubes des parallaxes. Alors on pourra substi- à $\frac{1}{2}\alpha$, la valeur $\frac{\Pi \sin D \sin(P' + \alpha)}{\sin\Delta'}$. Enfin, si l'on se borne à la première sance des parallaxes, ce qui suffira presque toujours, on pourra faire δ nuls dans les termes du second membre, qui sont déjà multipliés par et alors il vient

Parallaxe de déclinaison $= \Pi(\sin\Delta' \cos D - \cos\Delta' \sin D \cos P')$.

a-t-elle, sur les parallaxes, une influence sensible? C peut-on y avoir égard?

La réponse à ces deux questions est facile. Nous avons précédemment que le sinus de la parallaxe horizontale est rayon terrestre divisé par la distance de l'astre au centr terre. Si cette distance est constante, mais que les rayc restres soient inégaux, les sinus des parallaxes horizontale entre eux comme les rayons correspondants, et ces parallax mêmes étant de très-petits angles, seront aussi, à fort pe dans le même rapport; la parallaxe équatoriale surpasse la parallaxe polaire d'une quantité égale à $\frac{1}{314}$ de sa valeu comme le rayon de l'équateur surpasse le rayon du pôle (*)

La plus grande de toutes les parallaxes est celle de la lu sous l'équateur, s'élève jusqu'à 1 degré sexagésimal, ou 3 condes. En prenant la trois cent quatorzième partie de cett tité, on aura 11″,5 pour l'excès de la parallaxe équatoria lune sur la parallaxe polaire : la différence est encore n pour les rayons intermédiaires, et elle varie comme eux, p tionnellement au carré du sinus de la latitude. Mais cett

(*) Soient, en général, Π′ la parallaxe horizontale d'un astre à l'e Π cette parallaxe à la latitude L; en nommant D la distance de l'as rayon de l'équateur, et R le rayon terrestre à la latitude L, on aura

$$\sin \Pi' = \frac{A}{D}, \qquad \sin \Pi = \frac{R}{D};$$

d'où l'on tire

[redacted]

Si l'axe optique s'approche réellement du limbe du côté de l'objectif, le point de mire paraîtra s'en éloigner. Au contraire, si cette extrémité de l'axe optique s'éloigne du limbe, le point de mire paraîtra s'en approcher, parce que les lunettes renversent; et, comme le plan du limbe se trouve toujours dans le même vertical, l'écart apparent du point de mire est double de l'erreur produite par l'inclinaison de l'axe optique. C'est ce que montre la *fig.* 83, où ACB représente le plan vertical du limbe, L'CO' la première direction de la lunette vers l'objet O', qui répond au centre des fils, L"CO" la direction de la lunette après le retournement, et O'O" l'écart de l'objet O' par l'effet de l'inclinaison de l'axe optique sur le plan du limbe, écart double de O'B qui représente l'effet réel de cette inclinaison.

Voulez-vous mesurer cette erreur, détachez l'index du cercle azimutal, de manière que vous puissiez faire tourner la colonne, et ramenez ensuite l'intersection des fils sur le point de mire; l'angle parcouru par l'index sur le cercle azimutal sera égal à l'angle O"CO', et, par conséquent, double de l'erreur O"CB, en supposant que l'objet soit à l'horizon. Si cette dernière condition n'était pas remplie, l'angle parcouru sur le cercle azimutal serait la projection horizontale de l'angle réel. Si j'ai choisi l'objet à l'horizon, c'est afin que l'opération donnât tout de suite cette mesure.

Mais, au lieu de mesurer l'erreur, veut-on la corriger? Il n'y a qu'à ramener les fils du micromètre vers le point de mire, et les

Je saisis cette occasion de faire remarquer encore une fois que l'exactitude des procédés astronomiques est toujours fondée sur une suite d'essais et d'approximations successives. Cela est également vrai pour les résultats des calculs astronomiques, comme on le verra dans la suite de cet ouvrage; et le même principe, transporté dans les autres sciences, offre également le plus sûr moyen, je dirais presque le seul, de parvenir à une grande précision.

Au moyen des vérifications que nous venons de décrire, le cercle est complétement réglé, et on peut immédiatement s'en servir pour les observations. Toutes ces vérifications sont plus longues à expliquer qu'à faire, lorsqu'on est habitué à l'usage du cercle.

---

servé, et passant par l'axe optique de la lunette. L'angle de ce rayon avec la verticale sera la distance vraie au zénith ou Z; mais la distance apparente Z', telle qu'on la lira sur le limbe, ne sera que la projection de la précédente sur le plan du limbe, au moyen d'un arc de cercle perpendiculaire à son plan. Cet arc mesurera donc l'inclinaison de l'axe optique sur le plan du limbe. Soit I cette inclinaison; il est visible que les angles Z, Z' et I sont les trois côtés d'un triangle sphérique rectangle, dont Z est l'hypoténuse, et par conséquent dans lequel on aura, comme tout à l'heure,

$$\cos Z = \cos Z' \cos I.$$

Cette équation est absolument de même forme que celle que nous avons trouvée pour la verticalité du limbe. On en tirera donc de même, par une approximation toujours suffisante,

$$\sin \tfrac{1}{2}(Z - Z') = \frac{\sin^2 \tfrac{1}{2} I}{\operatorname{tang} Z'}.$$

L'erreur provenant de l'axe optique est encore plus petite que celle qui est due au défaut de verticalité du limbe, du moins ordinairement, car il est très-facile d'éviter, sur l'inclinaison de l'axe optique, 1 minute d'erreur, et l'effet en serait insensible sur les distances au zénith où l'on a coutume d'observer avec le cercle répétiteur. On voit que cet effet tend aussi à diminuer les distances au zénith, puisque la distance Z' lue sur le limbe est moindre que la distance réelle Z.

Si l'on avait mal réglé l'axe optique, ou si l'on avait observé trop loin de cet axe, on pourrait toujours, au moyen de la formule précédente, corriger les observations.

331. Il me reste maintenant à expliquer comment, lorsqu'on observe les hauteurs des astres au cercle répétiteur, on peut éluder les effets du mouvement diurne, et opérer absolument comme si l'astre était immobile.

D'abord, en faisant ces observations, on ne peut ordinairement avoir que deux objets; de trouver l'heure par le moyen de la hauteur observée, ou de trouver la hauteur méridienne de l'astre. Examinons successivement ces deux cas.

Pour avoir l'heure, il faut déterminer l'angle horaire par le moyen de la hauteur observée. Il est donc avantageux d'observer loin du méridien, parce qu'alors les hauteurs des astres varient plus rapidement; tandis qu'en approchant du méridien, elles deviennent presque constantes, et une très-petite variation dans la hauteur répond à une grande différence d'angle horaire, de sorte qu'une erreur fort petite sur l'observation de la hauteur en introduirait une considérable sur le temps absolu. Le calcul fait voir que le mouvement en hauteur est le plus rapide lorsque l'azimut est de 100^g. Alors l'astre se trouve dans le plan vertical qui contient les points d'est et ouest, et que l'on nomme ordinairement *premier vertical*. C'est donc surtout dans cette position qu'il est avantageux d'observer les distances au zénith, pour en conclure le temps. Mais tous les astres ne peuvent pas satisfaire à cette condition, car il y en a toujours beaucoup d'entre eux qui ne passent jamais au premier vertical. Heureusement cette condition n'est pas

leur mouvement diurne soit plus rapide, et éviter les étoiles circompolaires, dont le mouvement est trop lent (*).

332. Supposons donc que l'on ait eu égard à ces précautions diverses : on observe les distances de l'astre au zénith, comme on ferait s'il était fixe; mais à chaque observation, soit paire, soit

---

(*) Soient Δ la distance polaire de l'astre que l'on observe, P son angle horaire, Z sa distance zénithale, D la distance du zénith au pôle ou le complément de la latitude du lieu; cela posé, dans le triangle sphérique formé par les trois arcs Δ, Z et D, on aura l'angle horaire P, par la formule

$$\cos P = \frac{\cos Z - \cos \Delta \cos D}{\sin \Delta \sin D}.$$

Supposons qu'au bout de quelques minutes la distance zénithale devienne Z', et l'angle horaire P', Δ et D restant les mêmes, on aura encore

$$\cos P' = \frac{\cos Z' - \cos \Delta \cos D}{\sin \Delta \sin D};$$

retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on a

$$\cos P' - \cos P = \frac{\cos Z' - \cos Z}{\sin \Delta \sin D},$$

ou, en transformant ces expressions,

$$\sin \tfrac{1}{2}(P'+P) \sin \tfrac{1}{2}(P'-P) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(Z'+Z) \sin \tfrac{1}{2}(Z'-Z)}{\sin \Delta \sin D}.$$

Si les observations sont assez rapprochées pour que les différences P' — P et Z' — Z puissent être considérées comme fort petites, on pourra substituer le rapport des arcs à celui des sinus, et l'on aura

$$P' - P = \frac{(Z'-Z) \sin \tfrac{1}{2}(Z'+Z)}{\sin \tfrac{1}{2}(P'+P) \sin \Delta \sin D};$$

de plus, si l'on néglige les carrés et les puissances supérieures de ces petites quantités, on pourra, dans le facteur $\frac{\sin \frac{1}{2}(Z'+Z)}{\sin \frac{1}{2}(P'+P)}$, qui multiplie déjà Z'—Z dans le second membre, supposer Z = Z' et P = P', ce qui donnera

$$P' - P = (Z'-Z) \frac{\sin Z}{\sin P \sin \Delta \sin D}.$$

Les circonstances les plus favorables à la détermination de l'angle horaire sont celles qui donnent à P' — P les plus petites valeurs, Z' — Z restant

impaire, on note exactement l'heure, la minute, la seconde et la fraction de seconde où l'astre s'est placé au centre des fils. Chaque couple d'observations exige au plus deux minutes, quelquefois une seule, selon l'habileté de l'observateur. De temps en temps, à la fin d'une observation paire, on lit sur le limbe l'arc parcouru.

333. Lorsque l'on fait la lecture des arcs, après chaque couple d'observations, leur intervalle étant supposé de deux minutes sexagésimales, on s'aperçoit que, dans l'intervalle de huit ou dix minutes, les hauteurs observées croissent proportionnellement au temps, de sorte que la moyenne des hauteurs correspond exactement à l'époque moyenne, au moins quand on observe assez loin du méridien, comme nous l'avons indiqué. Ceci bien prouvé, on se dispense de lire les arcs à la fin de chaque observation paire, ce qui entraîne des longueurs. On lit après six ou huit observations; en un mot, après un nombre de couples qui comprennent huit ou dix minutes de temps : on nomme cet assemblage *une série*, et on

---

le même; car alors une petite erreur sur Z influera peu sur P. Il faut donc, pour l'exactitude, que le coefficient $\frac{\sin Z}{\sin P \sin \Delta \sin D}$ soit le plus petit possible; et comme, relativement à une même étoile et à un même observateur Δ et D sont constants, la condition ne porte que sur le facteur $\frac{\sin Z}{\sin P}$. Or, dans le triangle sphérique formé par les trois arcs Z, Δ et D, si l'on nomme A l'azimut opposé au côté Δ, on aura $\frac{\sin Z}{\sin P} = \frac{\sin \Delta}{\sin A}$, et

égale à l'angle Z'OZ, formé par le rayon terrestre avec la cale. Au moyen de ces résultats rien n'est plus facile que d'o les éléments du lieu apparent de l'astre, étant donné son lie rapporté au centre du sphéroïde terrestre (*).

317. J'ai dit, dans le tome Ier, page 190, que le diamètre

(*) D'après ce que l'on vient de dire, en nommant toujours ω l'a rayon terrestre avec la verticale, et désignant par α la parallaxe d'as droite, par δ la parallaxe de déclinaison, les formules trouvées dans de la page 408, pour le cas de la terre sphérique, donneront, dans l roïde,

$$\sin\alpha = \frac{\sin\Pi\sin(D+\omega)\sin(P'+\alpha)}{\sin\Delta'},$$

$$\sin\delta = \left[\frac{\sin\Pi\cos(D+\omega)\sin(P'+\alpha)-2\cos\Delta'\cos(P'+\frac{1}{2}\alpha)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin P'}\right]\sin($$

ou, avec une approximation presque toujours suffisante,

$$\alpha = \frac{\Pi\sin(D+\omega)\sin P'}{\sin\Delta'},$$

$$\delta = \Pi[\sin\Delta'\cos(D+\omega) - \cos\Delta'\sin(D+\omega)\cos P'];$$

Δ' est la distance polaire vraie, et P' l'angle horaire vrai vus du centre terre. α et δ étant calculés par ces formules, si l'on nomme Δ la di polaire apparente, et P l'angle horaire apparent, vus de la surface du roïde terrestre, on aura

$$P = P' + \alpha, \quad \Delta = \Delta' + \delta.$$

Avec P, Δ et D, on peut calculer directement la distance apparente Z si l'on forme le triangle sphérique SZP, *fig.* 72, par trois rayons vi menés de l'observateur au zénith apparent, à l'astre et au pôle

334. Ayant ainsi la distance moyenne de l'astre au zénith et l'époque moyenne qui y correspond en temps de la pendule, on résoudra, avec cette distance, le triangle sphérique qui donne l'angle horaire. Cet angle, réduit en temps sidéral, donnera le nombre d'heures, minutes et secondes sidérales, comprises entre l'époque des observations et le passage de l'astre au méridien. Si dans ce calcul on a soin de compter les angles horaires à partir du méridien supérieur, et dans le sens du mouvement diurne, depuis zéro jusqu'à la circonférence entière, il suffira d'ajouter l'angle horaire calculé à l'ascension droite de l'astre réduite en temps, et la somme sera l'angle horaire du point ♈ de l'équateur ou *l'heure sidérale*, § 18. Il est entendu qu'avant d'employer la distance zénithale observée, pour calculer l'angle horaire, il faut la corriger de la réfraction. Quant à la distance polaire de l'astre, qui est aussi un des éléments de ce calcul, on la prend dans les catalogues astronomiques, par exemple, dans la *Connaissance des Temps*; mais comme ces catalogues ne donnent que la *position moyenne* de l'astre, on y fait les petites corrections relatives à la précession, à l'aberration et à la nutation, pour la convertir en *position apparente*.

335. Si l'astre observé est le soleil, l'angle horaire, ainsi observé et compté de midi ou de minuit, donnera l'heure solaire. Les astronomes français, se conformant à l'usage établi généralement dans la société, comptent ces heures à partir du méridien inférieur ou de minuit, et ils vont ainsi, sans interruption, de 0 à 24 heures

[redacted]

318. Dans tout ce qui précède, nous n'avons pa
de la parallaxe du soleil. En effet, elle est si petite
méthodes précédentes ne peut la donner avec exa
les astronomes ont ignoré pendant longtemps sa vale
a réussi à la déterminer, non pas par l'observatio
qui eût été sujette à trop d'inexactitude, mais d'après
ports, qui existent entre les distances des diverses
la terre elle-même, au centre du soleil. On sent q
thode indirecte n'a pu être inventée qu'après que l
avec beaucoup d'exactitude, les mouvements pla
pourquoi je l'exposerai plus tard. La parallaxe du
en a déduite, est égale à 8″,8 sexagésimales, ou à 2
vision décimale; ce qui donne la distance moyenne
la terre, égale à 23578 rayons terrestres, ou plus de
millions de lieues. On ne pouvait rien obtenir de
dimensions du système solaire, tant qu'il restait qu
tude sur cet élément. Par conséquent, si l'on voulait
ment la marche d'invention, il faudrait d'abord fai
de cette valeur jusqu'à l'époque où elle a pu être d
revenir ensuite sur tous les résultats. Telle a été, en eff
réelle de l'astronomie, dont les progrès, comme je l'
plusieurs fois, ne sont qu'une suite d'approximation
Mais cette marche, tour à tour directe et rétograd
barrassante et peu méthodique. Il nous suffira de rem
valeur de cette parallaxe étant fort petite, les résult
que l'on obtiendrait, en n'y ayant point égard, différ

soirement l'emploi d'une si petite correction, dont la nécessité est reconnue, et dont la valeur sera par la suite démontrée très-exactement, afin d'arriver d'abord sans retour aux résultats définitifs. Il en est de même des petites corrections relatives à la précession, à l'aberration et à la nutation, dont, pour plus de brièveté et de méthode, nous sommes convenus de faire un usage anticipé. Ainsi, nous supposerons toujours, dans les résultats dont nous ferons usage, qu'on y a corrigé l'effet de la parallaxe solaire, d'après la valeur que nous venons de rapporter.

CHAPITRE XXII (*).

Description et usages du cercle répétiteur.

319. M'étant proposé de réunir et d'expliquer dans cet o
les procédés d'observation les plus exacts et les plus général
usités, je vais exposer avec détail l'usage du cercle répétite
à lui seul peut suppléer au mural et à la lunette méridienn
les remplace avec une exactitude indéfinie; qui, par son p
volume et le petit nombre de vérifications qu'il exige, pe
aisément transporté partout; enfin, dont les applications n
pas bornées à l'astronomie seule, mais s'étendent à la géod
la topographie et à une infinité de recherches physiques d
genre, où elles portent une précision inespérée.

320. L'essentiel de cet instrument consiste dans un limb
culaire vertical ZAP, *fig.* 74, qui peut tourner autour de la
cale CP, menée par son centre, et qui, de plus, peut aussi
ner verticalement autour d'un axe horizontal mené par ce
centre. Une lunette OCL, munie d'un micromètre à fil fixe e
vernier, tourne autour du centre C, et peut parcourir succe
ment tous les points du limbe. L'instrument entier est repr
dans la *Pl. XVII* du tome II. Pour en comprendre l'usage, rev
à la *fig.* 74. Soit S un objet éloigné et immobile, dont on ve
surer la distance au zénith. Ce sera même, si l'on veut, une

mouvement diurne, on peut calculer les effets de ce déplacement pendant l'intervalle des observations et en tenir compte, comme nous le verrons tout à l'heure; ce qui ramène la question au même état que si l'on n'avait à observer que des points fixes. Cela posé, voici comment on opère : on commence par fixer le vernier de la lunette sur le point zéro de la division ; puis on dirige le limbe dans le vertical de l'astre, au moyen du mouvement azimutal, et on le fait ensuite tourner verticalement autour de son centre, jusqu'à ce que le point S réponde au centre des fils ; c'est ce que représente la *fig.* 74. Concevons maintenant un fil-à-plomb CP mené par le centre du limbe; sa direction prolongée déterminera le zénith Z ; et l'arc AZ, lu sur le limbe, sera la distance au zénith. Mais on peut éviter l'usage de ce fil et la lecture de l'arc, comme on va le voir.

321. Les choses étant disposées comme nous venons de le dire, on donne au limbe un mouvement azimutal autour de la verticale qui passe par son centre, et on lui fait faire un demi-tour, de manière à le ramener dans le vertical de l'astre (*voyez fig.* 75). Dans ce mouvement, le point Z du limbe n'a pas changé. Seulement, si le limbe faisait d'abord face à l'est, il fait maintenant face à l'ouest, et comme la lunette est fixe sur le limbe, il s'ensuit que sa direction actuelle LAC fait toujours le même angle avec la verticale. Alors on détache cette lunette, et en la faisant tourner sur le limbe, on la ramène sur l'astre. Sa nouvelle direction CA'S répond alors à un autre point du limbe, tel que A'; et, puisque nous supposons l'astre immobile, l'arc A'Z est exactement égal à l'arc AZ, ou à la distance au zénith. L'arc total AA', que la lunette vient de parcourir, est donc double de cette distance. Ainsi, en lisant cet arc indiqué par le déplacement du vernier sur la division du limbe, et prenant sa moitié, on aura la distance au zénith, sans qu'il soit du tout nécessaire de connaître le point Z; et, par conséquent, sans avoir aucun besoin de fil-à-plomb.

322. A la vérité, ceci suppose que le limbe, en passant de la première observation à la seconde, a tourné exactement autour de la verticale, en sorte que chacun de ses points reste exactement à la même hauteur au-dessus du plan horizontal. Pour s'en

assurer, on attache derrière le limbe et parallèlement à son plan un niveau à bulle d'air très-sensible, que l'on *cale*, c'est-à-dire que l'on met bien horizontal dans la première position du cercle, où le limbe faisait, je suppose, face à l'est; ensuite, si le point Z du limbe s'est un peu déplacé par le retournement, lorsque le limbe fait face à l'ouest, on en est averti par le niveau qui s'est déplacé avec lui, et dont la bulle ne répond plus aux mêmes points de la division du tube. Alors on ramène le limbe à la position où le niveau rentre dans ses premières limites; ainsi, sans connaître le point Z, on est toutefois assuré qu'il revient dans la même verticale. Il y a, dans tous les cercles, des vis de rappel pour faire ainsi mouvoir le limbe par degrés insensibles, et pour caler le niveau.

323. Après qu'on a ainsi la distance zénithale double, on obtient la distance quadruple de la manière suivante : sans toucher à la lunette, on retourne l'instrument, et on ramène le limbe la face à l'est, comme il était d'abord. La lunette prend alors la direction CA'L, *fig.* 76. Si on la ramenait vers l'astre, le limbe restant fixe, elle reviendrait au point A d'où elle est partie, et on détruirait l'arc qu'on lui a fait parcourir. Au lieu de cela, on la laisse fixe en A', mais on ramène le limbe en le faisant tourner verticalement autour de son centre, jusqu'à ce que l'astre revienne dans la lunette au centre des fils. Alors le point A' est dirigé vers l'astre, et le point de départ descend en A, *fig.* 77. Cela fait, on se retrouve exactement dans les mêmes circonstances où l'on était au commencement de la première observation, *fig.* 74; si ce n'est que le

sera la distance au zénith quadruple ; en le divisant par 4, on aura la distance simple.

Ayant la distance quadruple, on peut l'avoir sextuple par le même procédé : il faut retourner le limbe face à l'est, dans sa première position, et ramener le point A″ vers l'astre, sans détacher la lunette. Alors le nouveau point de départ sera A″ ; une nouvelle observation double amènera la lunette en A‴, et l'arc AA′ A″ A‴ sera l'arc sextuple. En le divisant par 6, on aura l'arc simple.

En continuant ainsi indéfiniment, on obtiendra tel multiple de la distance que l'on voudra, et en divisant l'arc total parcouru par le nombre des observations, on aura la distance zénithale simple. On peut faire ainsi parcourir à la lunette plusieurs circonférences entières dont il faudra tenir compte. Mais, pour s'épargner la peine de les compter une à une, il suffit de lire une seule fois l'arc double, ce qui fait connaître la distance simple ; et quand les observations sont terminées, on voit aisément quel nombre de circonférences entières il faut ajouter pour que l'arc total, divisé par le nombre des observations, redonne la distance simple, déterminée approximativement par la première lecture.

324. Examinons maintenant en quoi consiste l'avantage de cette multiplication. Elle n'en aurait aucun si les divisions faites sur le cercle étaient mathématiquement exactes, et si l'observateur pointait toujours parfaitement juste ; car alors, une seule observation donnerait la distance au zénith exacte. Mais, comme ces conditions sont impossibles à remplir dans la pratique, la répétition des angles y supplée par des compensations.

D'abord, quant à l'erreur des divisions, on voit que les arcs mesurés se suivent sans interruption sur le limbe, de manière que le point du limbe, qui est la fin d'une observation, devient l'origine de la suivante Cela fait que la somme des observations, ou l'arc total parcouru, ne renferme absolument aucune erreur intermédiaire, mais seulement les deux erreurs des lectures extrêmes. Ces erreurs elles-mêmes sont encore affaiblies, parce que les alidades du cercle portent quatre verniers que l'on lit séparément, et dont la moyenne contribue à marquer le commencement et la fin de l'arc total avec une plus grande probabilité d'exactitude.

tion qui s'opère entre elles n'est pas l'effet d'une pr
d'une certitude

Pour sentir jusqu'où cette compensation peut alle
que, dans nos cercles répétiteurs qui n'ont ordinaire
cimètres (15 pouces environ) de diamètre, l'erreur d
peut pas certainement s'élever à 15″ sexagésimales.
rait donc au plus à $\frac{1}{2}$ seconde, après trente observat
vient-elle après quatre-vingts ou cent? que devient-
on peut le faire et comme on l'a fait souvent, on l
des différents jours se succéder sans interruption su
sorte que les deux erreurs des lectures extrêmes se t
réparties sur un arc total qui contient plusieurs r
l'arc simple?

L'erreur des divisions est donc comme nulle dan
tions faites au cercle. Il est impossible qu'elle soit a
sement détruite dans les plus grands instruments, s'i
répétiteurs. Jamais l'adresse de l'artiste ne peut égal
mathématique.

325. Mais il y a d'autres erreurs qui se détruisen
cipe des probabilités dans l'usage du cercle, et qui n
autres instruments. Telles sont les erreurs du nive
très-petites dans les premiers cercles répétiteurs q
struits, sont encore moindres dans nos cercles actuels
donne immédiatement les fractions de seconde. Tell
les erreurs du pointé, qui, déjà fort petites par el
détruisent comme celles du niveau, par leur compen

zénith, affectée de toute l'erreur qui peut avoir été commise sur la distance polaire. Mais cette erreur agit en sens contraire sur les résultats des deux passages. Elle disparaît donc dans leur somme, qui donne ainsi la distance du pôle au zénith, et se double dans leur différence qui donne l'erreur de la distance polaire. Cette compensation est toute pareille à celle qui se fait dans les distances méridiennes du soleil, lorsqu'on observe les deux bords (*).

C'est par ce procédé, uni aux soins de l'exactitude la plus

(*) Soient Z' la moyenne des distances au zénith observées dans les passages supérieurs ; Z'' cette moyenne pour les passages inférieurs ; D la vraie distance du pôle au zénith, et Δ la distance polaire véritable : en calculant avec ces valeurs, que nous supposons exactes, on trouverait

$$\text{Dans les passages supérieurs} \quad D = Z' + \Delta,$$
$$\text{Dans les passages inférieurs} \quad D = Z'' - \Delta;$$

et ces deux valeurs de D s'accorderaient ensemble. Mais si, au lieu de Δ, on emploie $\Delta + e$, e étant l'erreur de la distance polaire, on trouvera nécessairement des valeurs de D, qui ne s'accorderont plus, et en les nommant D', D'', on aura

$$\text{Dans les passages supérieurs} \quad D' = Z' + \Delta + e,$$
$$\text{Dans les passages inférieurs} \quad D'' = Z'' - \Delta - e;$$

ou, en mettant pour $Z' + \Delta$ et $Z'' - \Delta$, leur valeur commune D,

$$D' = D + e, \quad D'' = D - e,$$

d'où l'on tire, par addition et soustraction,

$$D = \frac{D' + D''}{2} \qquad e = \frac{D' - D''}{2}.$$

auquel les pinces sont appliquées. Les artistes ont de
très-précis et très-simples pour remplir cette condition.
ces points, au plus élevé, on suspend un fil-à-plomb e
mouvoir le limbe jusqu'à ce que ce fil vienne battre e
sur l'autre point. Alors le limbe est vertical, puisque,
struction, la ligne verticale, menée par les deux points l
parallèle à son plan. Quand on l'a amené dans cette po
fait mouvoir les vis de rappel du petit niveau, de mai
devienne exactement horizontal, et les variations de ce i
diquent ensuite si le limbe s'écarte de la verticalité. La
de cet instrument rend même pour cela son usage préféra
du fil à plomb, en même temps qu'il est infiniment p
mode (*).

(*) Pour apprécier l'erreur que produirait un petit défaut de
prolongeons le plan du limbe jusqu'à la sphère céleste; il la co
vant un grand cercle que nous nommerons HZ'H, *fig.* 79. Le p
plus élevé de ce cercle, sera le faux zénith indiqué par l'instrument
OZ', menée à ce point par le centre du limbe, sera la verticale
autour de laquelle on mesure, sur le limbe, les distances au z
maintenant OZ la verticale vraie, en sorte que Z' OZ soit l'incl
plan du limbe sur la verticale, angle que nous nommerons I. Cel
l'on mène du point O un rayon visuel OS à une étoile quelconq
tance au zénith véritable sera l'angle ZOS, que nous nommerons
fausse distance mesurée sur le limbe, sera l'angle Z' OS, que nou
rons Z'. Les trois côtés ZZ', ZS, Z'S formeront, sur la sphère cé
triangle sphérique, rectangle en Z', et dans lequel on aura

344. Veut-on maintenant l'angle quadruple? laissez les lunettes fixes, et faisant tourner le limbe, ramenez par ce mouvement la supérieure sur l'objet à droite S′; puis détachez l'inférieure et amenez-la sur l'objet à gauche S″, *fig.* 89. Alors les circonstances redeviennent absolument les mêmes que dans la première observation seulement le point de départ de la lunette supérieure sur le limbe n'est plus A, mais A″, c'est-à-dire, l'extrémité de l'arc double parcouru dans le premier couple d'observations. Ainsi, en recommençant à opérer de la même manière, on ajoutera un nouvel arc double au premier, et, en multipliant les observations, on aura tel multiple de l'angle que l'on voudra. Quand on croira avoir atteint, par la répétition, une exactitude suffisante, on lira les verniers, et, en divisant l'arc total par le nombre des observations, on aura l'arc simple. Ce procédé possède évidemment tous les avantages que nous avons remarqués dans la répétition, pour les angles verticaux.

345. Voyons maintenant les précautions et les vérifications qu'il exige. La première est de rendre les axes optiques des deux lunettes parallèles au plan du limbe : rien n'est plus facile. On a vu comment il faut opérer pour la lunette supérieure; quand celle-ci est réglée, on la dirige sur un objet éloigné, et on amène l'axe optique de l'autre sur le même point. Ces axes optiques sont alors parallèles entre eux; ils sont donc tous deux parallèles au plan du limbe puisque l'un d'eux a été préalablement amené dans cette situation.

bas vienne en haut. Alors suspendez de nouveau le fil-à-plomb, s'il bat encore exactement sur les deux points P et Q, le limbe est vertical et les pinces sont bien réglées. Dans le cas contraire, l'écart du fil-à-plomb sera double du défaut de parallélisme. Car, soit, par exemple, LL_1, *fig.* 80, la direction du limbe dans sa première position, la verticale PQ faisant avec lui un certain angle par l'erreur des pinces. Dans le renversement, chacun des points P, Q décrit une circonférence de cercle autour de l'axe de rotation AGC, qui est perpendiculaire au limbe. La ligne PQ décrit donc, autour de cet axe, une surface conique dont l'angle au centre est PC'P' ou Q'C'Q, P' et Q' désignant les nouvelles positions des points P et Q après le renversement. Si par le point C' on mène C'L' parallèle au limbe, cette ligne, qui demeure immobile pendant la rotation, divisera l'angle Q'C'P en deux moitiés, dont chacune sera égale à l'angle L'C'P, formé par la ligne PQ avec le limbe. Or, quand on suspendra de nouveau le fil-à-plomb en Q', la quantité Q''Q'P', dont il s'écartera de la ligne P'Q' sera égale à l'angle au centre Q'C'P. Cet écart sera, par conséquent, double de l'erreur du parallélisme.

Si l'on s'apercevait d'une erreur de ce genre, il faudrait s'occuper de la corriger. Pour cela, il doit y avoir, sur les pinces, des vis de rappel qui permettent de rapprocher ou d'éloigner les points P et Q. On fera donc marcher ces points de manière à détruire la moitié de l'écart observé, et avec les pinces ainsi réglées, on remettra le limbe vertical. Mais comme il est bien difficile que l'on fasse exactement cette bissection dès la première fois, lorsqu'on

un observateur placé à l'un ou l'autre de ces points, verrait l'excentricité. Cela posé, on aura évidemment $S''C'S' = S''BS' - S'$, puisque l'angle $S''BS'$ est extérieur au triangle $BC'S'$. On aura de même $S''BS' = A + S''$, et, par conséquent, $S''C'S' = A + S'' - S'$: c'est-à-dire, que l'angle décrit par le recul de la lunette supérieure est égal à l'angle des deux objets, plus la différence des parallaxes. L'arc total décrit par cette lunette sur le limbe, dans son retour vers l'objet à gauche, est donc égal à l'angle précédent plus A, ou à $2A + S'' - S'$; et sa moitié $A + \frac{S'' - S'}{2}$, représente l'arc simple lu sur le limbe. La quantité $\frac{S'' - S'}{2}$ exprime donc ce qu'il faut retrancher de cet arc, pour avoir l'angle A compris entre les deux objets; ou ce qui revient au même, il faut à l'arc mesuré par les verniers, ajouter la correction $\frac{S' - S''}{2}$, c'est-à-dire la moitié de la parallaxe de l'objet à droite, moins la moitié de la parallaxe de l'objet à gauche. Nous avons supposé l'excentricité à gauche de la lunette inférieure, l'observateur étant placé à l'oculaire; ce serait le contraire, si elle était à droite. Il faudrait alors ajouter la moitié de la parallaxe de l'objet à gauche, moins la moitié de la parallaxe de l'objet à droite. Il y a des cercles où les deux lunettes sont excentriques, mais ce cas est fort rare : l'on peut voir aisément qu'alors la correction définitive est la différence de celles qu'exige chaque excentricité. Au reste, comme l'excentricité des lunettes et

le limbe du cercle lui-même sont toujours fort petits par rapport à la distance des objets dont on mesure l'angle, il en résulte que les parallaxes S′ et S″ sont toujours extrêmement petites, et peuvent, le plus souvent, être négligées (*).

347. Il arrive souvent qu'ayant à observer d'un point C, *fig.* 91, un angle S′CS″, compris entre deux objets éloignés, on ne peut pas se placer précisément au centre C de la station, mais dans quelque autre point, tel que C′ situé à une petite distance du premier. Alors l'angle S″C′S′, observé de ce point, n'est pas le même que celui qu'on verrait du point C, et il faut y faire une petite correction pour l'y ramener; c'est ce que l'on nomme *la réduction au centre*.

Ceci est encore une affaire de parallaxe. Soient C l'angle demandé, C′ l'angle observé, S′, S″ les parallaxes des deux objets, c'est-à-dire les angles sous lesquels ils voient la ligne CC′ qui joint les deux centres. On aura, comme tout à l'heure, $C' = S''BS' - S'$, parce que l'angle S″BS′ est extérieur au triangle C′BS′. On aura, par une raison semblable, $S''BS' = C + S''$; par conséquent, $C' = C + S'' - S'$, et enfin $C = C' + S' - S''$. D'où l'on voit que, pour avoir l'angle cherché C, il faut ajouter à l'angle observé la parallaxe de l'objet à droite, et en retrancher la parallaxe de l'objet à gauche. Ces parallaxes sont faciles à évaluer quand on connaît la distance des objets, la distance des centres et les angles observés du point C′ (**).

(*) Borda a remarqué que l'effet de l'excentricité est nul sur la somme des trois angles d'un triangle. En effet, soient A, B, C les trois angles, en allant de droite à gauche, et AB, BC, AC les trois côtés; les corrections dues à l'excentricité seront

$$\text{à l'angle A} \ldots \frac{1''.e}{2\,AC \sin 1''} - \frac{1''.e}{2\,AB \sin 1''},$$

$$\text{à l'angle B} \ldots \frac{1''.e}{2\,AB \sin 1''} - \frac{1''.e}{2\,BC \sin 1''},$$

$$\text{à l'angle C} \ldots \frac{1''.e}{2\,BC \sin 1''} - \frac{1''.e}{2\,AC \sin 1''},$$

dont la somme est égale à zéro.

(**) Soit toujours l'angle observé S″C′S′=C′; supposons que l'on observe aussi l'angle S″C′C et nommons-le y. Appelons G la distance CS″ de

348. Quand on a observé les angles de position formés entre les objets et dans leur plan, il faut les réduire à l'horizon. Pour cela, on redresse le limbe, on le remet vertical, et on mesure les distances des deux objets au zénith; avec ces distances et l'angle observé, on peut trouver la réduction à l'horizon, comme nous l'avons enseigné dans les pages 93 et suivantes.

349. Enfin, le cercle répétiteur peut encore servir, et sert en effet, à trouver l'arc de distance de deux astres, ou la distance angulaire d'un astre à un objet fixe. Le procédé est absolument le même que pour mesurer les angles de position des objets terrestres dans des plans inclinés. Seulement si l'un des objets, ou tous les deux, sont mobiles, il faut que les observateurs fassent continuellement varier l'inclinaison du plan du limbe, de manière à lui faire suivre toujours les deux objets. Chaque fois que la lunette est pointée sur l'astre, on note exactement l'heure, la minute, la seconde et la fraction de seconde, comme dans les autres observations célestes. En bornant les séries à un petit nombre de minutes, on peut regarder la distance moyenne comme correspondante à l'époque moyenne des observations; car nous avons vu qu'à de grandes

---

l'objet à gauche au centre de la station; et D la distance CS′ de l'objet à droite; enfin nommons δ la distance CC′ des deux centres. Les triangles S′C′C, S″C′C donneront

$$\sin S' = \frac{\delta \sin (C' + y)}{D}, \qquad \sin S'' = \frac{\delta \sin y}{G};$$

Si l'axe optique s'approche réellement du limbe du côté de l'objectif, le point de mire paraîtra s'en éloigner. Au contraire, si cette extrémité de l'axe optique s'éloigne du limbe, le point de mire paraîtra s'en approcher, parce que les lunettes renversent; et, comme le plan du limbe se trouve toujours dans le même vertical, l'écart apparent du point de mire est double de l'erreur produite par l'inclinaison de l'axe optique. C'est ce que montre la *fig.* 83, où ACB représente le plan vertical du limbe, L'CO' la première direction de la lunette vers l'objet O', qui répond au centre des fils, L''CO'' la direction de la lunette après le retournement, et O'O'' l'écart de l'objet O' par l'effet de l'inclinaison de l'axe optique sur le plan du limbe, écart double de O'B qui représente l'effet réel de cette inclinaison.

Voulez-vous mesurer cette erreur, détachez l'index du cercle azimutal, de manière que vous puissiez faire tourner la colonne, et ramenez ensuite l'intersection des fils sur le point de mire; l'angle parcouru par l'index sur le cercle azimutal sera égal à l'angle O''CO', et, par conséquent, double de l'erreur O''CB, en supposant que l'objet soit à l'horizon. Si cette dernière condition n'était pas remplie, l'angle parcouru sur le cercle azimutal serait la projection horizontale de l'angle réel. Si j'ai choisi l'objet à l'horizon, c'est afin que l'opération donnât tout de suite cette mesure.

Mais, au lieu de mesurer l'erreur, veut-on la corriger? Il n'y a qu'à ramener les fils du micromètre vers le point de mire, et les faire ainsi marcher jusqu'à ce que l'on ait détruit la moitié de

: saisis cette occasion de faire remarquer encore une fois que ıctitude des procédés astronomiques est toujours fondée sur suite d'essais et d'approximations successives. Cela est égale- t vrai pour les résultats des calculs astronomiques, comme on ɜrra dans la suite de cet ouvrage; et le même principe, trans- é dans les autres sciences, offre également le plus sûr moyen, rais presque le seul, de parvenir à une grande précision.

u moyen des vérifications que nous venons de décrire, le le est complétement réglé, et on peut immédiatement s'en ir pour les observations. Toutes ces vérifications sont plus ;ues à expliquer qu'à faire, lorsqu'on est habitué à l'usage du :le.

é, et passant par l'axe optique de la lunette. L'angle de ce rayon avec la icale sera la distance vraie au zenith ou Z; mais la distance apparente telle qu'on la lira sur le limbe, ne sera que la projection de la précé- :e sur le plan du limbe, au moyen d'un arc de cercle perpendiculaire à plan. Cet arc mesurera donc l'inclinaison de l'axe optique sur le plan du ɔe. Soit I cette inclinaison; il est visible que les angles Z, Z' et I sont :rois côtés d'un triangle sphérique rectangle, dont Z est l'hypoténuse, et conséquent dans lequel on aura, comme tout à l'heure,

$$\cos Z = \cos Z' \cos I.$$

te équation est absolument de même forme que celle que nous avons ıvée pour la verticalité du limbe. On en tirera donc de même, par une roximation toujours suffisante,

$$\sin \tfrac{1}{2}(Z - Z') = \frac{\sin^2 \tfrac{1}{2} I}{\tang Z'}.$$

rreur provenant de l'axe optique est encore plus petite que celle qui est ı au défaut de verticalité du limbe, du moins ordinairement, car il est s-facile d'éviter, sur l'inclinaison de l'axe optique, 1 minute d'erreur, et fet en serait insensible sur les distances au zénith où l'on a coutume d'ob- ver avec le cercle répétiteur. On voit que cet effet tend aussi à diminuer distances au zénith, puisque la distance Z' lue sur le limbe est moindre ɔ la distance réelle Z.

ɜi l'on avait mal réglé l'axe optique, ou si l'on avait observé trop loin de axe, on pourrait toujours, au moyen de la formule précédente, corriger observations.

331. Il me reste maintenant à expliquer comment, lorsqu'on observe les hauteurs des astres au cercle répétiteur, on peut éluder les effets du mouvement diurne, et opérer absolument comme si l'astre était immobile.

D'abord, en faisant ces observations, on ne peut ordinairement avoir que deux objets; de trouver l'heure par le moyen de la hauteur observée, ou de trouver la hauteur méridienne de l'astre. Examinons successivement ces deux cas.

Pour avoir l'heure, il faut déterminer l'angle horaire par le moyen de la hauteur observée. Il est donc avantageux d'observer loin du méridien, parce qu'alors les hauteurs des astres varient plus rapidement; tandis qu'en approchant du méridien, elles deviennent presque constantes, et une très-petite variation dans la hauteur répond à une grande différence d'angle horaire, de sorte qu'une erreur fort petite sur l'observation de la hauteur en introduirait une considérable sur le temps absolu. Le calcul fait voir que le mouvement en hauteur est le plus rapide lorsque l'azimut est de 100^g. Alors l'astre se trouve dans le plan vertical qui contient les points d'est et ouest, et que l'on nomme ordinairement *premier vertical*. C'est donc surtout dans cette position qu'il est avantageux d'observer les distances au zénith, pour en conclure le temps. Mais tous les astres ne peuvent pas satisfaire à cette condition, car il y en a toujours beaucoup d'entre eux qui ne passent jamais au premier vertical. Heureusement cette condition n'est pas non plus rigoureusement nécessaire, et lorsque les circonstances

leur mouvement diurne soit plus rapide, et éviter les étoiles circompolaires, dont le mouvement est trop lent (*).

332. Supposons donc que l'on ait eu égard à ces précautions diverses : on observe les distances de l'astre au zénith, comme on ferait s'il était fixe; mais à chaque observation, soit paire, soit

---

(*) Soient Δ la distance polaire de l'astre que l'on observe, P son angle horaire, Z sa distance zénithale, D la distance du zénith au pôle ou le complément de la latitude du lieu; cela posé, dans le triangle sphérique formé par les trois arcs Δ, Z et D, on aura l'angle horaire P, par la formule

$$\cos P = \frac{\cos Z - \cos \Delta \cos D}{\sin \Delta \sin D}.$$

Supposons qu'au bout de quelques minutes la distance zénithale devienne Z', et l'angle horaire P', Δ et D restant les mêmes, on aura encore

$$\cos P' = \frac{\cos Z' - \cos \Delta \cos D}{\sin \Delta \sin D};$$

retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on a

$$\cos P' - \cos P = \frac{\cos Z' - \cos Z}{\sin \Delta \sin D},$$

ou, en transformant ces expressions,

$$\sin \tfrac{1}{2}(P' + P) \sin \tfrac{1}{2}(P' - P) = \frac{\sin \frac{1}{2}(Z' + Z) \sin \frac{1}{2}(Z' - Z)}{\sin \Delta \sin D}.$$

Si les observations sont assez rapprochées pour que les différences P' — P et Z' — Z puissent être considérées comme fort petites, on pourra substituer le rapport des arcs à celui des sinus, et l'on aura

$$P' - P = \frac{(Z' - Z) \sin \frac{1}{2}(Z' + Z)}{\sin \frac{1}{2}(P' + P) \sin \Delta \sin D};$$

de plus, si l'on néglige les carrés et les puissances supérieures de ces petites quantités, on pourra, dans le facteur $\frac{\sin \frac{1}{2}(Z' + Z)}{\sin \frac{1}{2}(P' + P)}$, qui multiplie déjà Z'—Z dans le second membre, supposer Z = Z' et P = P', ce qui donnera

$$P' - P = (Z' - Z) \frac{\sin Z}{\sin P \sin \Delta \sin D}.$$

Les circonstances les plus favorables à la détermination de l'angle horaire sont celles qui donnent à P' — P les plus petites valeurs, Z' — Z restant

impaire, on note exactement l'heure, la minute, la seconde et la fraction de seconde où l'astre s'est placé au centre des fils. Chaque couple d'observations exige au plus deux minutes, quelquefois une seule, selon l'habileté de l'observateur. De temps en temps, à la fin d'une observation paire, on lit sur le limbe l'arc parcouru.

333. Lorsque l'on fait la lecture des arcs, après chaque couple d'observations, leur intervalle étant supposé de deux minutes sexagésimales, on s'aperçoit que, dans l'intervalle de huit ou dix minutes, les hauteurs observées croissent proportionnellement au temps, de sorte que la moyenne des hauteurs correspond exactement à l'époque moyenne, au moins quand on observe assez loin du méridien, comme nous l'avons indiqué. Ceci bien prouvé, on se dispense de lire les arcs à la fin de chaque observation paire, ce qui entraîne des longueurs. On lit après six ou huit observations; en un mot, après un nombre de couples qui comprennent huit ou dix minutes de temps : on nomme cet assemblage *une série*, et on

---

le même; car alors une petite erreur sur Z influera peu sur P. Il faut donc, pour l'exactitude, que le coefficient $\frac{\sin Z}{\sin P \sin \Delta \sin D}$ soit le plus petit possible; et comme, relativement à une même étoile et à un même observateur Δ et D sont constants, la condition ne porte que sur le facteur $\frac{\sin Z}{\sin P}$. Or, dans le triangle sphérique formé par les trois arcs Z, Δ et D, si l'on nomme A l'azimut opposé au côté Δ, on aura $\frac{\sin Z}{\sin P} = \frac{\sin \Delta}{\sin A}$, et comme Δ est constant, on voit que la condition imposée sera remplie, lorsque

fait répondre l'époque moyenne des observations à l'arc moyen parcouru sur le limbe. Mais si l'on prolongeait une même série plus longtemps, ou si l'on observait très-près du méridien, cette méthode serait inexacte, comme l'expérience et le calcul s'accordent également à le prouver (*).

(*) Tout cela se voit aisément par la formule

$$Z'-Z=(P'-P)\frac{\sin P \sin \Delta \sin D}{\sin Z},$$

que nous avons trouvée dans la note précédente. Cette formule suppose que l'on part d'une première valeur de P et de Z pour passer à d'autres extrêmement voisines, P' et Z'. Elle fait connaître le changement $Z'-Z$ de la distance au zénith, lorsque l'on connaît la variation $P'-P$ de l'angle horaire, laquelle peut se conclure du temps écoulé entre les deux observations. Tant que les différences $Z'-Z$ et $P'-P$ pourront être supposées très-petites, ces différences seront sensiblement proportionnelles entre elles, et la moyenne arithmétique des distances zénithales correspondra à la moyenne arithmétique des angles horaires ou des époques des observations. Mais, par cela même, on conçoit que cette supposition est limitée et ne peut être admise que pour un temps très-court.

Veut-on juger, dans chaque cas, de son exactitude et de l'étendue que l'on peut lui donner sans craindre d'erreur sensible? Il n'y a qu'à partir d'une valeur donnée de Z et de P, par exemple, de la distance moyenne observée pendant une série, et de l'angle horaire moyen, que l'on peut en conclure, au moyen du triangle sphérique, par la formule rigoureuse

$$\cos P=\frac{\cos Z-\cos \Delta \cos D}{\sin \Delta \sin D}.$$

Puis on supposera dans l'angle horaire un changement égal à la moitié de l'intervalle d'une série, par exemple, à 5' de temps sexagésimal, si les séries sont de 10 minutes, ce qui, étant réduit en arc, fait un changement de 1° 15' sexagésimales sur P; alors, avec la nouvelle valeur $P'=P+1^\circ 15'$, on calculera la nouvelle distance Z' par la formule rigoureuse

$$\cos P'=\frac{\cos Z'-\cos \Delta \cos D}{\sin \Delta \sin D};$$

on aura donc ainsi Z', et par suite $Z'-Z$; on pourra donc comparer cette valeur à celle qui résulte de la formule approchée

$$Z'-Z=(P'-P)\frac{\sin P \sin \Delta \sin D}{\sin Z}.$$

Si elles s'accordent à très-peu près, de manière qu'il n'en résulte pour

334. Ayant ainsi la distance moyenne de l'astre au zénith et l'époque moyenne qui y correspond en temps de la pendule, on résoudra, avec cette distance, le triangle sphérique qui donne l'angle horaire. Cet angle, réduit en temps sidéral, donnera le nombre d'heures, minutes et secondes sidérales, comprises entre l'époque des observations et le passage de l'astre au méridien. Si dans ce calcul on a soin de compter les angles horaires à partir du méridien supérieur, et dans le sens du mouvement diurne, depuis zéro jusqu'à la circonférence entière, il suffira d'ajouter l'angle horaire calculé à l'ascension droite de l'astre réduite en temps, et la somme sera l'angle horaire du point ♈ de l'équateur ou *l'heure sidérale*, § 18. Il est entendu qu'avant d'employer la distance zénithale observée, pour calculer l'angle horaire, il faut la corriger de la réfraction. Quant à la distance polaire de l'astre, qui est aussi un des éléments de ce calcul, on la prend dans les catalogues astronomiques, par exemple, dans la *Connaissance des Temps*; mais comme ces catalogues ne donnent que la *position moyenne* de l'astre, on y fait les petites corrections relatives à la précession, à l'aberration et à la nutation, pour la convertir en *position apparente*.

335. Si l'astre observé est le soleil, l'angle horaire, ainsi observé et compté de midi ou de minuit, donnera l'heure solaire. Les astronomes français, se conformant à l'usage établi généralement dans la société, comptent ces heures à partir du méridien inférieur ou de minuit, et ils vont ainsi, sans interruption, de 0 à 24 heures sexagésimales, ou de 0 à 10 heures décimales, selon qu'ils em-

Comme le disque du soleil a un diamètre sensible, on ne peut pas, dans les observations consécutives, saisir son centre comme pour une étoile et le placer sous le fil. On élude la difficulté en mettant une fois le fil sur le bord supérieur et une fois sur le bord inférieur. Par ce moyen, une des distances est trop petite de tout le demi-diamètre du disque, mais la suivante est trop grande de la même quantité; et comme les observations au cercle répétiteur se font toujours en nombre pair, il s'ensuit qu'il s'opère toujours, dans chaque série, une exacte compensation. Le même artifice s'appliquerait si l'on observait une planète, ou même la lune. Il est presque inutile de rappeler que, pour observer le soleil, on place devant l'oculaire un verre noirci, et que, pour observer les autres astres de nuit, il faut éclairer les fils du micromètre, excepté pour la lune dont l'éclat suffit à cet effet.

336. Lorsqu'on observe des étoiles, il est souvent difficile et même impossible de les mettre exactement au centre des fils, comme on devrait le faire, pour que leurs images se trouvassent précisément dans l'axe optique de la lunette. La difficulté vient de ce que les fils se croisent à ce centre, ce qui accroît leur épaisseur, ou plus exactement la place que leur image occupe dans le champ de la lunette. Alors, quand on met l'étoile derrière le centre des fils, il arrive souvent qu'elle se trouve cachée tout entière, et que l'on ne pourrait pas répondre de la remettre toujours exactement au même point derrière les fils. On évite cet inconvénient en n'observant pas à la croisée même des fils, mais à une très-petite distance, sur le fil horizontal. Mais comme, malgré tout le soin de l'artiste, il est impossible que ce fil n'ait pas quelque petite inclinaison, on tâche d'éluder cet effet en observant toujours au même point du fil, ou au moins sur des points très-peu éloignés. Pour cela, si, dans la première observation, la lunette étant supposée à droite de l'observateur, on a mis l'étoile un peu à droite du centre des fils, ce qui la met réellement un peu trop près du limbe, puisque nos lunettes renversent, on la place ensuite un peu à gauche de ce centre dans la seconde observation, où la lunette est à gauche, ce qui la met réellement trop près du limbe, comme la première fois. Alors il se trouve qu'on a toujours rapporté l'astre au même point phy-

337. La méthode que nous venons d'exposer est
teurs absolues. Elle n'était pas praticable avec les a
de cercle, qui ne donnaient pas les distances au zéni
d'exactitude, à cause des erreurs de division dont ils
que toujours affectés. On recourait donc plus ordin
méthode des hauteurs correspondantes, que nous av
dans la page 346 du tome II. Maintenant celle des hau
est la plus exacte de toutes, grâce à l'invention du cer
qui permet de mesurer ces hauteurs avec la dernière
peut augmenter encore ses avantages en observant p
d'un même astre, et en les prenant de part et d'autre
ce qui évite toutes les erreurs d'ascension droite et
celles de la réfraction. Avec tous ces soins, j'ose a
cercle répétiteur offre le moyen le plus sûr de déterm
soit absolu, soit relatif, et je ne doute point qu'il
cet égard même sur la lunette méridienne.

Pour compléter ces notions, j'ai placé, dans le
exemples de calculs du temps absolu, par les hauteu
et du soleil. La pratique de ce procédé est indispe
détermination du temps est la base de tout calcul a
et les moyens de l'obtenir avec rigueur sont si faci
serait pas excusable de ne pas les employer dans le
cela devient nécessaire.

338. L'autre genre d'observations que l'on peut
cercle répétiteur, c'est la mesure de la hauteur

tance méridienne. Cependant elle ne lui est pas tout à fait égale, puisque celle-ci, dans les passages supérieurs, est la plus petite, et dans les inférieurs, la plus grande de celles que l'on peut observer. Mais, en marquant avec exactitude l'heure, la minute, la seconde et la fraction de seconde où chaque observation particulière a été faite, et connaissant d'ailleurs l'époque précise du passage de l'astre au méridien et sa distance polaire, on sait calculer la correction que chaque distance nécessite. Cette correction n'est plus simplement proportionnelle aux variations de l'angle horaire, comme dans les hauteurs observées loin du méridien. Elle est proportionnelle au carré du sinus de la moitié de l'angle horaire. Dans les passages supérieurs, elle est soustractive des distances au zénith, parce qu'alors la distance méridienne est la plus petite de toutes; dans les passages inférieurs, elle est additive par une raison contraire (*). Comme l'arc parcouru sur le limbe est égal à la

(*) On a vu, dans la note de la page 437, que les distances successives d'un astre au zénith, et les angles horaires qui y correspondent, sont liés entre eux par la relation suivante :

$$\sin \tfrac{1}{2}(Z'+Z) \sin \tfrac{1}{2}(Z'-Z) = \sin \Delta \sin D \sin \tfrac{1}{2}(P'+P) \sin \tfrac{1}{2}(P'-P).$$

Supposons que Z représente la distance méridienne, et Z′ une distance observée très-près du méridien, en sorte que Z′ − Z soit une très-petite quantité que nous nommerons δ, laquelle sera positive dans les passages supérieurs où Z′ surpasse Z, et négative dans les passages inférieurs où Z surpasse Z′. Supposons encore que l'on compte les angles horaires à partir du méridien où l'on observe le passage; l'angle horaire P, correspondant à la distance Z, sera nul, et l'angle horaire P′, correspondant à Z′, sera fort petit. En faisant ces substitutions dans la relation précédente, pour la rendre applicable aux distances méridiennes, elle deviendra

$$\sin (Z + \tfrac{1}{2}\delta) \sin \tfrac{1}{2}\delta = \sin \Delta \sin D \sin^2 \tfrac{1}{2} P',$$

ou, en développant le premier facteur,

$$\sin Z \sin \delta + 2 \cos Z \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta = 2 \sin \Delta \sin D \sin^2 \tfrac{1}{2} P'.$$

La valeur exacte de $\sin \delta$ peut s'exprimer en une série convergente, ordonnée suivant les puissances de $\sin^2 \frac{1}{2} P'$; mais on peut, sans aucun calcul, obtenir le premier terme de ce développement, qui suffit presque toujours. Car, en remarquant que $\sin \delta$ et $\sin \frac{1}{2}\delta$ sont des fractions très-petites, on voit que le carré de la dernière, ou $\sin^2 \frac{1}{2}\delta$, sera beaucoup plus petit que

un lieu tel que Paris, dont la latitude est exactement déterminée par une multitude de passages d'étoiles circompolaires. Toutefois, sans attendre l'exécution d'un pareil travail, on peut encore suppléer à la connaissance des distances polaires, quand on n'a pas besoin d'une latitude absolue, mais seulement de la différence de latitude aux deux extrémités de l'arc observé, comme cela arrive ordinairement dans les observations géodésiques, qui sont celles où l'on exige le plus de rigeur. Il suffit alors de répéter, à ces deux extrémités, les observations de distances zénithales des mêmes étoiles au nord et au sud du zénith. On fera pour chaque station la somme de ces distances opposées, afin d'avoir les mesures des mêmes arcs célestes. Si l'on y trouve une différence, on en prendra la moitié, et on l'ajoutera aux distances observées dans la station où la somme des distances a été la plus petite. Par ce moyen, on réduira le cercle à n'avoir que la même erreur dans les deux stations, et la différence des latitudes sera exacte. Mais la latitude absolue pourra être en erreur de toute la quantité correspondante à l'erreur absolue du cercle (*).

(*) Soit N la distance zénithale vraie d'une étoile située au nord du zénith dans la station la plus boréale. Soit S la distance zénithale vraie d'une étoile située au sud et observée de la même station. Nommons N', S' les quantités analogues pour la station la plus australe. Ce seraient là les quantités que l'on observerait si le cercle n'avait aucune erreur. Alors la différence des latitudes serait $N' - N$ ou $S - S'$; et l'arc céleste $A = N + S$, $A' = N' + S'$ serait le même dans les deux stations, de sorte que l'on trouverait $A = A'$. Il n'en sera plus de même si le cercle a eu l'erreur constante e dans la première station, et l'erreur e' dans la seconde. Car alors les distances zénithales observées seront $N + e$, $S + e$, $N' + e'$, $S' + e'$, et quand on les combinera pour trouver la différence des latitudes, on aura, par les étoiles boréales, $N' - N + e' - e$; par les étoiles australes $S - S' + e - e'$. Les erreurs affectent ces résultats en sens contraire, ainsi elles disparaîtront en les ajoutant; et leur demi-somme $\frac{N' - N + S - S'}{2}$ donnera la véritable différence des latitudes indépendamment des erreurs constantes de chaque station.

Mais veut-on évaluer la différence de ces erreurs, c'est-à-dire la quantité dont l'erreur constante du cercle a changé, en le transportant d'une station à l'autre. Rien n'est plus facile; car, en faisant dans chaque station la

idienne telle qu'on l'aurait observée immédiatement. Le com-
nent de cette distance est la hauteur méridienne.

39. Ce procédé semble impliquer un cercle vicieux. Car, pour
uler les corrections dont nous venons de parler, il faut déjà
naître la distance polaire de l'astre, sa distance méridienne Z et
listance D du pôle au zénith. Or, c'est ordinairement pour
ver une de ces choses que l'on fait les observations dont nous
ons ici. Mais on remarquera que la connaissance exacte de ces
nents n'est pas du tout nécessaire; il suffit de leur valeur, même
sièrement approchée. Car les erreurs que l'on y peut commet-
sont considérablement atténuées, parce que, dans l'expression
la réduction au méridien, elles se trouvent multipliées par le
é du sinus de la moitié de l'angle horaire, quantité qui est
ours une fraction extrêmement petite tant qu'on ne s'écarte pas
ucoup du méridien. De sorte que l'influence de ces erreurs sur
aleur de la réduction que nous nommerons δ devient tout à fait
nsible. C'est pourquoi, si l'astre observé est connu, il suffira
prendre sa distance polaire dans la *Connaissance des Temps* ou
s les cartes célestes. Et si, de plus, on connaît à peu près la
ude ou la distance D du pôle au zénith, on en conclura une
ur de Z, c'est-à-dire de la distance méridienne, suffisamment
rochée pour calculer la petite réduction δ. Mais si la latitude
t point connue, même approximativement, on n'a qu'à em-
yer d'abord pour Z la distance moyenne observée, sans autre
ection que celle de la réfraction; avec cette valeur et celle de
istance polaire Δ, qui est supposée connue, on calculera D ou
istance du pôle au zénith. Au moyen de ces valeurs approchées,
obtiendra celles de δ ou les corrections à faire aux observa-
s pour avoir sa vraie distance méridienne; et recommençant le
ul avec cette distance corrigée, on en tirera une valeur de D
exacte. Alors ces éléments seront connus avec assez de préci-
pour qu'on puisse les employer au calcul définitif de la réduc-
au méridien.

la vérité, nous empruntons encore ici des Tables la distance
aire de l'astre. Dans l'état actuel de l'astronomie, ces distances
t connues, pour les principales étoiles, avec une extrême pré-

cision. Mais si l'astre observé était inconnu, il faudrait a
supposer que l'on connaît la latitude du lieu où l'on obs
par conséquent, la distance du pôle au zénith. Alors, a
distance et la valeur observée de Z, on calculerait approxi
ment la valeur de Δ, ce qui suffirait pour avoir les correc
et par suite Z et Δ avec plus d'exactitude, au moyen d'u
calcul, comme dans le cas précédent.

Enfin, si l'on voulait que l'observateur tirât tout de ses
observations, il faudrait d'abord qu'il déterminât approxi
ment la latitude par les passages supérieurs et inférieurs d
circompolaires, ce qui n'exige point la connaissance de la
polaire; après quoi il s'occuperait des autres astres. Tel
marche d'invention que nous avons suivie dans l'arrange
précédents chapitres; mais, dans l'application, il faut pr
tout ce qui est déjà connu.

340. Nous avons supposé que les angles horaires co
dants à chaque observation sont donnés en temps par l'
Pour cela, il faudrait que l'horloge suivît exactement
sidéral, si c'est une étoile qu'on observe; le temps solair
le soleil; et, en général, que sa marche fût conforme à cell
tre observé. Il est presque impossible que cette cond
remplie à la rigueur, mais elle n'est pas indispensable; il s
le mouvement de l'horloge soit bien connu, et on le r
qu'il devrait être, au moyen du calcul. Si ce mouvemen
peu de la marche de l'astre, il n'en résulte qu'une petite c

re sensible, il faut mettre alternativement le fil en contact avec bord supérieur et son bord inférieur. Nous avons déjà indiqué e précaution dans l'article 338.

Iais, ce qu'il importe beaucoup plus de remarquer, si l'astre ervé avait un mouvement propre en déclinaison, il serait né-

---

s écoulées entre l'époque de l'observation et le passage de l'astre au mé-en; il est visible que cet angle horaire, converti en arc, n'aura pas pour ur $15T'$, comme cela devrait être si l'horloge et l'astre étaient d'accord. nt de faire cette conversion, le nombre T' devra être modifié dans le rapport a marche de l'horloge à celle de l'astre, c'est-à-dire dans le rapport de $-r$ à 24^h, et en multipliant le résultat par 15, la valeur de l'angle ho-a exprimée en arc deviendra $\frac{15\,T'\,24^h}{24^h - r}$, ou, en réduisant tout en se-Ies sexagésimales, $15T' + \frac{15T'r}{86400 - r}$. Telle serait donc la valeur P' qu'il faudrait employer dans le calcul de la correction δ; de sorte n faisant, pour plus de simplicité, $15T' = p'$ et $\frac{r}{86400 - r} = r'$, on au-

$$P' = p' + p'r'.$$

a, en substituant cette valeur dans l'expression de δ, on peut profiter e que r' est une quantité fort petite pour la simplifier beaucoup; en effet, l

$$\sin\tfrac{1}{2}P' = \sin\left(\tfrac{1}{2}p' + \tfrac{1}{2}p'r'\right) = \sin\tfrac{1}{2}p'\cos\tfrac{1}{2}p'r' + \cos\tfrac{1}{2}p'\sin\tfrac{1}{2}p'r'.$$

Elevant cette expression au carré, bornons-nous à la première puissance in $\frac{1}{2}p'r'$, et négligeons les autres comme exprimant des fractions trop tes, nous aurons

$$\sin^2\tfrac{1}{2}P' = \sin^2\tfrac{1}{2}p' + \frac{\sin p' \sin p'r'}{2}.$$

Second terme de cette valeur étant extrêmement petit à cause de la pe-ase des arcs p' et $p'r'$, on peut, sans erreur sensible, lui substituer $\sin^2\frac{1}{2}p'$; ce qui revient à mettre $2\sin\frac{1}{2}p'$ au lieu de $\sin p'$, et $2r'\sin\frac{1}{2}p'$ lieu de $\sin p'r'$. On obtient alors cette expression fort simple

$$\sin^2\tfrac{1}{2}P' = (1 + 2r')\sin^2\tfrac{1}{2}p',$$

qui donne

$$\delta = \frac{\sin\Delta\sin D(1 + 2r')}{\sin Z} \cdot \frac{2''\sin^2\frac{1}{2}p'}{\sin 1''}.$$

cet artifice, chaque correction, calculée d'après l'angle horaire vrai, se

cessaire d'y avoir égard ; car la distance méridienne qui se de
de chaque observation partielle au moyen des réductions p
dentes, est celle qui aurait réellement lieu si la déclinaison de l'
restait toujours la même qu'à l'époque de l'observation. Si
déclinaison varie, la distance réduite doit différer de la dist
méridienne véritable, et la différence doit être égale au cha
ment de la déclinaison, depuis l'époque de l'observation jus
celle du passage au méridien. C'est pourquoi, si l'on suppo
mouvement en déclinaison uniforme, pendant la durée de la s
il faudra calculer proportionnellement la correction de ch
distance réduite, en raison de l'angle horaire qui y corresp
Ces corrections seront évidemment de signe contraire avan
après le passage au méridien, en supposant, comme cela est le
ordinaire, que le changement de la déclinaison se continue
le même sens pendant toute la série; car alors, si ce changem
augmente les distances au zénith d'un côté du méridien, il les
minuera de l'autre côté. De là résulte cette règle fort sim
Faites séparément la somme des angles horaires observés avan
après le passage, ces angles étant exprimés en temps, par exem
en minutes. Retranchez ces deux sommes l'une de l'autre, div
leur différence par le nombre des observations, et multiplie
résultat par le mouvement de l'astre en déclinaison pour

---

trouve dans un rapport constant avec celle que l'on aurait en emple
dans le calcul l'angle horaire donné immédiatement par l'horloge. Il en
sulte seulement un terme de plus dans le facteur constant, commun à

inute de temps, mouvement qui est donné par les tables astro-
omiques. Le produit sera la correction qu'il faut appliquer à la
stance méridienne, calculée d'après l'ensemble de la série, comme
la distance polaire était constante.

341. Une seule série de ce genre, faite sur un astre dont on
nnaît la distance polaire méridienne, suffit pour déterminer la
titude du lieu où l'on observe ; car si l'astre passe au méridien
a côté de l'équateur, comme dans la *fig.* 84, en retranchant sa
stance méridienne ZS de sa distance polaire PS, on aura la dis-
nce PZ du pôle au zénith. Si, au contraire, l'astre passe au mé-
dien du côté du pôle, comme dans la *fig.* 85, on ajoutera, dans
s passages supérieurs, la distance polaire à la distance méridienne,
ans les passages inférieurs, on la retranchera. De toute manière,
n aura la distance du pôle au zénith, et par suite la latitude qui
n est le complément. Parmi les étoiles que l'on peut choisir pour
btenir ainsi la latitude, la polaire est la préférable, parce que c'est
elle pour laquelle les réductions au méridien sont les plus petites.
'ela tient à la petitesse de sa distance polaire (*). C'est elle aussi
ui a été la plus observée, surtout dans ces derniers temps ; par
onséquent, sa distance polaire est parfaitement connue. On peut
ncore employer avec sûreté β de la petite Ourse, qui a été aussi
eaucoup observée par MM. Méchain et Delambre.

342. Lorsque l'on veut déterminer une latitude avec une pré-
ision extrême, par exemple, pour la mesure d'une méridienne
u pour le tracé d'une grande carte, on tâche de se rendre indé-
pendant même de la distance polaire. Pour cela, on observe, au
cercle répétiteur, les deux passages supérieurs et inférieurs d'une
étoile circompolaire, par exemple de la polaire elle-même, ou de
β de la petite Ourse. On réduit ces observations au méridien avec
les valeurs de la distance polaire, les plus exactes que l'on peut
se procurer, et on tire de chacune d'elles une distance du pôle au

(*) Cela se voit de suite par l'expression de δ, qui contient, à son numérateur, le sinus de la distance polaire. Quant à l'étendue des angles horaires, il convient d'arrêter la série lorsqu'une erreur de 1″ en temps, sur P′, donnerait une erreur d'une seconde de degré sur la réduction δ.

C'est par ce procédé, uni aux soins de l'exac

(*) Soient Z' la moyenne des distances au zénith observées
supérieurs ; Z'' cette moyenne pour les passages inférieurs
tance du pôle au zénith, et Δ la distance polaire veritab
avec ces valeurs, que nous supposons exactes, on trouvera

Dans les passages supérieurs $D = Z' + \Delta$
Dans les passages inférieurs $D = Z'' - \Delta$

et ces deux valeurs de D s'accorderaient ensemble. Mais si,
emploie $\Delta + e$, e étant l'erreur de la distance polaire, on
sairement des valeurs de D, qui ne s'accorderont plus, et
D', D'', on aura

Dans les passages supérieurs $D' = Z' + \Delta + e$
Dans les passages inférieurs $D'' = Z'' - \Delta - e$

ou, en mettant pour $Z' + \Delta$ et $Z'' - \Delta$, leur valeur comm

$$D' = D + e, \quad D'' = D - e,$$

d'où l'on tire, par addition et soustraction,

$$D = \frac{D' + D''}{2} \qquad e = \frac{D' - D''}{2}.$$

Ainsi, quoique l'on ait opéré avec une distance polaire in
somme des distances zénithales obtenues par l'observatio
sages donne la vraie distance du pôle au zénith, et leur
fait connaître l'erreur de la distance polaire. L'erreur e infl
sur le coefficient constant qui entre dans l'expression de
méridien, mais cette influence est considérablement affaib
tion $\sin^2 \frac{1}{2} p'$, ainsi que nous l'avons déjà remarqué. Au res
gnait qu'elle ne fût sensible, on n'aurait qu'à calculer d
réductions au méridien avec les distances D, corrigées

zénith apparent autour duquel le limbe tourne. Or, c'est à ce zénith apparent que l'on rapporte, sur le limbe, toutes les distances observées. Car le point du limbe qui reste fixe dans le retournement, est le point A′, situé sur la direction de l'axe de rotation de l'instrument, au lieu que ce devrait être le point A, situé sur le prolongement de la verticale. L'erreur de chaque distance est donc égale à ZCZ′, c'est-à-dire à l'inclinaison de l'axe sur la verticale. Elle diminue les distances au zénith, lorsque le sommet de l'axe penche vers l'astre, comme dans la *fig.* 103; au contraire, elle augmente ces distances quand le sommet de l'axe s'éloigne de

---

sement, l'angle I′ qu'elles déterminent n'est pas nécessaire aux observations. Considérons donc les deux premières. Il est visible que N et S′ sont les coordonnées d'une même extrémité physique de la bulle, avant et après le retournement; car si cette extrémité était nord dans la première observation, elle est sud dans la seconde. Il en est de même de N′ et S: ce sont les coordonnées de l'autre bout de la bulle. De là résulte la règle suivante: observez, sur la division du tube, les deux nombres auxquels répond une même extrémité physique de la bulle dans les deux observations consécutives. La demi-différence de ces nombres exprimera l'inclinaison de l'axe, vers le bout que vous avez considéré comme négatif, c'est-à-dire, vers le nord si ce bout était dirigé au nord du zénith dans la première observation; vers le sud s'il était dirigé au sud.

Cette règle peut encore être exprimée d'une manière plus simple en la rapportant aux positions que prend successivement le niveau, relativement à l'observateur chargé de lire ses divisions. Je suppose que, dans la première observation, le bout *sud* de la bulle soit à gauche de l'observateur qui lit le

344. Veut-on maintenant l'angle quadruple ? laissez les lunettes fixes, et faisant tourner le limbe, ramenez par ce mouvement la supérieure sur l'objet à droite S′ ; puis détachez l'inférieure et ramenez-la sur l'objet à gauche S″, *fig.* 89. Alors les circonstances redeviennent absolument les mêmes que dans la première observation : seulement le point de départ de la lunette supérieure sur le limbe n'est plus A, mais A″, c'est-à-dire, l'extrémité de l'arc double parcouru dans le premier couple d'observations. Ainsi, en recommençant à opérer de la même manière, on ajoutera un nouvel arc double au premier, et, en multipliant les observations, on aura tel multiple de l'angle que l'on voudra. Quand on croira avoir atteint, par la répétition, une exactitude suffisante, on lira les verniers, et, en divisant l'arc total par le nombre des observations, on aura l'arc simple. Ce procédé possède évidemment tous les avantages que nous avons remarqués dans la répétition, pour les angles verticaux.

345. Voyons maintenant les précautions et les vérifications qu'il exige. La première est de rendre les axes optiques des deux lunettes parallèles au plan du limbe : rien n'est plus facile. On a vu comment il faut opérer pour la lunette supérieure; quand celle-ci est réglée, on la dirige sur un objet éloigné, et on amène l'axe optique de l'autre sur le même point. Ces axes optiques sont alors parallèles entre eux ; ils sont donc tous deux parallèles au plan du limbe puisque l'un d'eux a été préalablement amené dans cette situation.

346. Nous avons tacitement supposé que la direction de ces

dont les lunettes sont excentriques. Cette excentricité doit produire un effet analogue à l'erreur de collimation dans le mural : examinons-en l'influence.

Supposons d'abord que l'axe optique de la lunette supérieure passe toujours par le centre du limbe, en sorte que l'inférieure seule soit excentrique. Ce cas est celui qui se présente le plus fréquemment. Tout ce que nous avons à considérer, c'est l'étendue de l'arc AA'A", parcouru par la lunette supérieure sur le limbe, *fig.* 88. Or cet arc est composé de deux parties : l'une A'A" est toujours l'arc compris entre les deux objets ; l'excentricité de la lunette inférieure n'y a aucune influence, puisqu'il est intercepté entre deux positions de la lunette supérieure, qui n'est point excentrique. L'autre portion AA' est la quantité dont la lunette supérieure, d'abord dirigée sur S', a été repoussée à droite par la rotation du limbe. L'arc AA' est donc égal à l'arc décrit par la lunette inférieure pour aller de l'un à l'autre objet : or, si cette lunette est excentrique, le recul peut fort bien n'être pas égal à A"A'. Car soit, *fig.* 90, CE l'excentricité, qui ne variera pas, puisque la distance de la lunette et de son axe optique au centre du limbe est constante. Dans la première observation, lorsque la lunette inférieure est dirigée sur l'objet à gauche, la direction de l'axe optique sera ES". Dans la seconde position, lorsqu'elle passe sur l'objet à droite, la direction de l'axe optique deviendra E'S'. L'angle décrit par cet axe en passant de l'un à l'autre objet, est donc égal à S"C'S', ou à l'angle au centre ECE', puisque l'excentricité CE, CE', est supposée perpendiculaire à la direction de l'axe optique. Cet angle ECE', ou S'C'S", exprime donc aussi le recul de la lunette supérieure, qui a fait le même mouvement. Désignons par A l'angle cherché, c'est-à-dire S"CS' ; et nommons S', S" les angles en S' et en S", qui sont réellement les deux parallaxes (*) sous lesquelles

(*) On obtient aisément ces parallaxes quand on connaît l'excentricité du cercle et la distance de l'objet ; car, en nommant e l'excentricité, G et D les distances, S', S" les deux angles en S' et en S", on a évidemment

$$\sin S'' = \frac{e}{G}, \qquad \sin S' = \frac{e}{D};$$

ou, en réduisant les sinus en secondes, à cause de la petitesse des angles

un observateur placé à l'un ou l'autre de ces points, verrait l'excentricité. Cela posé, on aura évidemment $S''C'S' = S''BS' - S'$, puisque l'angle $S''BS'$ est extérieur au triangle $BC'S'$. On aura de même $S''BS' = A + S''$, et, par conséquent, $S''C'S' = A + S'' - S'$; c'est-à-dire, que l'angle décrit par le recul de la lunette supérieure est égal à l'angle des deux objets, plus la différence des parallaxes. L'arc total décrit par cette lunette sur le limbe, dans son retour vers l'objet à gauche, est donc égal à l'angle précédent plus A, ou à $2A + S'' - S'$; et sa moitié $A + \frac{S'' - S'}{2}$, représente l'arc simple lu sur le limbe. La quantité $\frac{S'' - S'}{2}$ exprime donc ce qu'il faut retrancher de cet arc, pour avoir l'angle A compris entre les deux objets; ou ce qui revient au même, il faut à l'arc mesuré par les verniers, ajouter la correction $\frac{S' - S''}{2}$, c'est-à-dire la moitié de la parallaxe de l'objet à droite, moins la moitié de la parallaxe de l'objet à gauche. Nous avons supposé l'excentricité à gauche de la lunette inférieure, l'observateur étant placé à l'oculaire; ce serait le contraire, si elle était à droite. Il faudrait alors ajouter la moitié de la parallaxe de l'objet à gauche, moins la moitié de la parallaxe de l'objet à droite. Il y a des cercles où les deux lunettes sont excentriques, mais ce cas est fort rare : l'on peut voir aisément qu'alors la correction définitive est la différence de celles qu'exige chaque excentricité. Au reste, comme l'excentricité des lunettes et

le limbe du cercle lui-même sont toujours fort petits par rapport à la distance des objets dont on mesure l'angle, il en résulte que les parallaxes S′ et S″ sont toujours extrêmement petites, et peuvent, le plus souvent, être négligées (*).

347. Il arrive souvent qu'ayant à observer d'un point C, *fig.* 91, un angle S′CS″, compris entre deux objets éloignés, on ne peut pas se placer précisément au centre C de la station, mais dans quelque autre point, tel que C′ situé à une petite distance du premier. Alors l'angle S″C′S′, observé de ce point, n'est pas le même que celui qu'on verrait du point C, et il faut y faire une petite correction pour l'y ramener; c'est ce que l'on nomme *la réduction au centre*.

Ceci est encore une affaire de parallaxe. Soient C l'angle demandé, C′ l'angle observé, S′, S″ les parallaxes des deux objets, c'est-à-dire les angles sous lesquels ils voient la ligne CC′ qui joint les deux centres. On aura, comme tout à l'heure, $C' = S''BS' - S'$, parce que l'angle S″BS′ est extérieur au triangle C′BS′. On aura, par une raison semblable, $S''BS' = C + S''$; par conséquent, $C' = C + S'' - S'$, et enfin $C = C' + S' - S''$. D'où l'on voit que, pour avoir l'angle cherché C, il faut ajouter à l'angle observé la parallaxe de l'objet à droite, et en retrancher la parallaxe de l'objet à gauche. Ces parallaxes sont faciles à évaluer quand on connaît la distance des objets, la distance des centres et les angles observés du point C′ (**).

(*) Borda a remarqué que l'effet de l'excentricité est nul sur la somme des trois angles d'un triangle. En effet, soient A, B, C les trois angles, en allant de droite à gauche, et AB, BC, AC les trois côtés; les corrections dues à l'excentricité seront

$$\text{à l'angle A} \ldots \frac{1''.e}{2\,AC \sin 1''} - \frac{1''.e}{2\,AB \sin 1''},$$

$$\text{à l'angle B} \ldots \frac{1''.e}{2\,AB \sin 1''} - \frac{1''.e}{2\,BC \sin 1''},$$

$$\text{à l'angle C} \ldots \frac{1''.e}{2\,BC \sin 1''} - \frac{1''.e}{2\,AC \sin 1''},$$

dont la somme est égale à zéro.

(**) Soit toujours l'angle observé S″C′S′=C′; supposons que l'on observe aussi l'angle S″C′C et nommons-le y. Appelons G la distance CS″ de

348. Quand on a observé les angles de position formés entre les objets et dans leur plan, il faut les réduire à l'horizon. Pour cela, on redresse le limbe, on le remet vertical, et on mesure les distances des deux objets au zénith; avec ces distances et l'angle observé, on peut trouver la réduction à l'horizon, comme nous l'avons enseigné dans les pages 93 et suivantes.

349. Enfin, le cercle répétiteur peut encore servir, et sert en effet, à trouver l'arc de distance de deux astres, ou la distance angulaire d'un astre à un objet fixe. Le procédé est absolument le même que pour mesurer les angles de position des objets terrestres dans des plans inclinés. Seulement si l'un des objets, ou tous les deux, sont mobiles, il faut que les observateurs fassent continuellement varier l'inclinaison du plan du limbe, de manière à lui faire suivre toujours les deux objets. Chaque fois que la lunette est pointée sur l'astre, on note exactement l'heure, la minute, la seconde et la fraction de seconde, comme dans les autres observations célestes. En bornant les séries à un petit nombre de minutes, on peut regarder la distance moyenne comme correspondante à l'époque moyenne des observations; car nous avons vu qu'à de grandes

---

l'objet à gauche au centre de la station; et D la distance CS′ de l'objet à droite; enfin nommons δ la distance CC′ des deux centres. Les triangles S′C′C, S″C′C donneront

$$\sin S' = \frac{\delta \sin (C' + \gamma)}{D}, \qquad \sin S'' = \frac{\delta \sin \gamma}{G};$$

istances du méridien, le mouvement de l'astre est sensiblement niforme dans un petit intervalle de temps.

380. Cette opération, qui exige beaucoup d'habileté et d'exactude, sert à trouver les azimuts des objets terrestres, par temple ceux des signaux pour orienter une méridienne ou une arte. La distance du signal au zénith étant constante, peut être cilement observée : celle de l'astre peut se calculer d'après le mps de l'observation. Avec ces données et l'arc de distance, on rme un triangle sphérique où les trois côtés sont connus. On eut donc aisément trouver l'angle opposé à l'arc de distance; 'est la différence des azimuts. On connaît d'ailleurs l'azimut de astre, d'après le temps de l'observation, et d'après l'heure de on passage au méridien. On connaîtra donc l'azimut absolu de 'objet. Il faut remarquer que, dans le calcul, on doit employer les istances apparentes au zénith, affectées de la réfraction, puisque 'arc observé est pris entre ces distances apparentes. Il est clair que azimut absolu, et les différences d'azimut restent les mêmes algré le changement des hauteurs, puisque la réfraction élève s arcs dans les verticaux où ils se trouvent. On fait commodément ces observations sur le soleil. Généralement l'instant le plus vorable est celui où l'angle horaire de l'astre est égal à 100^{g}, ce ui répond à six heures sexagésimales avant ou après le passage méridien. Alors, en effet, l'astre est parvenu à son plus grand art de ce plan. Il cesse de s'en éloigner pour y revenir ensuite en crivant l'autre portion de son cercle diurne, ce qui fait que, ns les observations voisines de cette époque, l'azimut varie fort u. D'un autre côté, il faut éviter d'observer trop près de orizon, lorsque l'astre entre dans des couches où l'on peut indre des réfractions extraordinaires. Car alors sa distance au ith, qu'il faut calculer d'après l'observation du temps, pourrait e fort inexacte. On évite cet inconvénient en employant la Pore, au lieu du soleil. Alors il faut avoir un signal de feu qui isse être aperçu la nuit afin de pouvoir observer sa distance anlaire à l'étoile. Pour cet objet rien n'est plus avantageux que les mpes à courant d'air munies de réflecteurs. On prend ensuite à isir l'angle que ce signal forme avec l'objet terrestre dont on veut

six heures. Cette méthode a été employée avec su
terre, et depuis par Méchain en Espagne.

Comme cette opération peut être fréquemment u
développer le petit calcul qu'elle suppose. Nous
abstraction de la réfraction; nous verrons ensui
peut y avoir égard.

Soient, *fig.* 92, O l'observateur, Z le zénith, P le
parallèle que l'étoile décrit; soit R le signal de fe
avoir l'azimut, représenté par l'angle RZP. Pour ce
dit qu'il suffit de trouver la distance RP du sig
effet, les arcs ZP, ZR, distances du pôle et du si
sont donnés par l'observation. Si de plus on parv
l'arc RP, alors dans le triangle sphérique RPZ, o
trois côtés; on pourra donc aisément calculer l'
l'azimut du signal.

Pour trouver RP, il suffirait de connaître l'in
passe au point S; car alors on mesurerait RS avec l
ajouterait SP, distance polaire de l'étoile, et l'on au
pas même indispensablement nécessaire de connaît
passage en S avec la dernière précision; car l'arc
pendiculaire en S à l'arc que l'étoile décrit, les varia
gueur, de part et d'autre de ce point, sont nécessai
tites. Or, l'époque approchée du passage peut se t
des manières. Par exemple, comme on est supposé co
on sait à quel instant l'étoile passe au méridien de

Passage de l'étoile polaire au méridien supérieur.

$0^h 24^m 44^s$.	ANGLE HORAIRE.	RÉDUCTION.
h m s 23.57. 2	m s 27.42	1504″,7
58.18	26.26	1370,4
59. 6	25.38	1288,8
59.47	24.57	1221,0
0. 0.27	24.17	1156,8
1. 5	23.39	1097,2
1.46	22.58	1034,8
9.26	15.18	459,5
10.10	14.34	416,6
18.57	5.47	65,7
22.23	2.21	10,8
22.59	1.45	6,0
23.43	1. 1	2,0
29.19	4.35	41,2
41.59	17.15	583,9
45.54	21.10	879,0
46.36	21.52	938,1
47.12	22.28	990,3
47.52	23. 8	1040,8

Examinons maintenant les modifications que la réfraction introduit dans ces résultats. Sans elle, les positions successives de l'étoile S′, S, S″ formeraient un arc de cercle dont le pôle vrai serait le centre. L'effet de la réfraction élève l'étoile d'une quantité dépendante de sa hauteur sur l'horizon, et qui, par conséquent, varie à chaque instant, à mesure que la hauteur de l'étoile varie. L'orbite apparente S′S S″ n'est donc plus circulaire; mais comme l'élévation produite par la réfraction est fort petite, la forme de l'orbite est aussi très-peu altérée. Si l'on n'en considère qu'une portion très-peu étendue, comme cela a lieu dans nos observations de distance, l'effet de la réfraction, étant à peu près constant dans cet intervalle, ne fait qu'élever cette portion de l'orbite sans la déformer sensiblement, et le petit arc sur lequel on opère peut encore

---

en S. D'après ces données, on aura la plus courte distance $RS = R - \Delta$. Ainsi la correction δ qu'il faut faire aux distances observées hors de ce méridien aura pour valeur

$$\delta = \frac{\sin R \sin \Delta}{\sin (R - \Delta)} \frac{2'' \sin^2 \frac{1}{2} p}{\sin 1''}.$$

On calculera les valeurs du facteur variable $\frac{2'' \sin^2 \frac{1}{2} p}{\sin 1''}$ pour les instants des observations; on fera la somme de toutes ces valeurs, on la multipliera par le facteur constant $\frac{\sin R \sin \Delta}{\sin (R - \Delta)}$, et en divisant le produit par le nombre des arcs observés, on aura la correction δ, qu'il faut toujours retrancher de la distance moyenne mesurée sur le limbe. On aura donc ainsi RS,

être considéré comme circulaire : mais le centre de cet arc n'est plus le pôle vrai, comme dans le cas où l'on supposait la réfraction nulle ; c'est le pôle vrai, élevé par la réfraction autant que l'étoile l'est réellement. Ainsi, pour avoir égard à l'effet de la réfraction dans les observations d'azimut, il suffit de substituer ce pôle fictif au pôle vrai dans les formules, qui d'ailleurs restent les mêmes qu'auparavant (*).

(*) Pour mettre ceci en évidence, considérons d'abord une position quelconque S' de l'étoile sur son cercle, abstraction faite de la réfraction. Soient alors Z la distance vraie de l'astre au zénith ; D la distance du zénith au pôle vrai ; Δ la distance polaire vraie de l'étoile, et A l'azimut du vertical dans lequel elle se trouve, azimut représenté par l'angle PZS', *fig.* 93 ; on aura évidemment, dans le triangle sphérique PZS',

$$\cos \Delta = \sin D \sin Z \cos A + \cos D \cos Z ;$$

ou, ce qui revient au même,

$$\cos \Delta = \cos (Z - D) - 2 \sin D \sin Z \sin^2 \tfrac{1}{2} A.$$

Supposons que, par l'effet de la réfraction, la distance zénithale Z de l'étoile devienne $Z' = Z - r$; la réfraction r variera si peu dans l'étendue de l'arc observé, qu'on pourra la regarder comme constante, car son changement total, dans tout le cercle décrit par l'étoile, depuis le passage inférieur au méridien, jusqu'au passage supérieur, va rarement à 10″. Élevons le pôle de la même quantité, en sorte que sa distance au zénith devienne $D' = D - r$, et rapportons les positions apparentes de l'étoile à ce point considéré comme fixe. En nommant Δ' sa distance apparente à l'étoile, nous aurons pareillement

$$\cos \Delta' = \cos (Z' - D') - 2 \sin D' \sin Z' \sin^2 \tfrac{1}{2} A ;$$

maintenant, la nature du mouvement vrai de l'étoile est telle que Δ reste constante ; il s'agit de faire voir que, pendant un court intervalle de temps, Δ' peut être regardée comme constante aussi. Pour cela, je retranche les deux valeurs de cos Δ et cos Δ' l'une et l'autre, en observant que, par nos suppositions, $Z' - D' = Z - D$, et l'on a ainsi

$$\cos \Delta' - \cos \Delta = 2 (\sin D \sin Z - \sin D' \sin Z') \sin^2 \tfrac{1}{2} A,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\cos \Delta' - \cos \Delta = 2 [(\sin Z - \sin Z') \sin D + (\sin D - \sin D') \sin Z'] \sin^2 \tfrac{1}{2} A ;$$

au lieu des différences de sinus et de cosinus, mettons leurs valeurs en

A défaut de cercle répétiteur, les observations d'azimut se faire avec beaucoup de promptitude et même avec une presque toujours suffisante, par le moyen du sextant de (décrit précédemment dans le § 271), instrument qui est mains de tous les marins, et qui doit être entre les mains les voyageurs.

---

t onctions de la différence des arcs, il viendra

$$\sin \tfrac{1}{2}(\Delta + \Delta') \sin \tfrac{1}{2}(\Delta - \Delta')$$
$$= 2 \sin \tfrac{1}{2} r \left[\cos \tfrac{1}{2}(Z + Z') \sin D + \cos \tfrac{1}{2}(D + D') \sin Z' \right] \sin^2 \tfrac{1}{2}$$

Tous les termes du second membre se trouvant multipliés par si très-petits de l'ordre de la réfraction. La différence $\Delta - \Delta'$, des tances, est donc aussi très-petite du même ordre. En se bornant mière puissance, on peut substituer le rapport des petits arcs $\frac{1}{2}(\Delta$ $\frac{1}{2} r$ à celui de leurs sinus, on peut, de plus, supposer $\Delta = \Delta'$, $Z = Z$ dans tous les autres termes de l'équation; on aura alors

$$\Delta - \Delta' = 2r \frac{\sin (D + Z)}{\sin \Delta} \sin^2 \tfrac{1}{2} A :$$

si la différence $\Delta - \Delta'$ restait constante, comme Δ ne varie point, constante aussi; examinons donc, d'après cette formule, à quoi s' variabilité de $\Delta - \Delta'$.

Or, on voit tout de suite que cette variation ne peut être que for et même tout à fait négligeable, quand l'arc qui comprend les obse est très-petit. Car l'expression de $\Delta - \Delta'$ ayant pour facteur $\sin^2$ l'azimut A dans lequel on peut observer la Polaire, étant touj petit, du moins dans nos climats, la valeur de $\Delta - \Delta'$ est toujour mement petite. A Paris, par exemple, elle ne s'élèverait tout au p deux secondes, en supposant la réfraction d'une minute, et l'angl

551. Quoique le cercle répétiteur jouisse de tous les avantages le nous venons de lui reconnaître, je ne dois pas cependant dis-nuler que quelques défauts d'exécution de la part de l'artiste urraient détruire toute son exactitude, et cela est d'autant plus portant à considérer, que les défauts dont il s'agit sont très-aisés econnaître; qu'il est très-facile, lorsqu'on en est prévenu, d'é-er leur influence; et qu'enfin, faute de ces précautions, on xpose à des erreurs graves, dont rien ne peut vous avertir.

D'après ce que nous avons dit au commencement de ce chapitre, la construction du cercle répétiteur, il est évident que les seuls auts qu'on ait à y redouter sont ceux qui peuvent attaquer le ncipe de la répétition, en produisant sur chaque observation

---

ourent au zénith. Car l'orbite de l'étoile étant toujours comprise entre mêmes verticaux extrêmes, il faut nécessairement, si elle s'élève, que rayon diminue, et diminue d'une quantité dépendante de l'azimut A, mesure l'écart de ces verticaux. On voit donc que ces formules, fondées la petitesse de l'angle A, cesseraient d'être exactes si le pôle vrai était élevé sur l'horizon pour que l'azimut A cessât d'être un très-petit an-mais cela ne saurait arriver que dans des contrées trop voisines du pour que l'on puisse jamais avoir occasion d'y observer.

résumant ce qui précède, on voit que, pour avoir égard à l'effet de la ction dans les observations d'azimut, il suffit de rapporter tous les cal-au pôle fictif, dont la distance au zénith est $D' = D - r$, r étant la ré-ion à la hauteur moyenne où l'on observe l'étoile; en conséquence, il employer, pour distance polaire de l'étoile, la valeur de Δ', que nous ns de calculer.

ec ces valeurs, on déterminera l'instant approché du passage de l'é-au point S, *fig.* 92, d'après les méthodes d'essai que nous avons indi-; ensuite on observera, par la répétition, les distances apparentes RS signal à l'étoile. On calculera les réductions δ, en employant les va-apparentes R' Δ' et D', ce qui donne

$$\delta' = \frac{\sin R' \sin \Delta'}{\sin (R' - \Delta')} \frac{2'' \sin^2 \frac{1}{2} p'}{\sin 1''}.$$

angles horaires p' doivent être comptés depuis le passage de l'étoile au t S situé sur le grand cercle qui joint le signal au pôle fictif. La distance tête RS étant ainsi trouvée, on aura $R' = RS + \Delta'$; ce sera la distance du al au pôle fictif; enfin, avec les valeurs apparentes R', D', et la distance du signal au zénith, on calculera l'azimut du signal P'ZR qui sera l'azi-véritable.

une erreur constante. En effet, une pareille erreur s'acc
avec le nombre des observations, et n'étant pas suscep
compensation, puisque nous supposons toujours à l'ins
une forme invariable, se retrouverait nécessairement tou
dans la distance moyenne au zénith, qui, sous ce rapp
serait pas plus exacte qu'une observation unique.

352. De ce genre sont les erreurs dues à l'inclinaison
optique et au défaut de verticalité du plan du limbe. Nou
donné les moyens de les mesurer et de les détruire, ou de
ténuer assez pour que leur influence devienne absolument
sible. Mais il y a encore dans les cercles d'autres causes p
d'erreurs pareillement constantes, auxquelles on n'a pas pr
jusqu'à présent. La première est l'erreur du centrage. El
si la lunette supérieure, en tournant autour du centre du
peut jouer autour de l'axe qui la porte. Pour concevoir
qui en résulterait sur les distances au zénith, partons de
mière position de la lunette au commencement des obser
laquelle est représentée par OCA, *fig.* 94. Alors l'anne
percé au centre de l'alidade qui porte la lunette, est desce
son poids sur l'axe CM, autour duquel la lunette tourne;
neau touche l'axe en M, à son point le plus élevé. Les cho
tent ainsi dans la seconde position de la lunette après le re
ment du cercle, pour passer à l'observation paire, *fig.* 9
Seulement le point de contact de l'anneau est passé de M e
la partie opposée de sa circonférence. Par conséquent l'ar
parcouru par l'alidade sur le limbe, *fig.* 96, est plus gr

moi, dix-sept ans auparavant. Ils nous cédèrent aussi volontiers leur humble demeure, un peu étonnés que nous eussions eu besoin d'y revenir; et grâce à l'activité de notre commandant, ainsi qu'à la bonne volonté de tout l'équipage, dès le lendemain nous étions installés chez eux. On commença aussitôt les observations de la mesure du temps; puis, dès que les horloges furent réglées, on entreprit les mesures du pendule et de la latitude, qui se continuèrent sans interruption pendant tout le mois de juin 1825. Un des officiers de la goëlette, M. Denans, aujourd'hui capitaine de corvette, vint partager notre solitude, et nous prêter son assistance, qui nous fut très-utile. Une escouade de matelots, dont faisaient partie le charpentier et l'armurier de la goëlette, resta près de nous sous une tente, non comme protection, ce qui eût été tout à fait inutile, mais pour nous aider dans nos manœuvres, et pour effectuer les réparations que notre observatoire nomade pouvait exiger. Les résultats, donnés par les expériences du pendule, ont été exposés dans le tome VIII des *Mémoires de l'Académie*, conjointement avec ceux qui avaient été obtenus dans les autres stations, soit du parallèle, soit du méridien prolongé jusqu'aux îles Shetland. Les nouvelles observations faites pour déterminer la latitude extrême de notre arc méridien sont donc les seules dont ils me reste à parler.

Le point central de notre ancienne station, celui au-dessus duquel le cercle répétiteur avait été érigé, était marqué par une croix de fer, consacrée par l'évêque d'Ivice, et qui était restée intacte

aussi précises qu'on pouvait espérer de les obtenir par une application plus prolongée de l'instrument, dans les mêmes circonstances atmosphériques. Je m'astreignis donc à ne pas étendre les séries partielles beaucoup au delà de ce nombre de couples, en profitant de leur brièveté, pour les réitérer davantage sur des étoiles différentes, dans des circonstances diverses, tant de nuit que de jour, de manière qu'elles se trouvassent chaque fois en correspondance des deux côtés du zénith. Pour les observations de jour, je calculais d'avance les positions azimutales du limbe, et les directions zénithales de la lunette qui correspondaient aux diverses époques auxquelles j'espérais saisir l'étoile; et la lunette était si perçante que j'ai pu ainsi observer Rigel et Sirius au méridien, le 1er juillet, lorsque le second de ces astres précédait à peine le soleil à midi. Je n'avais tenté cette épreuve insolite que pour constater la puissance de l'instrument, et pour connaître les amplitudes extrêmes d'erreurs que l'on pouvait avoir à craindre en se plaçant dans les circonstances d'observation les plus défavorables : car, à ces heures du jour, le thermomètre s'élevait, dans notre cabane, jusqu'à 30° ou même 32° centigrades. Et, quoique l'on prît toutes sortes de soins pour faire communiquer aussi librement que possible l'air intérieur avec celui du dehors, les étoiles observées alors étaient agitées et voltigeantes comme une fumée; aussi ne pus-je obtenir, pour chacune d'elles, qu'un seul couple d'observations, ou deux au plus, dans quatre essais ainsi tentés. C'est pourquoi je ne les ai pas fait concourir à la détermination de la latitude; mais je les ai cependant calculées et rapportées avec les autres pour le but que j'ai tout à l'heure indiqué. Car, lorsque l'on compare ces courtes séries entre elles, pour une même étoile, leurs écarts ne sont pas tels qu'on dût les exclure dans des observations ordinaires, puisqu'ils atteignent à peine 2″ autour de leur moyenne; et je ne me crois en droit de les rejeter que parce que toutes les séries faites dans des circonstances moins exceptionnelles, n'ont offert que des écarts beaucoup moindres, par l'effet de précautions que j'expliquerai dans un moment. Le nombre total de séries obtenues, tant de nuit que de jour, permet d'ailleurs ce choix; car elles s'élèvent à 86 comprenant 1094 observations, dont je néglige seulement

14 de ce genre. Les déclinaisons des étoiles circompolaires offrant aujourd'hui peu d'incertitude, on n'en a observé que trois, savoir: la Polaire inférieure de jour, avec β et γ de la petite Ourse supérieures de nuit. Mais, les déclinaisons au sud du zénith étant moins certaines, on a fait concourir de ce côté à la détermination de la latitude huit étoiles différentes, savoir : δ, η et ζ d'Ophiuchus, α de la Vierge, β' du Scorpion, θ du Centaure, Antarès, et α du Verseau, les unes observées de nuit, les autres de jour. Pour celles-ci, on les prenait toujours à de grands intervalles avant ou après midi, de manière que le soleil ne frappât point le cercle, et qu'il se fût établi préalablement une libre circulation entre l'air intérieur de la cabane et l'air du dehors.

La pratique habituelle du cercle répétiteur est sujette à deux genres d'erreurs, à la vérité très-petites, que l'on tâche toujours soigneusement d'éviter, et dont l'effet accidentel est de nature à s'entre-détruire dans un grand nombre d'observations faites des deux côtés du zénith. Mais je suis parvenu à les rendre tout à fait nulles individuellement; et il en est résulté, entre les séries relatives aux mêmes étoiles, une concordance telle qu'on ne l'obtient pas, je crois, plus parfaite, en opérant avec des instruments fixes d'une grande dimension ; car l'écart de ces séries autour de leur moyenne atteint très-rarement $1''$.

La première de ces causes d'erreur, et la plus facile à éluder, provient du défaut d'horizontalité du fil transversal sur lequel on amène l'étoile dans les deux observations consécutives qui com-

356. Il me paraît évident que les causes d'erreur dont je viens de parler ont produit les petits écarts que l'on remarque quelquefois, entre les latitudes absolues observées au même point, avec différents cercles, ou par différents observateurs, dont les résultats particuliers s'accordent entre eux. Les observations correspondantes au nord et au sud, auraient corrigé l'effet de ces différences, si l'on y eût songé plus tôt; il semble désormais indispensable de les employer dans des observations où l'on veut atteindre la dernière exactitude.

357. Pour compléter ce chapitre, je crois utile d'expliquer avec exactitude la théorie des niveaux à bulle d'air (*), instruments dont l'application est extrêmement fréquente dans l'astronomie et dans la physique, mais sur lesquels on n'a pas généralement des idées très-précises. On appelle communément niveau à bulle d'air, un tube de verre fermé par les deux bouts, et rempli en partie d'un liquide, tel que l'eau, l'alcool ou l'éther. L'espace qui n'est point rempli par la liqueur, est occupé par l'air, ou au moins par la

---

somme de distances zénithales pour obtenir l'arc céleste, on aura

dans la première $A = N + S + 2e$,

dans la seconde $A' = N' + S' + 2e'$;

et comme $N' - N$ est égal à $S - S'$, si l'on retranche ces deux équations l'une de l'autre, on trouvera

$$A - A' = 2e - 2e', \quad \text{par conséquent} \quad e - e' = \frac{A - A'}{2};$$

On pourra donc le rendre horizontal en tournant peu à peu le réticule jusqu'à ce que les caractères de symétrie soient réalisés. Alors, si l'on place le point de mire sur une des extrémités du fil, située à l'un des bords du champ, il devra se retrouver encore sur le fil quand on le fera passer au bord opposé; et, entre ces coïncidences extrêmes, il s'écartera progressivement du fil dans un même sens, suivant une courbe symétrique autour du centre du réticule, laquelle courbe deviendra conséquemment horizontale de part et d'autre de ce point, jusqu'à une distance d'autant plus grande que son maximum d'écart sera moindre. Donc, si la plaque qui porte le réticule admet un petit mouvement dans le sens vertical, il n'y aura qu'à rendre cet écart tout à fait nul, après avoir établi l'horizontalité du fil par la condition de symétrie que je viens d'expliquer, et le point de mire, placé sous le fil, le suivra pendant le mouvement azimutal dans toute l'étendue du champ. Lorsque ces conditions seront remplies, il deviendra indifférent d'amener les étoiles sous le fil transversal, d'un côté ou de l'autre du centre du réticule dans les observations de chaque couple, pourvu qu'on les place toujours très-près de ce centre, pour ne pas trop les écarter de l'axe optique. Et si, après ces dispositions préliminaires, on a encore soin de placer l'étoile du même côté physique du centre, comme on le fait habituellement, l'omission accidentelle de cette condition ne produirait qu'une erreur sans importance dans les résultats définitifs.

Dans le cercle répétiteur de M. Gambey qui avait été mis à ma

cularité, en concevant la surface intérieure du niveau comme un anneau engendré par un cercle DD′, *fig.* 100, dont le centre se meut sur la circonférence directrice NS. Une pareille surface conserve évidemment toutes les propriétés de symétrie que nous venons de considérer. Quant à la manière de donner cette courbure aux tubes, on y parvient, à force d'essais, en usant leur surface intérieure par le frottement, au moyen de verges métalliques qu'on y introduit successivement par les deux bouts, jusqu'à ce que la marche de la bulle s'accorde exactement avec les changements d'inclinaison. Pour voir si cette condition est remplie, on pose le niveau sur un plan incliné, d'une longueur déterminée, dont l'inclinaison peut être rendue variable au moyen d'une vis verticale dont la hauteur des pas est connue. La tête de cette vis porte un cadran divisé en parties égales, et un index, comme une vis de micromètre. En faisant tourner la vis d'une quantité connue, il est facile, d'après les données précédentes, de calculer les variations qui en résultent, sur l'inclinaison du plan, et l'on voit si la marche de la bulle sur le tube y est exactement conforme. Pour cela, on commence par tracer sur le tube de verre des divisions égales dans toute sa longueur (*).

360. Par exemple, en soumettant à cette épreuve un niveau construit par Fortin, pour les observations de latitude à Dunkerque, nous avons trouvé que la bulle parcourt 3 millimètres sur le tube pour un changement de 1″ sexagésimale dans l'inclinaison, et elle conserve cette marche dans toute l'étendue des divisions avec une

les extrémités. Cela fait, sans toucher à la lunette, faites tourner ensemble le niveau et le limbe dans leur plan vertical, au moyen des vis de rappel, jusqu'à ce que la bulle passe à l'autre extrémité du limbe, en sorte qu'elle parcoure ainsi un grand nombre de divisions ; alors l'objet ne répondra plus au centre des fils, et il faudra faire marcher la lunette sur le limbe pour l'y replacer. L'arc qui mesure ce déplacement étant lu sur le limbe, on connaîtra le changement d'inclinaison qui répond au nombre de divisions que la bulle a parcourues ; et par conséquent, en divisant cette inclinaison par leur nombre, on aura la valeur d'une d'entre elles.

L'arc parcouru dans une observation de ce genre étant toujours fort petit, une seule observation ne le donnerait pas avec assez d'exactitude, à cause des erreurs que l'on peut commettre dans les lectures des verniers ; mais on peut appliquer ici le principe de la répétition. En effet, la première observation étant faite, et la lunette ramenée sur l'objet, déplacez le grand niveau et ramenez la bulle à l'autre extrémité du tube ; puis, sans toucher à la lunette, faites tourner le limbe verticalement, jusqu'à ce que la bulle revienne à l'extrémité opposée. Ce mouvement déplacera l'objet, mais vous le ramenez au centre des fils en faisant mouvoir la lunette ; par ce moyen, celle-ci décrira un nouvel arc, qui s'ajoutera au premier qu'elle avait parcouru. Vous vous retrouvez ici précisément dans les mêmes circonstances que lors de la première observation, et vous repassez par les mêmes opérations. Rien n'empêche de faire ainsi une troisième observation, une quatrième, et d'avoir sur le limbe un arc assez grand pour que les erreurs des lectures extrêmes n'en fassent qu'une partie aliquote fort petite : cet arc, correspondant à 1000 ou 1200 parties du niveau, donnera, par la division, la valeur d'une d'entre elles avec une extrême précision. Cette épreuve est d'autant plus nécessaire, qu'elle indique la valeur des parties du niveau lorsqu'il est en place. En effet, il peut arriver que cette valeur ne soit pas la même que quand le tube était libre et simplement posé à nu sur un plan. Car les montures dans lesquelles le niveau est ordinairement serré, peuvent l'infléchir et changer sa courbure, surtout si elle est d'un rayon considé-

rable, comme dans notre niveau de Dunkerque, dont le rayon était de 619 mètres (*).

361. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé la bulle d'air assez petite pour pouvoir être regardée comme un point. Cette considération était utile pour simplifier les raisonnements; mais on l'évite dans la pratique, et c'est avec raison; car l'expérience apprend qu'une bulle si petite se meut avec une extrême lenteur, et que le moindre obstacle, la plus petite irrégularité du tube suffit pour l'arrêter : au contraire, on fait la bulle très-longue, parce que l'on a observé que plus elle est longue, plus elle est sensible, c'est-à-dire, plus elle revient promptement à l'équilibre.

Ce phénomène dépend des attractions réciproques du liquide et du verre : il est du genre de ceux que l'on nomme phénomènes capillaires, parce qu'ils ont été d'abord observés dans des tubes très-étroits, où l'on sait que les liquides susceptibles de mouiller le verre s'élèvent au-dessus de leur niveau naturel, en formant une petite colonne terminée par une surface concave. Les bords de cette surface, composés de molécules adhérentes au tube, s'élèvent le long de ses parois; et leur inclinaison dépend de l'action plus ou moins grande du tube sur le fluide, et aussi de la fluidité plus ou moins parfaite. Un effet analogue se produit dans les niveaux, sur les extrémités de la bulle qu'ils comprennent. Ces extrémités sont relevées le long du tube; par ce moyen la forme de la bulle d'air est arrondie dans les endroits où la surface du liquide touche le verre : elle l'est surtout aux deux bouts plus que sur les côtés, et elle l'est plus dans un tube étroit que dans un tube large. Ceci

les tubes etroits et verticaux augmente à mesure que leur diamètre intérieur diminue, de manière que la colonne liquide ainsi soulevée est réciproque à ce diamètre, comme l'expérience et le calcul s'accordent également à le prouver. D'après cela, on conçoit que l'effet de ces forces doit surtout être considérable sur une très-petite bulle, autour de laquelle le fluide formerait une surface concave d'un très-petit rayon. Alors la moindre aspérité du tube peut changer considérablement les attractions qui déterminent cette forme, et allonger la bulle dans un sens plus que dans un autre, ou même la retenir absolument; au lieu que ces effets seront beaucoup moindres sur une longue bulle et dans un tube large, où le relèvement du fluide, par l'effet de la capillarité, sera beaucoup moindre. Tels sont les avantages des grands niveaux, pareils à ceux que Fortin a construits pour nos cercles. Mais pour que cette longueur soit utile, il faut que les tubes soient bien travaillés dans l'intérieur, et exactement calibrés, suivant la courbure circulaire; précautions que les artistes ne prennent pas ordinairement, se contentant d'y suppléer au moyen des courbures naturelles que les tubes de verre prennent toujours quand on les fabrique.

362. La bulle du niveau ayant une dimension sensible, on regarde son milieu comme le point le plus élevé du tube, et c'est la marche de ce milieu qui détermine les changements d'inclinaison. Pour indiquer et mesurer ces changements, on divise le tube dans toute sa longueur; le zéro de la division répond à son milieu, et pour déterminer la position du centre de la bulle, on prend la demi-somme des divisions où se terminent ses deux extrémités. Cela est rigoureux en effet si le tube est bien calibré suivant la forme annulaire, car alors, sa forme étant symétrique dans toutes ses parties, celle de la bulle le sera nécessairement. On pourrait même, si l'on voulait, prendre une des extrémités de la bulle pour l'indice de son mouvement; mais l'autre moyen est plus avantageux parce qu'il atténue les petites irrégularités du tube en les partageant sur les deux extrémités de la bulle. Au reste, il est sûr que l'un et l'autre procédé sont également inexacts si le tube est mal travaillé en dedans.

363. Ordinairement on a coutume de placer le zéro de la divi-

sion, comme je viens de le dire, au milieu du tube ou à peu près au milieu. Cela est en effet plus commode et on a ainsi des nombres plus simples. Mais cette condition n'est nullement nécessaire; on pourrait faire partir les divisions d'une des extrémités, et la demi-somme des divisions marquées par les extrémités de la bulle donnerait toujours la position de son centre : en général, quelque part que le zéro de la division fût placé sur le tube, le niveau servirait également.

364. L'extrême perfection que l'on a donnée aux niveaux dans ces derniers temps, a permis de les rendre fixes dans les cercles répétiteurs; et de déterminer, par leur variation, les changements d'inclinaison de l'axe. Par ce moyen on évite la nécessité où l'on était de corriger ces changements en replaçant le niveau, ce qui exigeait du temps, et multipliait la difficulté des observations par l'union qu'il fallait obtenir entre l'observateur qui dirige la lunette sur l'astre et celui qui cale le niveau.

Dans cette nouvelle disposition, le niveau est attaché seulement à la colonne verticale autour de laquelle le cercle tourne. Il est placé perpendiculairement à la direction de cette colonne, et parallèlement au limbe. Le limbe lui-même peut aussi s'attacher fixement à la colonne, ou plutôt à un plan vertical qu'elle porte, et sur lequel le limbe se fixe comme sur un mural au moyen de deux fortes vis de pression. Pour faire la première observation, on commence, comme à l'ordinaire, par mettre la lunette du limbe sur le zéro de la division; ou, ce qui revient au même, on lit exactement les points de la division auxquels les verniers répon-

la somme des négatifs, la latitude moyenne n'en est pas sen
ment influencée; mais leur fréquence, et leurs amplitudes i
duelles, excèdent beaucoup ce que l'on obtient avec l'instru
libre. Le nombre des couples de chaque série a varié dep
jusqu'à 11.

Voici maintenant tous les résultats partiels de 20 séries de
phiuchus, faites par le même observateur, dans la même stati
les prends comme exemples de séries au sud du zénith : le no
des couples de chaque série a varié de 6 à 10.

Résultats partiels.	Excès sur la moyenne.
37″,95	+ 0″,08
39,08	+ 1,21
38,85	+ 0,78
37,99	— 0,12
39,20	+ 1,33
37,07	— 0,80
36,43	— 1,44
39,94	+ 2,07
36,00	— 1,87
35,25	— 1,42
35,78	— 2,09
37,43	— 0,44
37,59	— 0,28
40,39	+ 2,52
38,31	+ 0,44
39,52	+ 1,65
37,24	— 0,63

décrira autour de cet axe une surface conique ; de sorte qu'après le retournement, l'inclinaison CAP se trouvera la même, dans un sens opposé, c'est-à-dire encore égale à I'. De plus, si par la nouvelle position du centre C, on élève la verticale CZ', le point Z' sera le centre de la bulle dans la nouvelle position du niveau; l'angle Z'D'A sera encore égal à I, et par un raisonnement semblable à celui que nous venons de faire, on aura $AZ' = I - I'$.

Ainsi donc l'arc AZ, dans la première lecture, est la somme des inclinaisons de l'axe du cercle, sur la verticale et sur le rayon du niveau; tandis que, dans la seconde lecture, l'arc AZ' est égal à la différence de ces mêmes angles; d'où il suit que l'inclinaison du rayon du niveau sur l'axe du cercle est égal à la demi-différence de ces arcs, et l'inclinaison de l'axe du cercle sur la verticale est égale à leur demi-somme, c'est-à-dire que l'on a

$$I' = \frac{AZ - AZ'}{2}, \quad I = \frac{AZ + AZ'}{2}.$$

Reste maintenant à évaluer ces arcs AZ, AZ'. Cela serait facile si l'origine des divisions du niveau se trouvait justement au point A, sur le prolongement de l'axe de rotation; car alors la simple lecture exprimerait leurs valeurs. Mais, quelle que soit l'origine des divisions, il est facile d'obtenir ces valeurs, d'après les deux lectures combinées, et on en tire aussitôt la correction due à l'inclinaison de l'axe (*).

ciation paraît devoir en devenir moindre. Puis, comme les séries s'étendent ordinairement des deux côtés du méridien, l'erreur, quelle qu'elle soit, change de signe avant et après le passage de l'étoile dans ce plan, ce qui en doit affaiblir l'effet final, par compensation, dans chaque série entière ainsi répartie. L'accord remarquable des résultats obtenus pour chaque étoile, en employant cette méthode, confirme les deux considérations précédentes dans leur ensemble; mais elles se trouvent aussi vérifiées séparément par les observations de la Polaire de jour faites le 23 juin. Car ce jour-là, vers le milieu de la série, il me passa par l'esprit le scrupule, probablement mal fondé, que je n'avais pas lu les quatre verniers, mais seulement un seul, en plaçant d'avance l'alidade sur le point du limbe où elle devait être, selon mon calcul, pour trouver l'étoile dans le champ de la lunette. C'est pourquoi, après avoir fait douze observations, je lus les quatre verniers afin de ne pas perdre les suivantes, qui se succédèrent au nombre de quatorze. Or, cette interruption arriva précisément pendant le passage au méridien, de sorte qu'il en résulta, pour ce même jour, deux séries, dont l'une était tout antérieure, l'autre toute postérieure à ce passage. Néanmoins, en les calculant séparément, leurs résultats ne se trouvèrent pas différer d'une seconde de degré, comme on peut le voir dans le tableau général, où elles sont rapportées sous les n°s 60 et 61. Et comme on n'évite pas des écarts de cet ordre, même en observant, dans les circonstances les plus favorables, avec de grands instruments, il s'ensuit que l'erreur qui

était aussi celle qu'il avait employée avec M. Mathieu pour déterminer la parallaxe de la 61e du Cygne, par des distances zénithales absolues observées avec le cercle répétiteur de Reichemback, dont M. Laplace a fait présent à l'Observatoire de Paris; et cela fait concevoir comment cette détermination, qui pouvait paraître si périlleuse avec un instrument de dimension restreinte, s'est trouvée pourtant conforme à celle que M. Bessel a obtenue plus tard avec le grand héliomètre de Fraunhofer. Comme cette particularité, jusqu'ici non connue, constate avec une irrécusable évidence la sûreté du principe d'observation dont il s'agit, j'ai témoigné à M. Arago le désir d'en insérer textuellement les détails dans mon Mémoire, et je les rapporte ici tels qu'il a bien voulu me les communiquer :

« Voici, mon cher confrère, les renseignements que vous » désirez :

» La méthode qui vous a si bien réussi à Formentera me semble » très-rationnelle, surtout pour les cercles dont l'axe n'est fixé » qu'à une de ses extrémités. Nous l'avions déjà employée, » M. Mathieu et moi, non pas dans le dessein de nous garantir de » quelques petites erreurs possibles dans le défaut de verticalité » de l'axe de rotation du cercle, mais parce qu'elle nous paraissait » commode. Nous y eûmes recours pour notre travail sur la » 61e du Cygne. Cette fois, nous n'aurions pas eu le choix. En » effet, nous déterminons les distances absolues des *deux parties* » de ce groupe binaire par *une seule série* de retournements du » cercle de Reichemback, dont l'axe est fixé à ses deux extré- » mités; le point de départ et le point d'arrêt de l'alidade, à la » fin de l'opération, étaient absolument les mêmes pour les deux » étoiles; les angles horaires seuls différaient. Ce qui déterminait » les angles, c'était le moment de la disparition spontanée de » *chaque étoile*, sous le fil horizontal du réticule.

» Lorsque nous cherchions l'origine des erreurs constantes des » cercles répétiteurs, il me vint à l'esprit qu'elles pouvaient » provenir d'un mouvement de l'alidade, qui se serait effectué » dans le passage de l'observation paire à l'observation impaire. » Pour anéantir cette cause d'incertitude, je fis appliquer à l'ali-

» dade *deux vis*, diamétralement opposées. La lunette était ainsi
» doublement fixée; mais alors le pointé ne pouvait pas s'effectuer
» avec une seule de ces vis, l'autre y aurait mis obstacle. L'obser-
» vateur était donc réduit à placer l'étoile près du fil horizontal,
» et à attendre qu'elle allât s'occulter d'elle-même, comme vous
» l'avez fait. »

Les résultats obtenus au moyen des bissections spontanées dans les observations précédentes, et dans celles que j'ai faites en 1825, à Formentera, prouvent donc, par leur exactitude inespérée, la bonté de cette méthode. Le raisonnement et l'expérience s'accordent d'ailleurs pour montrer qu'elle est pratiquement plus commode que la méthode ordinaire. Il est par conséquent à désirer que désormais on la substitue à celle-ci dans l'usage habituel des cercles répétiteurs.

Les latitudes résultantes de mes observations ont été calculées, en partie, avec les Tables de positions apparentes consignées dans les Éphémérides de M. Schumacher pour l'année 1825. On sait que ces Tables sont construites en appliquant les formules d'aberration et de nutation de M. Bessel, aux lieux absolus adoptés par cet astronome. Pour les étoiles qui n'y étaient pas comprises, j'ai calculé l'aberration et la nutation avec les mêmes constantes, et je les ai appliquées aux lieux absolus que M. Airy a bien voulu me communiquer, comme se déduisant, pour 1825, des observations de Greenwich, combinées avec les catalogues les plus estimés. Ces données venant d'un astronome si distingué, m'ont

dont j'ai fait usage, et vérifier par le calcul tous les résultats que j'ai obtenus.

Il ne me reste plus qu'à dire comment j'ai conclu la latitude finale de la station, et quelle est cette latitude.

J'ai d'abord extrait de mon tableau général C, placé à la fin de ce Mémoire, toutes les latitudes partielles déduites des diverses séries de chaque étoile, et je les ai rassemblées en autant de groupes, dans un même tableau D, composé de deux colonnes verticales, lequel fait suite au précédent. La colonne de gauche contient toutes les séries observées au nord du zénith; celle de droite, toutes les séries observées au sud sans aucune exception. J'y ai seulement séparé l'ensemble des séries en deux époques : la première antérieure à la rectification de l'horizontalité du fil où l'on touchait l'instrument; la seconde postérieure, où il était abandonné à lui-même, l'étoile venant se présenter par son seul mouvement propre à la bissection.

Au-dessous de chaque groupe j'ai écrit la latitude moyenne entre toutes les latitudes partielles qui le composent, sans distinction du nombre d'observations que chaque série contient. Car, avec un cercle aussi bien divisé, la diversité des circonstances atmosphériques et astronomiques dans lesquelles chaque série est faite, m'a semblé devoir exercer sur son résultat final beaucoup plus d'influence que l'erreur attribuable à la mesure de l'arc parcouru sur le limbe. A côté de chaque groupe on voit les écarts des résultats partiels autour du résultat moyen, et l'on peut vérifier ce que j'ai annoncé sur la petitesse de leurs amplitudes.

Pour déduire de ces données la latitude vraie, je considère d'abord les 14 séries faites tant au nord qu'au sud du zénith avant la rectification définitive de l'horizontalité du fil, et en touchant l'instrument suivant la pratique habituellement usitée. Puis, considérant toutes ces séries comme équivalentes, je prends la moyenne de toutes les latitudes partielles qu'elles donnent de chaque côté du zénith. J'obtiens ainsi les résultats suivants :

[illegible]	[illegible],070	Demi-différence deux évaluatio Excès du côté nord.
[illegible]	[illegible],444	
[illegible]	[illegible],6,2	6",0278.

[illegible] jours après la rectificatio [illegible] l'instrument libre pendant [illegible] la moyenne des latit [illegible] du zenith, je trou

Au nord du zenith, 33 séries comprenant 480 observations : latitude moyenne apparente.....	38°.39'.56",8608	Demi-différence deux évaluatio Excès du côté nord.
Au sud du zenith, 33 séries comprenant 510 observations : latitude moyenne apparente.....	38.39.49,6753	

NOTE I,

RELATIVE A LA PAGE 442.

Exemple d'un calcul du temps sidéral, d'après une hauteur absolue d'étoile observée hors du méridien.

Soit Δ la distance polaire apparente de l'étoile, c'est-à-dire la distance polaire affectée de la précession, de l'aberration, de la nutation; soit D la distance du pôle au zénith, ou le complément de la latitude du lieu où l'on observe; enfin, nommons Z la distance zénithale observée corrigée de la réfraction, et P l'angle horaire demandé. Avec ces données, on aura l'angle P par la formule

$$\sin \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{Z+\Delta-D}{2}\right)\sin\left(\frac{Z+D-\Delta}{2}\right)}{\sin\Delta\sin D}}.$$

Voici un exemple de ce calcul appliqué à une observation de Rigel, faite à Dunkerque, le 21 mars 1809, à la latitude de 51° 2′ 5″, la hauteur du baromètre étant $0^m,76865$, et le thermomètre centésimal à $+6°$.

La distance de Rigel au pôle boréal de l'équateur, prise dans la *Connaissance des Temps*, et réduite en position apparente pour le 21 mars 1809, est..... $\Delta = 98° 26' 8'',35$

L'ascension droite, réduite en temps pour le même jour..... $A = 5^h 5^m 22^s,60$

L'observation faite au cercle répétiteur, après le passage de Rigel au méridien, a donné la distance apparente au zénith..... 70° 45′ 59″,21

Correction du niveau..... $-0'',16$

$$\Delta = 98^\circ 26' 8'',35$$
$$D = 38^\circ 57' 55'',00$$
$$\Delta - D = 59^\circ 28' 13'',35 \qquad\qquad 59^\circ 28' 13'',35$$
$$Z = 70^\circ 48' 48'',75 \qquad\qquad 70^\circ 48' 48'',75$$
$$Z + \Delta - D = 130^\circ 17' 2'',10 \qquad\qquad Z + D - \Delta = 11^\circ 20' 35'',40$$
$$\frac{Z + \Delta - D}{2} = 65^\circ 8' 31'',05 \qquad\qquad \frac{Z + D - \Delta}{2} = 5^\circ 40' 17'',70$$
$$\log \sin\left(\frac{Z + \Delta - D}{2}\right) = \bar{1},9577758 \qquad\qquad \log \sin \Delta = 1,9952758$$
$$\log \sin\left(\frac{Z + D - \Delta}{2}\right) = \bar{2},9948723 \qquad\qquad \log \sin D = \bar{1},7985466$$
$$\bar{2},9526481 \qquad\qquad \bar{1},7938224$$
$$\bar{1},7938224$$
$$\log \sin^2 \tfrac{1}{2} P = \bar{1},1588257$$
$$\log \sin \tfrac{1}{2} P = \bar{1},5794128$$
$$\tfrac{1}{2} P = 22^\circ 18' 48'',8$$
$$P = 44^\circ 37' 37'',6 = 2^h 58^m 30^s,51$$

Ascension droite apparente de Rigel, calculée et réduite en temps ..... $A = 5^h\ 5^m\ 22^s,61$

Somme, ou temps sidéral de l'observation ..... $8^h\ 3^m\ 53^s,12$

Époque moyenne de la série en temps de la pendule... .... $5^h 46^m 30^s,28$

Retard de la pendule sur le temps sidéral à l'époque de l'observation de Rigel. $2^h\ 17^m\ 22^s,84$

Le calcul précédent suppose que l'on a su calculer la distance polaire et l'ascension droite apparentes de Rigel pour le jour de l'observation. A cet effet, il faut connaître la précession, l'aberration, et la nutation de l'étoile pour ce même jour, afin d'ajouter ces quantités à sa position moyenne. On verra dans le quatrième volume la manière de les déterminer.

Quant à la réfraction, on la prendra dans les Tables, car nous avons expliqué comment les Tables sont formées. On en trouvera une dans la *Connaissance des Temps*.

L'observation que nous venons de calculer avait été faite après le passage de Rigel au méridien; et comme Rigel est une étoile australe qui n'est visible que dans son passage au méridien supérieur, on voit que l'angle horaire P s'est trouvé naturellement compté à partir du méridien supérieur, dans le sens du mouvement diurne, suivant les conventions faites dans la

page 17. C'est pourquoi nous lui avons ajouté l'ascension dr avoir le temps sidéral. Mais si Rigel eût été observé avant so méridien, il aurait fallu prendre le complément de P, afin q fût toujours compté dans le sens du mouvement diurne, après aurait ajouté l'angle A, comme nous l'avons fait ci-dessus. O dans le volume suivant, le calcul de l'heure par des hauteurs soleil.

NOTE II,

RELATIVE A LA PAGE 449.

Exemple de calcul de la latitude, d'après u de l'étoile polaire observée près du méridi le cercle répétiteur.

Soient Δ la distance polaire apparente de l'étoile pour le jour de tion ; D la distance du pôle au zénith, ou le complément de la la posée à peu près connue. Soit r le retard diurne de la pendule su sidéral. Si l'on fait, pour plus de simplicité, $\frac{r}{86400 - r} = r'$, et nomme p' l'angle horaire d'une observation compté en temps de la et à partir du passage de l'étoile au méridien où l'on observe, la de cette observation sera

$$\delta = \frac{\sin\Delta \sin D(1 + 2r')}{\sin Z} \cdot \frac{2'' \sin^2 \frac{1}{2} p'}{\sin 1''};$$

Z est la distance méridienne de l'étoile au zénith. Dans le cas allons considérer, il s'agit d'un passage de la Polaire *au méridien*

ces dernières rectifications, en conservant l'une et l'autre leur même sens d'excès; d'où il suit que l'erreur constante du cercle est devenue moindre en gardant le même signe. C'est ce qui me reste à développer.

Soit D la distance du zénith au pôle boréal dans le lieu où se font les observations. La latitude y sera $90° - D$. Je considère d'abord une étoile dont la distance polaire Δ' soit plus grande que D, et dont on observe le passage supérieur au sud du zénith. Si Z' est sa distance zénithale exacte, au moment de ce passage, on aura :

1°. Passage supérieur au sud du zénith,

$$D = \Delta' - Z', \quad \text{conséquemment} \quad L = 90 - \Delta' + Z'.$$

Prenons une autre étoile dont la distance polaire Δ'' soit moindre que D, et observons-la dans son passage supérieur au nord du zénith. Soit alors Z'' sa distance zénithale exacte; on aura pour elle :

2°. Passage supérieur au nord du zénith,

$$D = \Delta'' + Z'', \quad \text{conséquemment} \quad L = 90° - \Delta'' - Z''.$$

Enfin, considérons une troisième étoile dont la distance polaire soit Δ''' et que l'on observe dans son passage inférieur entre le pôle et l'horizon du côté du nord. Soit alors Z''' sa distance zénithale exacte; on aura :

3°. Passage inférieur au nord du zénith

Passage de l'étoile polaire au méridien supérieur.

$0^h 24^m 44^s$.	ANGLE HORAIRE.	RÉDUCTION.
h m s 23.57. 2	m s 27.42	1504",7
58.18	26.26	1370,4
59. 6	25.38	1288,8
59.47	24.57	1221,0
0. 0.27	24.17	1156,8
1. 5	23.39	1097,2
1.46	22.58	1034,8
9.26	15.18	459,5
10.10	14.34	416,6
18.57	5.47	65,7
22.23	2.21	10,8
22.59	1.45	6,0
23.43	1. 1	2,0
29.19	4.35	41,2
41.59	17.15	583,9
45.54	21.10	879,0
46.36	21.52	938,1
47.12	22.28	990,3
47.52	23. 8	1049,8

log 24811,8	4,3946618
log facteur	$\bar{2}$,4907848
	2,8854466
26 observ. log 26	1,4149733
log δ	1,4704733

Réduction moyenne... δ = 29",55

Distance au zénith observée	37°15'20",21
Correction du niveau	+ 0",68
Distance zénithale moyenne observée	37°15'20",89
Réfraction calculée	46",41
	37°16' 7",30
Réduction au méridien soustractive δ	— 29",55
Distance méridienne de l'étoile au zénith	37°15'37",75
Distance polaire de l'étoile	1°42'18",59
Distance du pôle au zénith D	38°57'56",34
Latitude 90° — D	51° 2' 3",66

On trouvera, dans le volume suivant, le calcul de la latitude par une observation du soleil.

Lorsque, sur la demande du Bureau des Longi
envoyé, dans l'année 1825, en Italie, en Illyrie et
pour compléter les observations du pendule sur le 4
et sur la partie espagnole de notre arc méridien, un
ma mission, et celui qui m'imposait le plus de re
c'était de profiter de mon séjour dans l'île de Formen
le plus austral de notre arc, pour réobserver la lati
station. A la vérité, dans le premier voyage que nou
M. Arago et moi, en Espagne, dans les années 18
cette latitude avait été mesurée avec des soins et une
qui devaient bien sembler suffire, et que je ne pou
d'égaler par mes seuls efforts. Car, pendant un séjo
opérâmes d'abord en commun avec le commissai
M. Chaix, et que M. Arago prolongea encore après
pour la France, il avait été fait soixante-huit séries d
sages, tant de la Polaire que de β de la petite Ourse,
ensemble près de quatre mille observations, dont
donnait 38° 39′ 56″,02 pour la latitude du point le pl
notre arc méridien; et l'on pouvait bien croire qu'un
établi avait toute la certitude désirable. Mais, malhe
à cette époque, on n'avait pas encore reconnu que le
pétiteurs les plus parfaits sont susceptibles d'erreur
en vertu desquelles le même cercle, érigé avec tous l
sibles, peut donner, dans une même station, des di
thales toujours un peu trop fortes, ou toujours un pe
De sorte que, si toutes ces distances sont mesurées

système, en même temps que l'on conserverait le mouvement perpendiculaire qui sert à régler l'axe optique. Si, après avoir effectué toutes ces rectifications, on prenait soin de laisser toujours les bissections s'opérer d'elles-mêmes, tant au nord qu'au sud du zénith, dans un état de complète liberté de l'instrument, comme je l'ai fait dans la seconde partie des observations que je viens de rapporter, on obtiendrait, je crois, les résultats les plus exacts que le cercle répétiteur puisse donner par vision directe. Les mêmes conditions de rectification et de liberté étant appliquées aux observations dans lesquelles la vision directe alterne avec la vision réfléchie, contribueraient sans doute aussi à les rendre encore plus sûres, sinon plus parfaites, qu'on ne les a jusqu'ici obtenues; et la réunion de ces deux procédés donnerait aux cercles répétiteurs portatifs une valeur de détermination qui ne serait peut-être pas inférieure à celle des grands instruments fixes; la petitesse relative de leur dimension étant compensée par le principe de répétition, purgé de toutes les erreurs accidentelles.

Je joins ici les divers tableaux annoncés dans le cours du Mémoire précédent. Mais, pour n'omettre aucun des éléments qui ont été employés dans le calcul des distances zénithales vraies, je rapporterai d'abord les résultats de trois séries d'observations, qui ont été faites à différentes époques sur des objets terrestres très-distants, pour déterminer les valeurs des parties du grand niveau parallèle au limbe, dans la condition même d'application où il se trouve, quand il servait à mesurer l'inclinaison absolue

des instruments fixes de grandes dimensions, les astronomes paraissent être en voie de méthodes nouvelles qui les feraient complétement disparaître; et, lorsque les éléments rigoureux des positions auront été obtenus, rien ne sera plus facile que de les introduire dans le calcul des latitudes déjà observées, pour leur donner le dernier degré de précision que ne comportaient pas des données moins rigoureuses.

Mais, en supposant des observations de distances faites ainsi des deux côtés du zénith, il se présente encore un autre doute d'une importance très-considérable. Les cercles répétiteurs que l'on peut emporter, dans des voyages géodésiques, sont nécessairement de dimensions restreintes. Celui qui m'a servi avait été construit par M. Gambey pour le Dépôt de la guerre : son diamètre était de 14 pouces, ancienne mesure ; il était muni d'une lunette remarquable par l'excellence de son objectif, lequel, avec une ouverture notablement plus grande qu'on n'a coutume de l'admettre pour ces instruments, supportait aussi un grossissement plus fort que l'ordinaire. Mais, malgré ces avantages réunis à la bonté de la construction que l'habileté de l'artiste devait faire supposer, peut-on espérer que des instruments d'un si petit diamètre donneront la latitude terminale d'un grand arc de méridien, avec le degré de précision qu'exige une opération pareille, et que l'on doit atteindre pour présenter des résultats acceptables dans l'état actuel de l'astronomie? Je crois que l'on peut répondre affirmativement à cette question, d'après une épreuve comparative que nous avons faite, M. Arago et moi, en 1818, à Dunkerque, où nous

espéraient par leur manque de perfection, ou même par des accidents qu'il nous fallait aussitôt réparer, avec l'assistance des simples horlogers de la ville. Néanmoins, à force de multiplier les mesures de distances des deux côtés du zénith, en variant le plus possible le choix des étoiles, et les circonstances des observations, nous parvînmes à obtenir une latitude qui, échangée avec celle des observateurs anglais, sans aucune communication préalable, se trouva lui être absolument identique; résultat que, dans la trop juste défiance que nous inspirait notre instrument, nous aurions peut-être aussi difficilement espéré, qu'eux-mêmes s'y seraient peu attendus. Je sens, mieux que personne, la grande part qu'il faut attribuer, dans ce succès, à la rare sagacité d'observation du collègue auquel j'étais associé; mais, si rien ne saurait remplacer un pareil secours, l'excellence de l'instrument employé peut du moins en offrir quelque compensation, en rendant les difficultés moindres, et c'est le cas où je me suis trouvé à Formentera.

Toutefois, ne pouvant pas méconnaître la responsabilité que j'allais encourir, soit que je trouvasse une latitude identique à celle de 1808, ou différente, je cherchai à m'aider de toutes les précautions qui pouvaient assurer le nouveau résultat, quel qu'il pût être; et, tant par le système d'observations auxquelles je m'arrêtai, que par divers perfectionnements que je pense avoir apportés à l'usage pratique de l'instrument, j'ai l'espérance d'y être parvenu.

J'étais assisté dans ce voyage par mon fils. Le gouvernement du roi avait mis à la disposition de l'opération la goëlette *la Torche*, commandée par M. Le Goarant de Tromelin, aujourd'hui capitaine de vaisseau, qui nous combla de prévenances, et nous aida de tout son pouvoir. Ce secours nous donna la possibilité de transporter, sans dommage, de France à Lipari, puis à Formentera, non-seulement nos appareils du pendule, notre cercle, notre lunette méridienne, mais jusqu'à de gros piliers de pierre qui lui servaient de supports, et une petite cabane disposée pour les opérations astronomiques, laquelle, érigée sur le sol de chaque station, nous offrait, en quelques heures, un excellent observatoire tout préparé. Arrivé dans l'île de Formentera, je retrouvai bientôt les mêmes bonnes gens chez lesquels nous avions séjourné, M. Arago et

moi, dix-sept ans auparavant. Ils nous cédèrent aussi volontiers leur humble demeure, un peu étonnés que nous eussions eu besoin d'y revenir; et grâce à l'activité de notre commandant, ainsi qu'à la bonne volonté de tout l'équipage, dès le lendemain nous étions installés chez eux. On commença aussitôt les observations de la mesure du temps; puis, dès que les horloges furent réglées, on entreprit les mesures du pendule et de la latitude, qui se continuèrent sans interruption pendant tout le mois de juin 1825. Un des officiers de la goëlette, M. Denans, aujourd'hui capitaine de corvette, vint partager notre solitude, et nous prêter son assistance, qui nous fut très-utile. Une escouade de matelots, dont faisaient partie le charpentier et l'armurier de la goëlette, resta près de nous sous une tente, non comme protection, ce qui eût été tout à fait inutile, mais pour nous aider dans nos manœuvres, et pour effectuer les réparations que notre observatoire nomade pouvait exiger. Les résultats, donnés par les expériences du pendule, ont été exposés dans le tome VIII des *Mémoires de l'Académie*, conjointement avec ceux qui avaient été obtenus dans les autres stations, soit du parallèle, soit du méridien prolongé jusqu'aux îles Shetland. Les nouvelles observations faites pour déterminer la latitude extrême de notre arc méridien sont donc les seules dont ils me reste à parler.

Le point central de notre ancienne station, celui au-dessus duquel le cercle répétiteur avait été érigé, était marqué par une croix de fer, consacrée par l'évêque d'Ivice, et qui était restée intacte sous cette protection. Le nouveau cercle fut établi tout près de

Tableau B. — *Éléments numériques employés au calcul de la l*
les étoiles observées au sud du zénith.

Noms des astres observés au sud du zénith.	Date de l'observat. Mois.	Jours.	Numéros d'ordre de la série.	Ascension droite apparente en temps sidéral.	Distance au pôle boréal apparente.	Heure du passage au méridien en temps de l'horloge.
				h m s	° ′ ″	h m s
β Scorp. (la plus grosse des deux).	Juin.	7	3	15.55.20,58	109.19.16,42	7. 4.11,56
		8	6	20,58	16,41	6.54. 8,98
		9	11	20,59	16,41	6.44. 6.5[illegible]
Antarès		7	4	16.18.45,89	116. 2.14,79	7.27.27,66
		8	7	45,90	14,82	7.17.24,67
		9	12	45,91	14,85	7. 7.22,19
		11	18	45,92	14,91	6.47.16,8[illegible]
η Ophiuchus....		8	8	17. 0.25,05	105.30. 0,63	7.58.46,63
		9	13	25,07	0,61	7.48.44,13
		11	19	25,09	0,56	7.28.38,70
		12	24	25,10	0,54	7.18.35,71
		13	29	25,11	0,52	7. 8.33,17
		14	34	25,12	0,50	6.58.31,29
		15	39	25,13	0,48	6.48.29,19
		16	44	25,14	0,42	6.38.27,10
		17	50	25,15	0,36	6.28.24,79
		23	66	25,19	0,01	5.28.15,31
δ Ophiuchus....		12	22	16. 5.14,65	103.14.10,03	6.23.48,56

[redacted]

14 de ce genre. Les déclinaisons des étoiles circompolaires offrent aujourd'hui peu d'incertitude, on n'en a observé que trois, savoir : la Polaire inférieure de jour, avec β et γ de la petite Ourse supérieures de nuit. Mais, les déclinaisons au sud du zénith étant moins certaines, on a fait concourir de ce côté à la détermination de la latitude huit étoiles différentes, savoir : δ, η et ζ d'Ophiuchus, α de la Vierge, β' du Scorpion, θ du Centaure, Antarès, et α du Verseau, les unes observées de nuit, les autres de jour. Pour celles-ci, on les prenait toujours à de grands intervalles avant ou après midi, de manière que le soleil ne frappât point le cercle, et qu'il se fût établi préalablement une libre circulation entre l'air intérieur de la cabane et l'air du dehors.

La pratique habituelle du cercle répétiteur est sujette à deux genres d'erreurs, à la vérité très-petites, que l'on tâche toujours soigneusement d'éviter, et dont l'effet accidentel est de nature à s'entre-détruire dans un grand nombre d'observations faites des deux côtés du zénith. Mais je suis parvenu à les rendre tout à fait nulles individuellement; et il en est résulté, entre les séries relatives aux mêmes étoiles, une concordance telle qu'on ne l'obtient pas, je crois, plus parfaite, en opérant avec des instruments fixes d'une grande dimension; car l'écart de ces séries autour de leur moyenne atteint très-rarement 1″.

La première de ces causes d'erreur, et la plus facile à éluder, provient du défaut d'horizontalité du fil transversal sur lequel on amène l'étoile dans les deux observations consécutives qui composent chaque couple. Quelque soin que prenne l'artiste pour ren-

laquelle la bulle du niveau s'était fixée avant que la main quittât la vis de rappel. Mais je pensai que les observations deviendraient plus sûres si l'on évitait complétement de pareils effets; et la rigoureuse horizontalité donnée au fil transversal m'en fournit un moyen bien simple. Car, me trouvant alors seulement astreint à opérer les bissections très-près du centre du réticule et d'un même côté de ce centre, mais nullement au même point physique du fil, j'amenais l'étoile avec la vis de rappel non sur le fil même, mais sur son bord supérieur ou inférieur, selon qu'elle descendait ou qu'elle montait en apparence, me servant du mouvement azimutal pour la mettre suffisamment près du centre; puis je quittais la vis de rappel, et, lisant le temps sur l'horloge, j'attendais, en comptant les secondes, que la bissection se fût rigoureusement opérée dans l'état de liberté de l'instrument; après quoi la division du niveau où la bulle se fixait, depuis que je l'avais abandonné, s'appliquait, sans aucun doute, à la distance zénithale. Or, le résultat de cette pratique fut de faire disparaître ces discordances inexplicables que tous les observateurs sincères reconnaissent avoir accidentellement éprouvées entre les séries d'une même étoile en faisant usage du cercle répétiteur, et de réduire leurs écarts aux limites d'oscillations restreintes que l'on ne peut éviter même avec de grands instruments fixes. Cela peut se vérifier à l'aide du tableau général annexé, sous la lettre C, à la fin de ce Mémoire, lequel contient les résultats successivement obtenus par toutes les séries observées sans aucune exception. Pour cela, j'en ai extrait les

la somme des négatifs, la latitude moyenne n'en est pas se ment influencée; mais leur fréquence, et leurs amplitudes duelles, excèdent beaucoup ce que l'on obtient avec l'insti libre. Le nombre des couples de chaque série a varié de jusqu'à 11.

Voici maintenant tous les résultats partiels de 20 séries de phiuchus, faites par le même observateur, dans la même stat les prends comme exemples de séries au sud du zénith: le n des couples de chaque série a varié de 6 à 10.

Résultats partiels.	Excès sur la moyenne
37",95	+ 0",08
39,08	+ 1,21
38,65	+ 0,78
37,99	— 0,12
39,20	+ 1,33
37,07	— 0,80
35,43	— 1,44
39,94	+ 2,07
36,00	— 1,87
35,25	— 1,42
35,78	— 2,09
37,43	— 0,44
37,59	— 0,28
40,39	+ 2,52
38,31	+ 0,44
39,52	+ 1,65
37,24	— 0,63
38,40	+ 0,53

Table générale de réduction au méridien. (Suite.)

ARGUMENT. Angle horaire en temps.

SECONDES.	0m.	1m.	2m.	3m.	4m.	5m.	6m.
30s	0",5	4",4	12",3	24",0	39",8	59",4	83",0
31	0,5	4,5	12,4	24,3	40,1	59,8	83,4
32	0,6	4,6	12,6	24,5	40,3	60,1	83,8
33	0,6	4,7	12,8	24,7	40,6	60,5	84,2
34	0,6	4,8	12,9	25,0	40,9	60,8	84,7
35	0,7	4,9	13,1	25,2	41,2	61,2	85,1
36	0,7	5,0	13,3	25,4	41,5	61,6	85,5
37	0,7	5,1	13,4	25,7	41,8	61,9	86,0
38	0,8	5,2	13,6	25,9	42,1	62,3	86,4
39	0,8	5,3	13,8	26,2	42,5	62,7	86,8
40	0,9	5,4	14,0	26,4	42,8	63,0	87,3
41	0,9	5,6	14,1	26,6	43,1	63,4	87,7
42	1,0	5,7	14,3	26,9	43,4	63,8	88,1
43	1,0	5,8	14,5	27,1	43,7	64,2	88,6
44	1,1	5,9	14,7	27,4	44,0	64,5	89,0
45	1,1	6,0	14,8	27,6	44,3	64,9	89,5
46	1,2	6,1	15,0	27,9	44,6	65,3	89,9
47	1,2	6,2	15,2	28,1	44,9	65,7	90,3
48	1,3	6,4	15,4	28,3	45,2	66,0	[illegible]

ciation paraît devoir en devenir moindre. Puis, comme l
s'étendent ordinairement des deux côtés du méridien, l'
quelle qu'elle soit, change de signe avant et après le pas
l'étoile dans ce plan, ce qui en doit affaiblir l'effet final, p
pensation, dans chaque série entière ainsi répartie. L'ac
marquable des résultats obtenus pour chaque étoile, en em
cette méthode, confirme les deux considérations précéden
leur ensemble; mais elles se trouvent aussi vérifiées sép
par les observations de la Polaire de jour faites le 23 jui
jour-là, vers le milieu de la série, il me passa par l'esprit
pule, probablement mal fondé, que je n'avais pas lu le
verniers, mais seulement un seul, en plaçant d'avance
sur le point du limbe où elle devait être, selon mon cal
trouver l'étoile dans le champ de la lunette. C'est pourqu
avoir fait douze observations, je lus les quatre verniers
pas perdre les suivantes, qui se succédèrent au nombr
torze. Or, cette interruption arriva précisément pendant
au méridien, de sorte qu'il en résulta, pour ce même j
séries, dont l'une était tout antérieure, l'autre toute p
à ce passage. Néanmoins, en les calculant séparément, le
tats ne se trouvèrent pas différer d'une seconde de degr
on peut le voir dans le tableau général, où elles sont
sous les nos 60 et 61. Et comme on n'évite pas des éca
ordre, même en observant, dans les circonstances les p
rables, avec de grands instruments, il s'ensuit que l'e
pourrait être produite par l'appréciation individuelle de

Table générale de réduction au méridien. (Suite.)

ARGUMENT. Angle horaire en temps.

SECONDES.	0m.	1m.	2m.	3m.	4m.	5m.	6m.
s	″	″	″	″	″	″	″
30	0,5	4,4	12,3	24,0	39,8	59,4	83,0
31	0,5	4,5	12,4	24,3	40,1	59,8	83,4
32	0,6	4,6	12,6	24,5	40,3	60,1	83,8
33	0,6	4,7	12,8	24,7	40,6	60,5	84,2
34	0,6	4,8	12,9	25,0	40,9	60,8	84,7
35	0,7	4,9	13,1	25,2	41,2	61,2	85,1
36	0,7	5,0	13,3	25,4	41,5	61,6	85,5
37	0,7	5,1	13,4	25,7	41,8	61,9	86,0
38	0,8	5,2	13,6	25,9	42,1	62,3	86,4
39	0,8	5,3	13,8	26,2	42,5	62,7	86,8
40	0,9	5,4	14,0	26,4	42,8	63,0	87,3
41	0,9	5,6	14,1	26,6	43,1	63,4	87,7
42	1,0	5,7	14,3	26,9	43,4	63,8	88,1
43	1,0	5,8	14,5	27,1	43,7	64,2	88,6
44	1,1	5,9	14,7	27,4	44,0	64,5	89,0
45	1,1	6,0	14,8	27,6	44,3	64,9	89,5
46	1,2	6,1	15,0	27,9	44,6	65,3	89,9
47	1,2	6,2	15,2	28,1	44,9	65,7	90,3
48	1,3	6,4	15,4	28,3	45,2	66,0	[illegible]

» dade *deux vis*, diamétralement opposées. La lunette était ainsi
» doublement fixée; mais alors le pointé ne pouvait pas s'effectuer
» avec une seule de ces vis, l'autre y aurait mis obstacle. L'obser-
» vateur était donc réduit à placer l'étoile près du fil horizontal,
» et à attendre qu'elle allât s'occulter d'elle-même, comme vous
» l'avez fait. »

Les résultats obtenus au moyen des bissections spontanées dans les observations précédentes, et dans celles que j'ai faites en 1826, à Formentera, prouvent donc, par leur exactitude inespérée, la bonté de cette méthode. Le raisonnement et l'expérience s'accordent d'ailleurs pour montrer qu'elle est pratiquement plus commode que la méthode ordinaire. Il est par conséquent à désirer que désormais on la substitue à celle-ci dans l'usage habituel des cercles répétiteurs.

Les latitudes résultantes de mes observations ont été calculées, en partie, avec les Tables de positions apparentes consignées dans les Éphémérides de M. Schumacher pour l'année 1825. On sait que ces Tables sont construites en appliquant les formules d'aberration et de nutation de M. Bessel, aux lieux absolus adoptés par cet astronome. Pour les étoiles qui n'y étaient pas comprises, j'ai calculé l'aberration et la nutation avec les mêmes constantes, et je les ai appliquées aux lieux absolus que M. Airy a bien voulu me communiquer, comme se déduisant, pour 1825, des observations de Greenwich, combinées avec les catalogues les plus estimés. Ces données venant d'un astronome si distingué, m'ont

Table générale de réduction au méridien. (Suit

ARGUMENT. Angle horaire en temps.

SECONDES.	8m.	9m.	10m.	11m.	12m.	13m.	14
s	″	″	″	″	″	″	
30	141,8	177,2	216,4	259,6	306,7	357,7	412
31	142,4	177,8	217,1	260,4	307,5	358,6	413
32	143,0	178,4	217,8	261,1	308,4	359,5	414
33	143,5	179,0	218,5	261,9	309,2	360,3	415
34	144,1	179,7	219,2	262,6	310,0	361,2	416
35	144,6	180,3	219,9	263,4	310,8	362,1	417
36	145,2	180,9	220,6	264,1	311,6	363,0	418
37	145,8	181,6	221,3	264,9	312,5	363,9	419
38	146,3	182,2	222,0	265,7	313,3	364,8	420
39	146,9	182,8	222,7	266,4	314,2	365,7	421
40	147,5	183,4	223,4	267,2	315,0	366,5	422
41	148,0	184,1	224,1	267,9	315,8	367,5	423
42	148,6	184,7	224,8	268,7	316,6	368,4	424
43	149,2	185,4	225,5	269,5	317,4	369,3	425
44	149,7	186,0	226,2	270,2	318,3	370,2	426
45	150,3	186,6	226,9	271,0	319,1	371,1	427
46	150,9	187,3	227,6	271,8	319,9	372,0	428
47	151,5	187,9	228,3	272,6	320,8	372,9	429
48	152,0	188,5	229,0	273,3	321,6	373,8	430
49	152,6	189,2	229,7	274,1	322,4	374,7	43[illegible]

Au nord du zénith, 5 séries comprenant 70 observations : latitude moyenne apparente...	38°.39′.58″,9970	Demi-différence des deux évaluations. Excès du côté du nord.
Au sud du zénith, 9 séries comprenant 110 observations : latitude moyenne apparente	38.39.46,9414	
Moyenne : 14 séries comprenant 180 observations : latitude vraie	38.39.52,9692	6″,0278.

Je considère ensuite les 66 séries faites après la rectification de l'horizontalité du fil, et en laissant l'instrument libre pendant que la bissection s'opère. Prenant de même la moyenne des latitudes partielles qu'elles donnent de chaque côté du zénith, je trouve :

Au nord du zénith, 33 séries comprenant 480 observations : latitude moyenne apparente.....	38°.39′.56″,8608	Demi-différence des deux évaluations. Excès du côté du nord.
Au sud du zénith, 33 séries comprenant 400 observations : latitude moyenne apparente.....	38.39.49,6753	
Moyenne : 66 séries comprenant 880	[illegible]	[illegible]

Table générale de réduction au méridien. (Fin.)

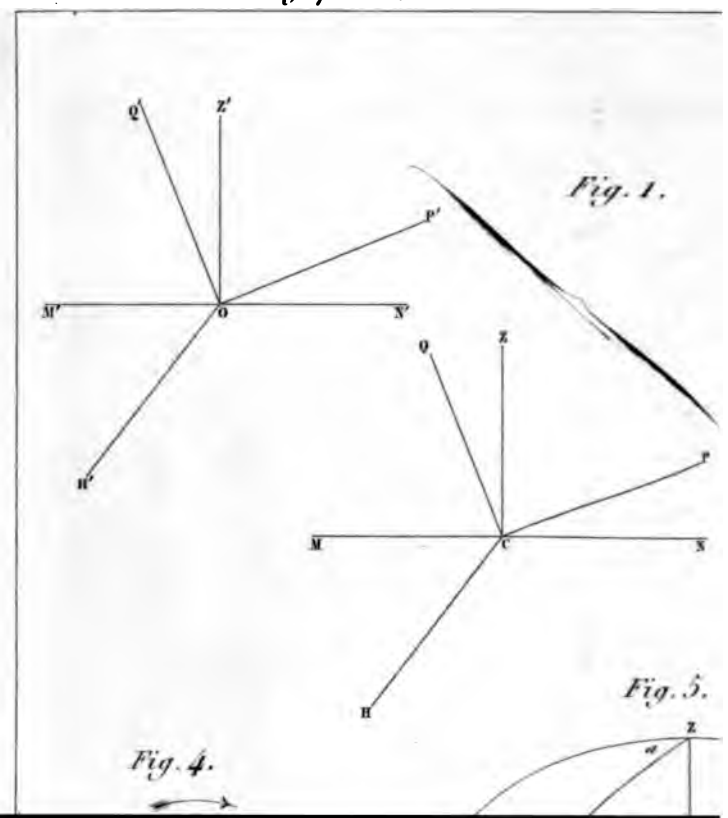
ARGUMENT. Angle horaire en temps.

SEC.	26m.	27m.	28m.	29m.	30m.	31m.	32m.	33m.	34m.
s	″	″	″	″	″	″	″	″	″
30	1377,3	1483,1	1592,7	1706,3	1823,8	1945,2	2070,4	2199,5	2332,7
31	1379,0	1484,9	1594,6	1708,2	1825,8	1947,2	2072,6	2201,7	2334,9
32	1380,8	1486,7	1596,5	1710,2	1827,8	1949,3	2074,7	2203,9	2337,2
33	1382,5	1488,5	1598,3	1712,1	1829,8	1951,3	2076,8	2206,1	2339,4
34	1384,2	1490,3	1600,2	1714,0	1831,8	1953,4	2078,9	2208,3	2341,7
35	1385,9	1492,1	1602,1	1716,9	1833,8	1955,5	2081,0	2210,5	2343,9
36	1387,7	1493,9	1604,0	1717,9	1835,8	1957,6	2083,2	2212,7	2346,2
37	1389,4	1495,7	1605,9	1719,8	1837,8	1959,6	2085,3	2214,9	2348,5
38	1391,2	1497,5	1607,7	1721,7	1839,8	1961,7	2087,4	2217,1	2350,7
39	1392,9	1499,3	1609,6	1723,6	1841,8	1963,7	2089,6	2219,3	2353,0
40	1394,7	1501,1	1611,5	1725,6	1843,8	1965,8	2091,7	2221,5	2355,2
41	1396,4	1502,9	1613,3	1727,5	1845,8	1967,8	2093,8	2223,7	2357,5
42	1398,2	1504,7	1615,2	1729,5	1847,8	1969,9	2095,9	2225,9	2359,7
43	1399,9	1506,5	1617,1	1731,5	1849,8	1972,0	2098,0	2228,1	2361,9
44	1401,7	1508,4	1619,0	1733,4	1851,8	1974,1	2100,2	2230,3	2364,2
45	1403,4	1510,2	1620,8	1735,3	1853,8	1976,1	2102,3	2232,5	2366,4
46	1405,2	1512,0	1622,7	1737,3	1855,8	1978,2	2104,5	2234,7	2368,7
47	1407,9	1513,8	1624,6	1739,2	1857,8	1980,3	2106,6	2236,9	2371,0
48	1408,7	1515,6	1626,5	1741,2	1859,8	1982,4	2108,8	2239,1	2373,3

Table générale de réduction au méridien. (Fin.)

ARGUMENT. Angle horaire en temps.

SEC.	26m.	27m.	28m.	29m.	30m.	31m.	32m.	33m.	34m.
s									
30	1377″,3	1483″,1	1592″,7	1706″,3	1823″,8	1945″,2	2070″,4	2199″,5	2332″,7
31	1379,0	1484,9	1594,6	1708,2	1825,8	1947,2	2072,6	2201,7	2334,9
32	1380,8	1486,7	1596,5	1710,2	1827,8	1949,3	2074,7	2203,9	2337,2
33	1382,5	1488,5	1598,3	1712,1	1829,8	1951,3	2076,8	2206,1	2339,4
34	1384,2	1490,3	1600,2	1714,0	1831,8	1953,4	2078,9	2208,3	2341,7
35	1385,9	1492,1	1602,1	1716,9	1833,8	1955,5	2081,0	2210,5	2343,9
36	1387,7	1493,9	1604,0	1717,9	1835,8	1957,6	2083,2	2212,7	2346,2
37	1389,4	1495,7	1605,9	1719,8	1837,8	1959,6	2085,3	2214,9	2348,5
38	1391,2	1497,5	1607,7	1721,7	1839,8	1961,7	2087,4	2217,1	2350,7
39	1392,9	1499,3	1609,6	1723,6	1841,8	1963,7	2089,6	2219,3	2353,0
40	1394,7	1501,1	1611,5	1725,6	1843,8	1965,8	2091,7	2221,5	2355,2
41	1396,4	1502,9	1613,3	1727,5	1845,8	1967,8	2093,8	2223,7	2357,5
42	1398,2	1504,7	1615,2	1729,5	1847,8	1969,9	2095,9	2225,9	2359,7
43	1399,9	1506,5	1617,1	1731,5	1849,8	1972,0	2098,0	2228,1	2361,9
44	1401,7	1508,4	1619,0	1733,4	1851,8	1974,1	2100,2	2230,3	2364,2
45	1403,4	1510,2	1620,8	1735,3	1853,8	1976,1	2102,3	2232,5	2366,4
46	1405,2	1512,0	1622,7	1737,3	1855,8	1978,2	2104,5	2234,7	2368,7
47	1407,9	1513,8	1624,6	1739,2	1857,8	1980,3	2106,6	2236,9	2371,0
48	1408,7	1515,6	1626,5	1741,2	1859,8	1982,4	2108,8	2239,1	2373,3
49	1410,4	1517,4	1628,3	1743,1	1861,8	1984,4	2110,9	2241,3	2375,5


Q'
Z'
P'
M'
O
N'
H'
Fig. 1.
Q
Z
P
M
C
N
H
Fig. 5.
Z
a
Fig. 4.

[redacted]

Fig. 12.

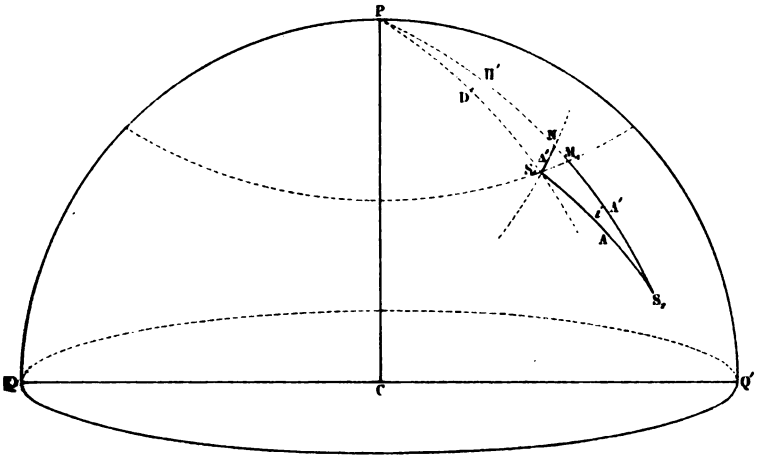


Fig. 10.

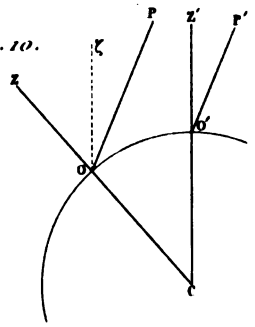
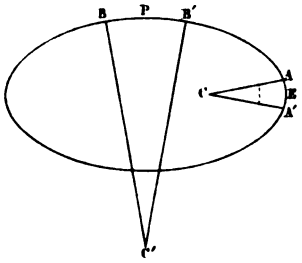
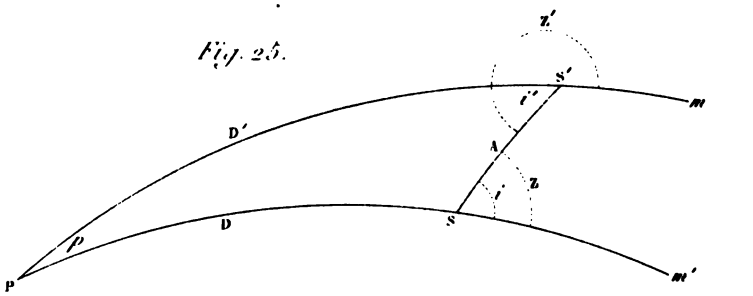


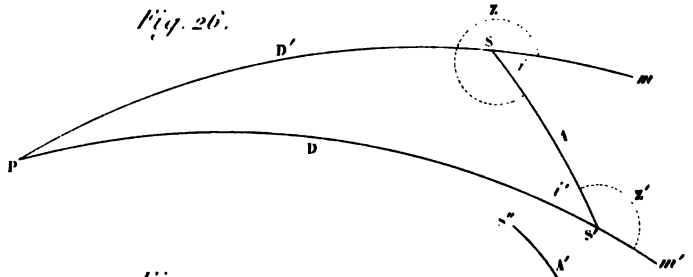
Fig. 9

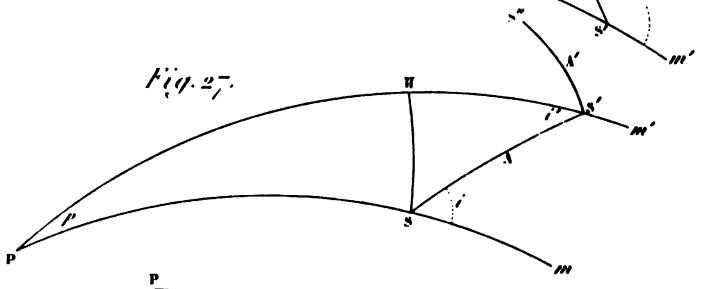


Gravé par E. Wermuth.

[redacted]







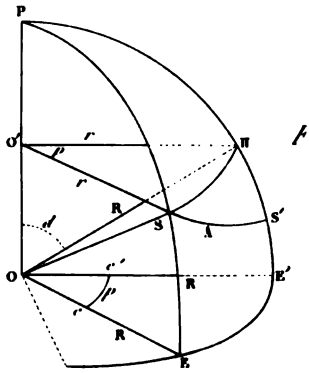


Fig. 28.

Gravé par L. Wormser

Fig. 35.

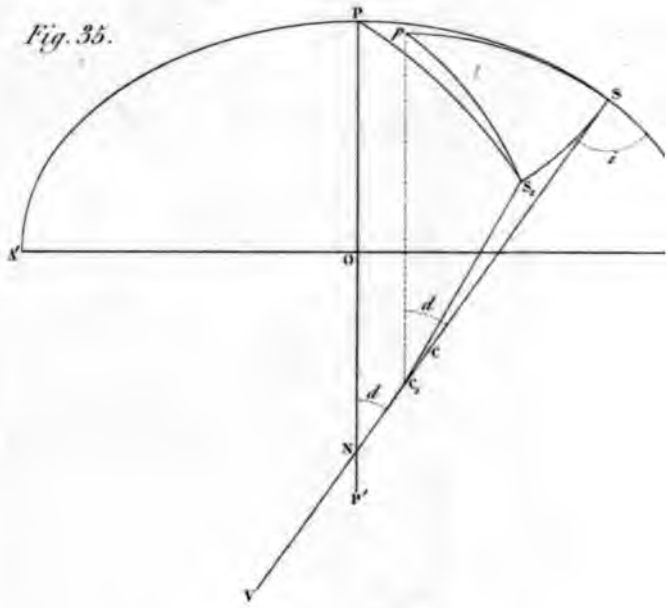
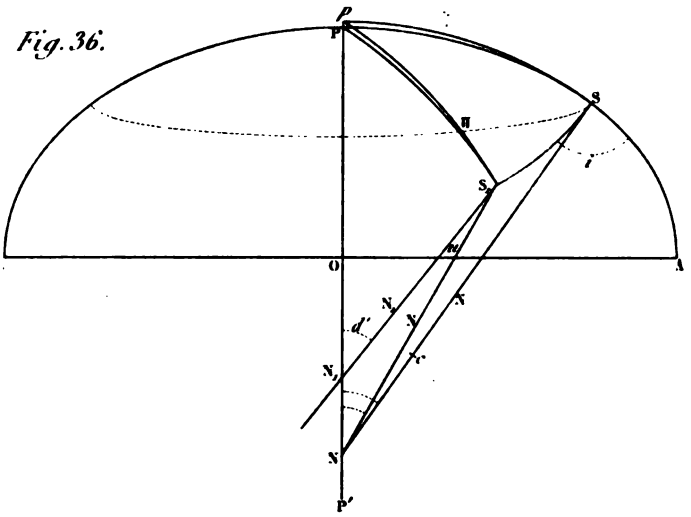


Fig. 37.

Fig. 36.



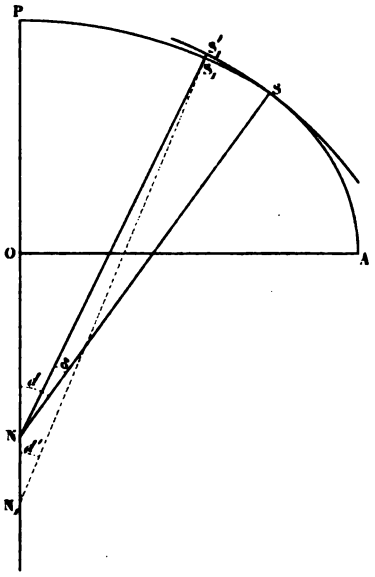


Fig. 39.

Gravé par E. Wiemann

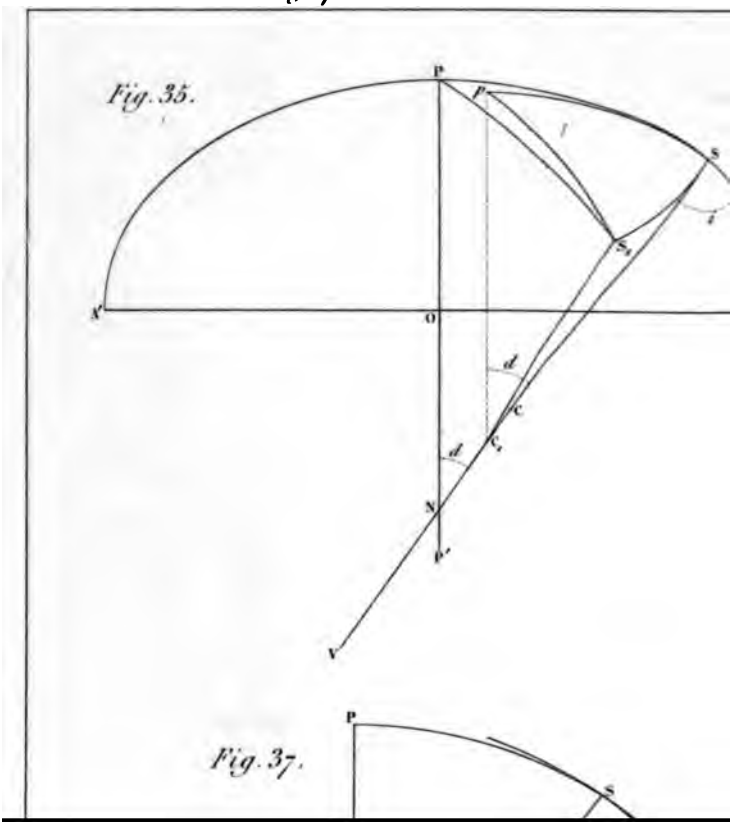
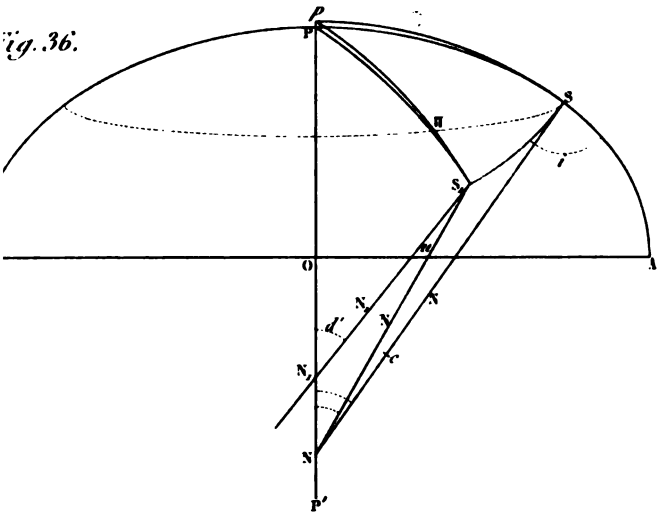


Fig. 35.
P
P'
l
S
i
S₁
S'
O
d
C
C₁
d
N
N'
V

Fig. 37.
P
S

Fig. 36.



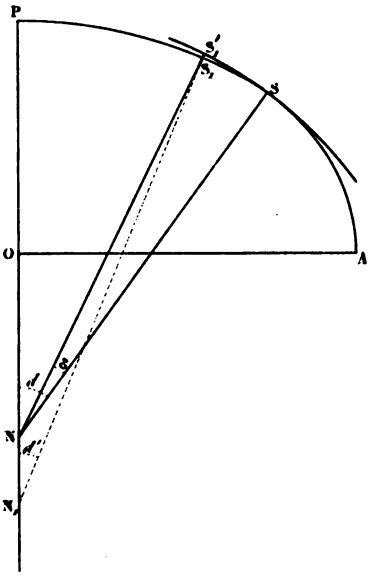


Fig. 39.

Gravé par E. Wermare.

PL. XI.

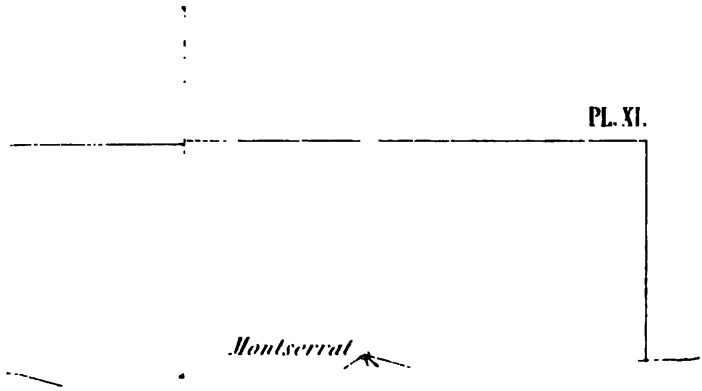


Fig. 43.

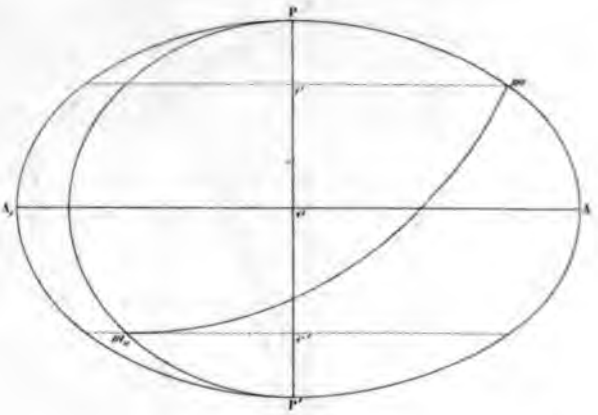


Fig. 46.

Fig. 66.

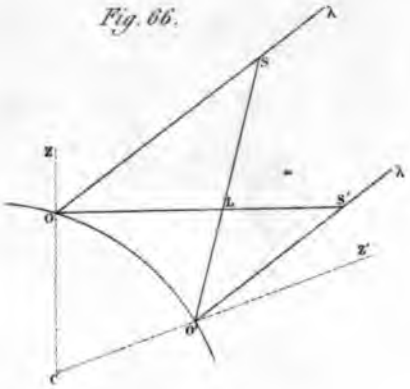


Fig. 67.

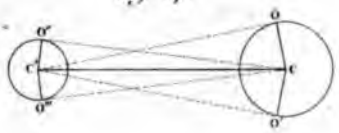


Fig. 6

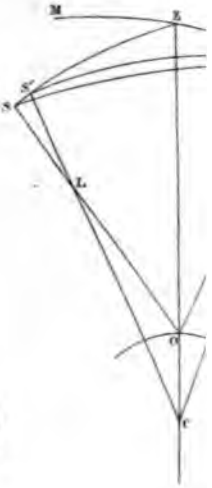


Fig. 69.

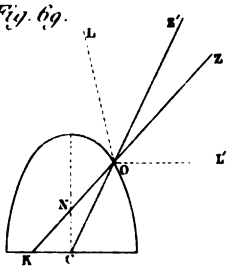


Fig. 70.

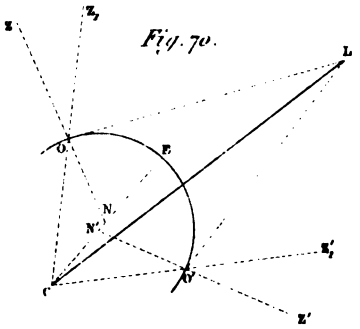


Fig. 71.

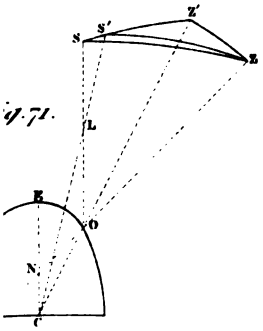


Fig. 72.

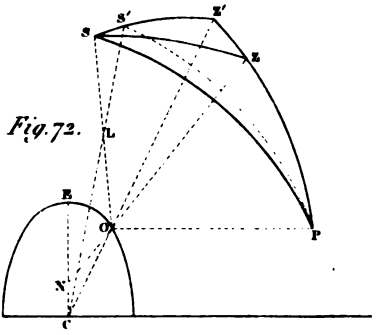


Fig. 75.

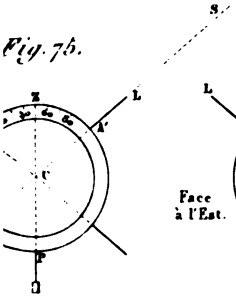


Fig. 76.

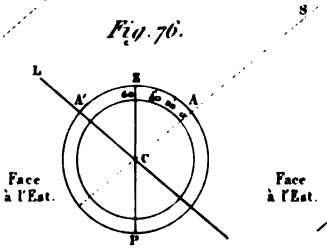
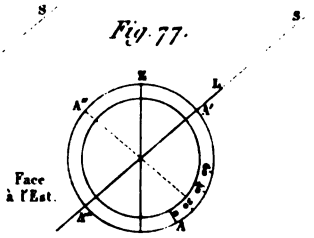


Fig. 77.



Gravé par F. Vermorel.

Fig. 78.

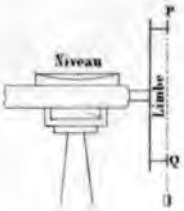


Fig. 79.

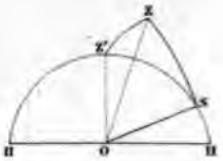


Fig. 84.

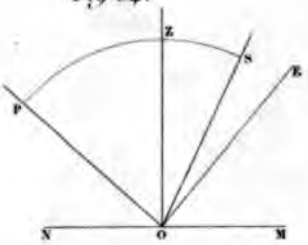


Fig. 85.

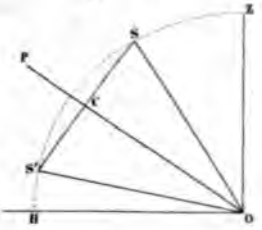


Fig. 81.

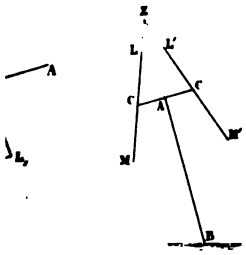


Fig. 82.

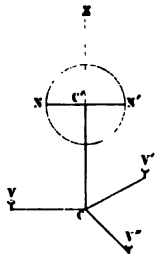


Fig. 83.

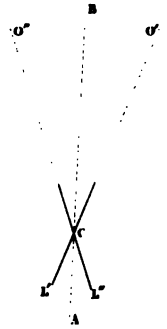


Fig. 86.

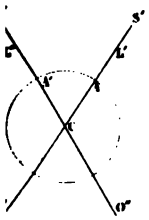


Fig. 87.

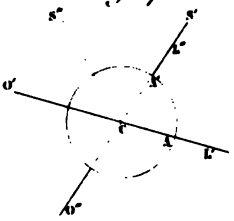


Fig. 88.

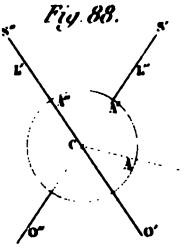


Fig. 92.

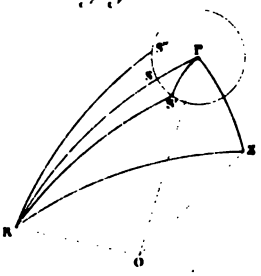
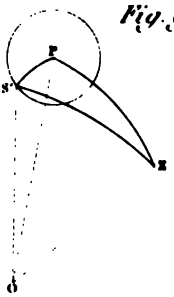
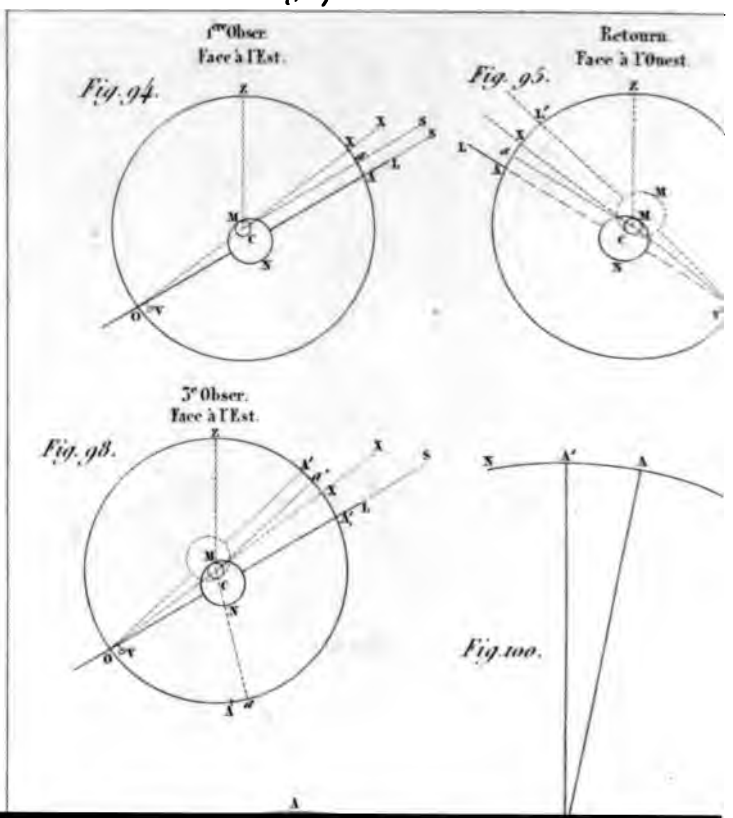


Fig. 93.

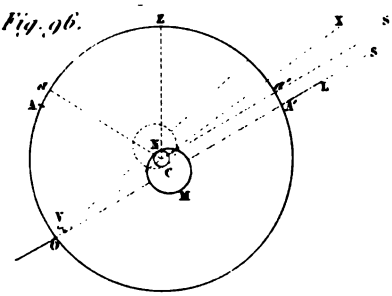


Gravé par E. Vermeer.


1er Obser.
Face à l'Est.
Fig. 94.
Retourn.
Face à l'Ouest.
Fig. 95.
3e Obser.
Face à l'Est.
Fig. 98.
Fig. 100.

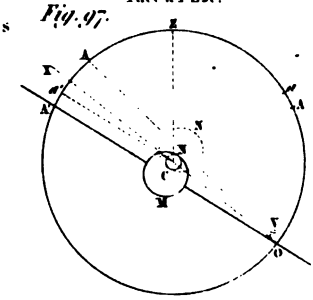
2e Obser.
Face à l'Ouest.

Fig. 96.



Retourn.
Face à l'Est.

Fig. 97.



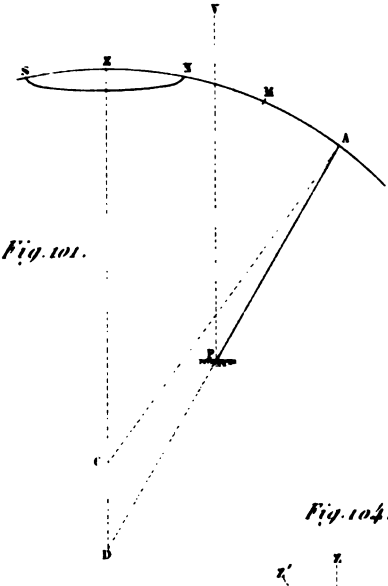


Fig. 101.

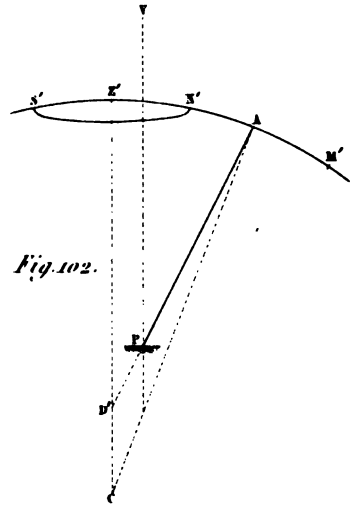


Fig. 102.

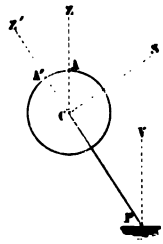



Fig. 104.